TEMA 8. Derivadas. Teoremas. Regla de L´Hôpital
Problemas Resueltos

Derivada de una función en un punto

1. Utilizando la definición, calcula la derivada de $f(x)=x^3-3x$ en el punto $x = 1$.
Solución:
La derivada de la función $f(x)$ es en el punto $x = a$ se define así: $f´(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

En este caso: $f´(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

Como $f(1+h)=(1+h)^3-3(1+h)=1+3h+3h^2+h^3-3-3h=3h^2+h^3-2$ y $f(1) = –2$, se tiene:

$$f´(1)=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+h^3-2-(-2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}\left(3h+h^2\right)=0$$

2. Utilizando la definición, halla la derivada de la función $f(x)=\dfrac{3+x}{x-2}$ en el punto $x = 3$.
Comprueba, mediante las reglas de derivación que tu resultado es correcto.
Solución:

$$f´(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

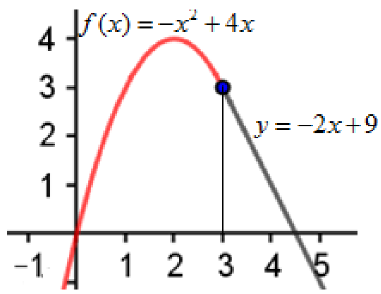
Luego: $$f´(3)=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{3+(3+h)}{(3+h)-2}-\dfrac{3+3}{3-2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{6+h}{1+h}-6}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-5h}{h+h^2}=-5.$$

Derivando $f(x)=\dfrac{3+x}{x-2}\Rightarrow f´(x)=\dfrac{(x-2)-(3+x)}{(x-2)^2}=\dfrac{-5}{(x-2)^2}$

Si $x = 3$, $f´(3)=\dfrac{-5}{(3-2)^2}=-5$. Obviamente, coinciden.

3. Aplicando la definición, estudia si la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x, & x\le 3\\ -2x+9 & x>3\end{cases}$ es derivable en el punto $x = 3$.
Solución:
Para que la función sea derivable en $x = 3$ debe ser continua y deben coincidir las derivadas laterales en dicho punto.
Es continua, pues los límites laterales son iguales:

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}\left(-x^2+4x\right)=3.$$
$$\lim_{x\to 3^+}f(x)=\lim_{x\to 3^-}\left(-2x+9\right)=3.$$



Las derivadas laterales son:
Por la izquierda: $f(x)=-x^2+4x$.
Como $f(3+h)=-(3+h)^2+4(3+h)=-h^2-2h+3$ y $f(3)=3$, se tendrá:

$$f´(3^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2-2h+3-3}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2-2h}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{h(-h-2)}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-h-2) = -2.$$

Por la derecha: $f(x) = -2x+9$.

Como $f(3+h) = -2(3+h)+9 = -2h+3$ y $f(3) = 3$, se tendrá:

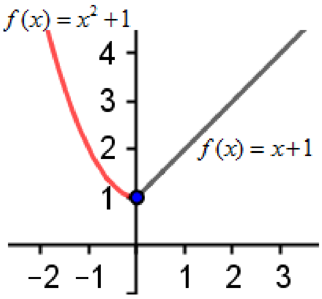
$$f´(3^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-2h+3-3}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-2h}{h} = -2.$$

Como las derivadas laterales son iguales, la función es derivable en $x = 3$.
En la gráfica anterior puede verse que la función no cambia su trayectoria al pasar de la curva a la recta. De hecho, a partir de $x = 3$, la curva es sustituida por la recta tangente a la curva en ese punto: “la curva se va por la tangente”.

4. Aplicando la definición, estudia si la función $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ x+1, & x\ge 0 \end{cases}$ es derivable en $x = 0$.

Solución:
La función es continua en $x = 0$, pues los límites laterales son iguales:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(x^2+1\right) = 1.$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1.$$



Las derivadas laterales son:
Por la izquierda: $f(x) = x^2+1$.

Como $f(0+h) = h^2+1$ y $f(0) = 1$, se tendrá:

$$f´(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+1-1}{h} = \lim_{h\to 0^-} h = 0.$$

Por la derecha: $f(x) = x+1$.

Como $f(0+h) = h+1$ y $f(0) = 1$, se tendrá:

$$f´(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h+1-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

Como las derivadas laterales son diferentes, la función no es derivable en $x = 0$.
En la gráfica anterior puede verse que, en el punto $x = 0$, la función hace un cambio brusco, tiene un pico.

5. En qué puntos no son derivables las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$ b) $f(x) = \sqrt{x}$

En cada caso indica el porqué.
Solución:

a) La función $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$ no es derivable en el punto $x = –3$, pues en ese punto no está definida (y por tanto no es continua).

b) La función $f(x)=\sqrt{x}$ no es derivable para los números reales negativos, por no estar definida. Además, tampoco es derivable en $x = 0$, pues la función derivada $f´(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ no está definida si $x = 0$.

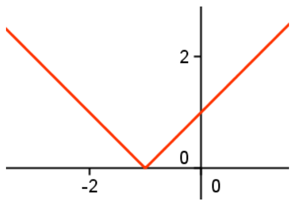
6. Determina los puntos en los que no son derivables las funciones:

a) $f(x)=|x+1|$ b) $f(x)=|x^2-2x|$

Solución:

Ambas funciones pueden definirse a trozos y ambas son continuas (se vio en el tema 7).

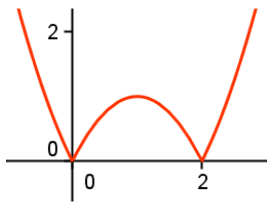
a) $f(x)=|x+1|=\begin{cases}-(x+1), & \text{si } x<-1\\ x+1, & \text{si } x\geq -1\end{cases}$.



Derivando: $f´(x)=\begin{cases}-1, & \text{si } x<-1\\ 1, & \text{si } x>-1\end{cases}$.

Es evidente que en $x = –1$ las derivadas laterales son distintas.
Su gráfica es la adjunta.

b) $f(x)=|x^2-2x|=\begin{cases}x^2-2x, & \text{si } x\leq 0\\ -x^2+2x, & \text{si } 0<x<2\\ x^2-2x, & \text{si } x\geq 2\end{cases} \Rightarrow f´(x)=\begin{cases}2x-2, & \text{si } x<0\\ -2x+2, & \text{si } 0<x<2\\ 2x-2, & \text{si } x>2\end{cases}$.



En $x = 0$ las derivadas valen:

Por la izquierda: $f´(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f´(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x-2)=-2$

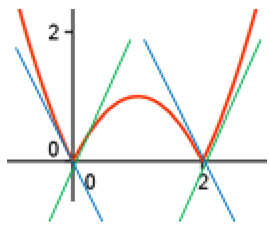
Por la derecha: $f´(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f´(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(-2x+2)=2$.

Como no son iguales, la función no es derivable en $x = 0$.

En $x = 2$:

Por la izquierda: $f´(2^-)=\lim\limits_{x\to 2^-} f´(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(-2x+2)=-2$

Por la derecha: $f´(2^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f´(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2x-2)=2$.



Tampoco es derivable en $x = 2$.

En ambos casos puede verse que las tangentes por uno y otro lado de esos puntos no son iguales.

7. Comprueba que la función $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{si } x\leq 0\\ \ln(1+x^2), & \text{si } x>0\end{cases}$, es derivable en todo **R**.

Solución:

La función dada está definida siempre. También es continua y derivable en todos los puntos, salvo, quizás, en $x = 0$.

Continuidad en $x = 0$.

Si $x\to 0^-$, $f(x)=x^2\to 0$.

Si $x\to 0^+$, $f(x)=\ln(1+x^2)\to \ln 1 = 0$.

Como ambos límites coinciden, la función es continua en $x = 0$.

Derivabilidad en $x = 0$.

Salvo en $x = 0$, su derivada vale: $f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2x}{1+x^2}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Si $x \to 0^-$, $f'(x) = 2x \to 0$.

Si $x \to 0^+$, $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} \to 0$.

Como las derivadas laterales coinciden, la función también es derivable en $x = 0$.

8. Comprueba que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + x^2, & x < 0 \\ -1+\sqrt{x+1}, & 0 \le x \end{cases}$ es continua y derivable en todo **R**.

Haz un esbozo de su gráfica dando valores.

Solución:

El único punto que presenta dificultad es $x = 0$.

Continuidad en $x = 0$. (Para que sea continua es necesario que los límites laterales sean iguales.)

Por la izquierda: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{2}x + x^2\right) = 0$.

Por la derecha: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(-1+\sqrt{x+1}\right) = -1+1 = 0$.

Evidentemente es continua.

Derivabilidad en $x = 0$. Deben coincidir las derivadas laterales.

Salvo en $x = 0$, la derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + 2x, & x < 0 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}, & 0 < x \end{cases}.$$

Derivada por la izquierda: $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\dfrac{1}{2} + 2x\right) = \dfrac{1}{2}$.

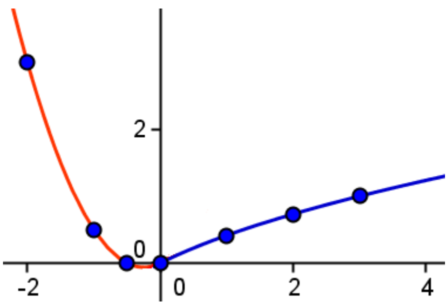
Derivada por la derecha: $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{2}$.

Luego, la función es derivable en $x = 0$.

Para dibujarla puede observarse que se trata de dos parábolas: una de eje vertical, $f(x) = \dfrac{1}{2}x + x^2$; la otra, de eje horizontal, $f(x) = -1+\sqrt{x+1}$. Ambas pueden trazarse a partir de una tabla de valores.

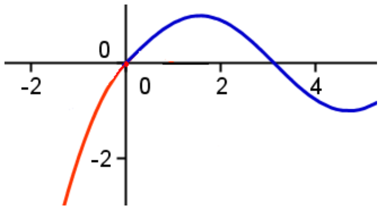
(–2, 3); (–1, 1/2); (–1/2, 0); (0, 0)

(0, 0); $\left(1, -1+\sqrt{2}\right)$; $\left(2, -1+\sqrt{3}\right)$; (3, 1)



9. Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+x, & x\le 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$.

<u>Solución</u>:
Como las funciones que definen a *f* son derivables, el único punto conflictivo es $x = 0$.
Para que la función sea derivable en $x = 0$ debe ser continua y deben coincidir las derivadas laterales en dicho punto.
Es continua, pues los límites laterales son iguales:



$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(-x^2+x\right)=0.$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\sin x=0.$$

Salvo en $x = 0$, la derivada de la función es:

$$f'(x)=\begin{cases}-2x+1, & x<0\\ \cos x, & x>0\end{cases}.$$

Por la izquierda de $x = 0$: si $x\to 0^-$, $f'(x)=-2x+1\to 1$.

Por la derecha de $x = 0$: si $x\to 0^+$, $f'(x)=\cos x\to 1$.

Como las derivadas laterales son iguales, la función es derivable también en $x = 0$.
En la gráfica anterior puede verse que la función no cambia su trayectoria al pasar de la parábola al seno.

Derivabilidad de funciones definidas a trozos. Casos con parámetros

10. Dada la función $f(x)=\begin{cases}3-ax^2 & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{2}{ax} & \text{si } x>1\end{cases}$ halla:

a) El valor o valores de *a* para que *f* sea continua.
b) El valor o valores de *a* para que *f* sea derivable.

<u>Solución</u>:
El único punto que presenta dificultades es $x = 1$, que es donde se distinguen las funciones que intervienen.
a) Para que sea continua los límites laterales deben ser iguales.

Si $x\to 1^-$, $f\to 3-a$ Si $x\to 1^+$, $f\to 2/a$.

Como deben ser iguales: $3-a=\dfrac{2}{a}\Rightarrow a^2-3a+2=0\Rightarrow a=1$ o $a=2$.

La función es continua en todo **R** si $a = 1$ o $a = 2$.

b) Para que sea derivable deben ser iguales las derivadas laterales en $x = 1$.

Derivando: $f'(x)=\begin{cases}-2ax & \text{si } x<1\\ \dfrac{-2}{ax^2} & \text{si } x>1\end{cases}$

Si $x\to 1^-$, $f'\to -2a$ Si $x\to 1^+$, $f'\to -2/a$.

Como deben ser iguales: $-2a=-\dfrac{2}{a}\Rightarrow a^2=1\Rightarrow a=\pm 1$.

Para $a = -1$ la función no es continua, luego el valor que hace la función derivable es $a = 1$.
(Para $a = 2$ la función es continua, pero no derivable).

11. ¿Qué valor hay que asignar a a para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & \text{si } x\le 0 \\ 2x+1, & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea derivable en x = 0?

Solución:

Los límites laterales coinciden con $f(0) = 1$, pues:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^{ax}=e^{0^-}=1 \text{ y } \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(2x+1)=1.$$

Por tanto, la función es continua en x = 0.

Salvo en x = 0, su derivada es $f'(x)=\begin{cases} ae^{ax}, & \text{si } x<0 \\ 2, & \text{si } x>0 \end{cases}$.

Las derivadas laterales en x = 0 valen:

$f'(0^-) = a$ y $f'(0^+) = 2 \Rightarrow$ La función es derivable si a = 2.

12. Halla el valor de a que hace que la función $f(x)=\begin{cases} ax(x+1) & \text{si } x\le 0 \\ x(x-1)^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea derivable en todo **R**. Para el valor hallado haz un esbozo de su gráfica en el intervalo [–2, 2].

Solución:

Es continua en x = 0, pues coinciden los limites laterales.

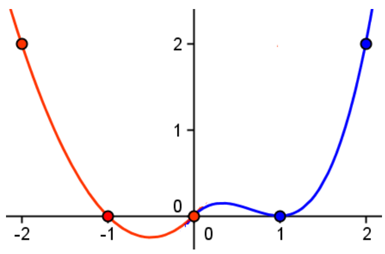
Si $x\to 0^-$, $f(x)=ax(x+1)\to 0$; si $x\to 0^+$, $f(x)=x(x-1)^2 \to 0$

Para que sea derivable es necesario que las derivadas laterales sean iguales.

Como, salvo en x = 0, $f'(x)=\begin{cases} 2ax+a & \text{si } x<0 \\ 3x^2-4x+1 & \text{si } x>0 \end{cases}$ se tiene:

Si $x\to 0^-$, $f'(x)=2ax+a \to a$; si $x\to 0^+$, $f'(x)=3x^2-4x+1\to 1 \Rightarrow a = 1$.

Por tanto, la función es $f(x)=\begin{cases} x(x+1) & \text{si } x\le 0 \\ x(x-1)^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$.



Se puede representar dando valores, como se muestra en la figura.

(Puede observarse que en x = 0 la línea pasa “suavemente” de una a otra función. Eso es un indicador de su derivabilidad).

13. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<2 \\ 2x & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$:

a) ¿Pará qué valores de a y b es continua en x = 2?

b) ¿Pará qué valores de a y b es derivable en x = 2?

Solución:

a) Será continua en x = 2 cuando coincidan los limites laterales.

Si $x\to 2^-$, $f(x)=x^2+ax+b \to 4+2a+b$; si $x\to 2^+$, $f(x)=2x \to 4$.

Debe cumplirse que $4+2a+b=4 \Rightarrow 2a+b=0$.

La función será continua siempre que $b=-2a$, con a arbitrario.

b) Para que sea derivable es necesario que las derivadas laterales, en x = 2, sean iguales.

Como, salvo en x = 2, $f'(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{si } x<2 \\ 2 & \text{si } x>2 \end{cases}$, se deduce:

Si $x \to 2^-$, $f´(x) = 2x + a \to 4 + a$; si $x \to 2^+$, $f´(x) = 2 \to 2$.
Por tanto, $4 + a = 2 \Rightarrow a = -2$.
En ese caso, como $b = -2a \Rightarrow b = 4$.
Luego, para que sea derivable es preciso que $a = -2$ y $b = 4$.

14. Determina los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \le 0 \\ ax + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea derivable en el punto $x = 0$.
Solución:
En primer lugar es necesario que sea continua. Para ello, deben coincidir los límites laterales en $x = 0$.
Si $x \to 0^-$, $f(x) = x^2 + 2x \to 0$.
Si $x \to 0^+$, $f(x) = ax + b \to b \Rightarrow b = 0$.

Para que sea derivable es necesario que coincidan las derivadas laterales.
Salvo en $x = 0$, la derivada de la función es:

$$f´(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 0 \\ a & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Cuando $x \to 0^-$, $f´(x) = 2x + 2 \to 2$.
Cuando $x \to 0^+$, $f´(x) = a \to a \Rightarrow a = 2$.
Por tanto, la función dada será derivable cuando $a = 2$ y $b = 0$.

15. Determina los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} 5 + 2\sin(ax) & \text{si } x \le 0 \\ ax^2 + bx + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea derivable en $x = 0$.
Solución:
Continuidad en $x = 0$: deben coincidir los límites laterales en dicho punto.
Si $x \to 0^-$, $f(x) = 5 + 2\sin(ax) \to 5$.
Si $x \to 0^+$, $f(x) = ax^2 + bx + b \to b \Rightarrow b = 5$; independiente del valor de a.
Por tanto, $f(x) = \begin{cases} 5 + 2\sin(ax) & \text{si } x \le 0 \\ ax^2 + 5x + 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Derivabilidad en $x = 0$: deben coincidir las derivadas laterales en dicho punto.
Salvo en $x = 0$, $f´(x) = \begin{cases} 2a\cos(ax) & \text{si } x < 0 \\ 2ax + 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.
Si $x \to 0^-$, $f´(x) = 2a\cos(ax) \to 2a$
Si $x \to 0^+$, $f´(x) = 2ax + 5 \to 5 \Rightarrow 2a = 5 \Rightarrow a = \frac{5}{2}$.
La función derivable es $f(x) = \begin{cases} 5 + 2\sin\left(\frac{5}{2}x\right) & \text{si } x \le 0 \\ \frac{5}{2}x^2 + 5x + 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

16. Demuestra que la función $f(x)=\begin{cases}\sin x & \text{si } x\le 0\\ x-ax^2 & \text{si } x>0\end{cases}$ es derivable en toda la recta real.

Solución:
El único punto que presenta dificultades es $x = 0$. En ese punto habrá que ver que la función es continua y derivable.

Continuidad:

Si $x\to 0^-$, $f(x)=\sin x\to 0$

Si $x\to 0^+$, $f(x)=x-ax^2\to 0$

Como los límites laterales coinciden, la función es continua para cualquier valor de a.

Derivabilidad:

Salvo para $x = 0$, la función derivada es $f'(x)=\begin{cases}\cos x & \text{si } x<0\\ 1-2ax & \text{si } x>0\end{cases}$

Si $x\to 0^-$, $f'(x)=\cos x\to 1$

Si $x\to 0^+$, $f'(x)=1-2ax\to 1$

Como las derivadas laterales coinciden, la función dada es derivable siempre, independientemente del valor que se tome a,

Tangente a una curva

17. Halla la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes en los puntos que se indica:

a) $f(x)=-x^2+4x$ en el punto $x = 3$. b) $y=\dfrac{2}{x+3}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

c) $f(x)=\dfrac{4}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$. d) $f(x)=\dfrac{6x}{4x^2+1}$ en el punto $x = 1$.

e) $f(x)=e^{-x+2}$ en el punto $x = 2$. f) $f(x)=\ln(x-3)$ en el punto $x = 4$.

Solución:
La ecuación de la recta tangente a la curva asociada a la función $y=f(x)$ en el punto de abscisa $x = a$ viene dada por la expresión: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

a) La recta tangente a la función $f(x)=-x^2+4x$ en el punto de abscisa $x = 3$, será:

$y'-f(3)=f'(3)(x-3)$.

Como $f(3)=3$ y $f'(3)=-2$, se obtiene: $y-3=-2(x-3)\Rightarrow y=-2x+9$.

b) $y=\dfrac{2}{x+3}\Rightarrow y=\dfrac{-2}{(x+3)^2}\to y(1)=1/2;\ y'(1)=-1/8$.

La ecuación de la tangente es: $y-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{8}(x-1)\Rightarrow y=-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{5}{8}$.

c) $f(x)=\dfrac{4}{x}\Rightarrow f(2)=2$; $f'(x)=-\dfrac{4}{x^2}\Rightarrow f'(2)=-1$.

Por tanto, la recta tangente es: $y-2=-(x-2)\Rightarrow y=-x+4$.

d) $f(x)=\dfrac{6x}{4x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{6(1-4x^2)}{(4x^2+1)^2} \to$ ($f(1) = 6/5$; $f'(1) = -18/25$)

La tangente es: $y-\dfrac{6}{5}=-\dfrac{18}{25}(x-1) \Leftrightarrow y=-\dfrac{18}{25}x+\dfrac{48}{25}$.

e) $f(x)=e^{-x+2} \Rightarrow f(2)=e^0=1$; $f'(x)=-e^{-x+2} \Rightarrow f'(2)=-e^0=-1$.
La tangente es: $y-1=-(x-2) \Rightarrow y=-x+3$.

f) $f(x)=\ln(x-3) \Rightarrow f(4)=\ln 1=0$; $f'(x)=\dfrac{1}{x-3} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{4-3}=1$.
La tangente es: $y-0=(x-4) \Rightarrow y=x-4$.

18. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ en el punto (0, f(0)).
Solución:
La ecuación de la recta pedida es: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$$f(x)=x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \Rightarrow f(0)=0;\ f'(0)=2.$$

La recta tangente será: $y-0=2(x-0) \Rightarrow y=2x$.

19. La curva de ecuación $y=3x^2-1$ y la recta $y=4x+b$ son tangentes en el punto $x=\dfrac{2}{3}$.
¿Cuál debe ser el valor de b?
Solución:
En el punto de tangencia la derivada debe valer 4, que es el valor de la pendiente de la recta tangente.

$$y'=6x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Para $x=\dfrac{2}{3}$, $y=3\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-1=\dfrac{1}{3}$. El punto de tangencia es $\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.
Como ese punto debe cumplir la ecuación de la recta $y=4x+b$:

$$\frac{1}{3}=4\cdot\frac{2}{3}+b \Rightarrow b=-\frac{7}{3}.$$

20. Halla la ecuación de la parábola $y=x^2+bx+c$ que es tangente a la recta $y=x$ en el punto (1, 1).
Solución:
La parábola debe pasar por el punto (1, 1) $\Rightarrow 1=1+b+c \Rightarrow c=-b$.
La derivada en el punto de abscisa $x = 1$ debe valer 1, que es el valor de la pendiente de la recta tangente.
Como $y'=2x+b \Rightarrow 2+b=1 \Rightarrow b=-1 \to c=1$.
La parábola buscada es $y=x^2-x+1$.

21. Determina los puntos de la curva $y = x^3 - 3x^2 + 2$ en los cuales la recta tangente es paralela $y = 9x + 5$. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes en esos puntos.

Solución:

La derivada en los puntos buscados debe valer 9, que es el valor de la pendiente de la recta dada.

Como $y' = 3x^2 - 6x$, debe cumplirse que $3x^2 - 6x = 9 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = -1$ o $x = 3$.

Para esos valores, los puntos de la curva son: (–1, –2) y (3, 2).

La tangente en (–1, –2) es: $y + 2 = 9(x+1) \Rightarrow y = 9x + 7$.

La tangente en (3, 2) es: $y - 2 = 9(x-3) \Rightarrow y = 9x - 25$.

22. Determina el valor de p para que la recta tangente a la curva $y = e^{px}$, en el punto de abscisa $x = 1$, pase por el origen de coordenadas.

Solución:

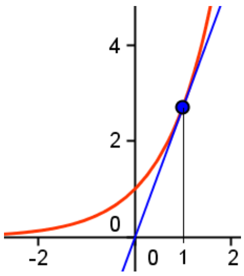
$$y = e^{px} \to y' = pe^{px}$$

En $x = 1$: $y(1) = e^p$; $y'(1) = pe^p$

La tangente en ese punto es: $y - e^p = pe^p(x-1)$.

Para que pase por (0, 0): $0 - e^P = pe^P(0-1) \Rightarrow (p-1)e^p = 0 \Rightarrow p = 1$.

La situación sería la dibujada a la derecha.



Cálculo de derivadas

23. Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado y calcula en cada caso $f'(-1)$, si existe.

a) $f(x) = (1+2x)\cdot(x-x^2)^3$ b) $f(x) = \ln\sqrt{2x^2 - 2x}$

Solución:

a) $f(x) = (1+2x)\cdot(x-x^2)^3 \Rightarrow f'(x) = 2\cdot(x-x^2)^3 + (1+2x)\cdot 3(x-x^2)^2\cdot(1-2x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = (2\cdot(x-x^2) + (1+2x)\cdot 3\cdot(1-2x))\cdot(x-x^2)^2 = (2x - 2x^2 + 3(1-4x^2))(x-x^2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = (3 + 2x - 14x^2)(x-x^2)^2 \to f'(-1) = (-13)\cdot(-2)^2 = -52$.

b) $f(x) = \ln\sqrt{2x^2 - 2x} \Rightarrow f(x) = \ln(2x^2 - 2x)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\ln(2x^2 - 2x) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4x-2}{2x^2 - 2x} = \dfrac{2x-1}{2x^2 - 2x} \to f'(-1) = \dfrac{-3}{4}$.

24. Dada $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2-3)^3}$, halla los valores de $f'(1)$ y $f''(1)$.

Solución:

$$f'(x) = \frac{2(x^2-3)^3 - 2x\cdot 3(x^2-3)^2\cdot 2x}{(x^2-3)^6} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2-3) - 2x\cdot 3\cdot 2x}{(x^2-3)^4} \Rightarrow f'(x) = \frac{-10x^2 - 6}{(x^2-3)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-20x(x^2-3)^4 - (-10x^2-6)\cdot 4(x^2-3)^3\cdot 2x}{(x^2-3)^8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f''(x)=\frac{-20x\left(x^2-3\right)-\left(-10x^2-6\right)4\cdot 2x}{(x^2-3)^8}\ \Rightarrow\ f''(x)=\frac{60x^3+108x}{(x^2-3)^5}.$$

Por tanto:

$$f'(1)=\frac{-10-6}{(-2)^4}=-1;\qquad f''(1)=\frac{60+108}{(-2)^5}=-\frac{21}{4}.$$

25. Halla los puntos en los que se anulan las derivadas primera y segunda de $f(x)=\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$.

Solución:

$$f(x)=\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}=\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}\ \Rightarrow\ f'(x)=\frac{16x^2-4}{(4x^2+1)^2}=0\ \Rightarrow\ 16x^2-4=0\ \Rightarrow\ x=\pm\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=\frac{32x\left(4x^2+1\right)^2-\left(16x^2-4\right)2\left(4x^2+1\right)8x}{(4x^2+1)^4}=\frac{32x\left(4x^2+1\right)-\left(16x^2-4\right)2\cdot 8x}{(4x^2+1)^4}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ f''(x)=\frac{32x\left(3-4x^2\right)}{(4x^2+1)^4}\ \to\ 32x\left(3-4x^2\right)=0\ \Rightarrow x=0 \text{ o } x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

26. Halla el valor de las derivadas primera y segunda de $g(x)=\dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$ en el punto $x=-\dfrac{1}{2}$.

Solución:

$$g(x)=\frac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}\ \Rightarrow\ g'(x)=\frac{2e^{2x+1}(x-1)^2-e^{2x+1}2(x-1)}{(x-1)^4}\ \Rightarrow \text{(simplificando)}$$

$$\Rightarrow\ g'(x)=\frac{2e^{2x+1}(x-1)-e^{2x+1}2}{(x-1)^3}=\frac{2(x-2)e^{2x+1}}{(x-1)^3}.$$

Por tanto, $g'(-1/2)=\dfrac{2\left(-\frac{1}{2}-2\right)e^0}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^3}=\dfrac{-5}{-\frac{27}{8}}=\dfrac{40}{27}$.

Derivada segunda:

$$g'(x)=\frac{2(x-2)e^{2x+1}}{(x-1)^3}\ \Rightarrow\ g''(x)=\frac{\left(2e^{2x+1}+4(x-2)e^{2x+1}\right)(x-1)^3-2(x-2)e^{2x+1}\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}$$

Simplificando:

$$g''(x)=\frac{\left(2e^{2x+1}+4(x-2)e^{2x+1}\right)(x-1)-2(x-2)e^{2x+1}\cdot 3}{(x-1)^4}=\frac{\left(4x^2-16x+18\right)e^{2x+1}}{(x-1)^4}.$$

Por tanto, $g''(-1/2)=\dfrac{(1+8+18)e^0}{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^4}=\dfrac{27}{\frac{81}{16}}=\dfrac{16}{3}$.

27. Deriva las siguientes funciones simplificando el resultado. Calcula, si es posible, su valor en el punto $x = 0$:

a) $f(x) = -2xe^{x^2}$ b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{x}{x-1}\right)$ c) $f(x) = (1-x)^2 e^x$ d) $f(x) = \ln(2x^2+2)$

Solución:

a) $f(x) = -2xe^{x^2} \Rightarrow f'(x) = -2e^{x^2} - 2x\cdot 2xe^{x^2} \Rightarrow f'(x) = -2e^{x^2}(1+2x^2) \quad \to f'(0) = -2$

b) $f(x) = \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{x}{x-1}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\cdot 2\cos\left(\frac{x}{x-1}\right)\cdot\left(-\sin\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)\cdot\left(\frac{x-1-x}{(x-1)^2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sin\left(\frac{x}{x-1}\right)\cos\left(\frac{x}{x-1}\right)}{(x-1)^2} \to f'(0) = 0$$

c) $f(x) = (1-x)^2 e^x \Rightarrow f'(x) = 2(1-x)\cdot(-1)e^x + (1-x)^2 e^x = (x^2-1)e^x \to f'(0) = -1$.

d) $f(x) = \ln(2x^2+2) \Rightarrow f'(x) = \frac{4x}{2x^2+2} = \frac{2x}{x^2+1} \to f'(0) = 0$.

28. Deriva, simplificando los resultados, las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2 - x}{(2x-1)^2}$ b) $f(x) = (5x-4)^2 e^{3x}$ c) $f(x) = \ln(3x^2+2x) - \cos\left(\frac{x-3}{3}\right)$

Solución:

a) $f(x) = \frac{x^2-x}{(2x-1)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-1)(2x-1)^2 - (x^2-x)\cdot 2(2x-1)\cdot 2}{(2x-1)^4} =$

$$= \frac{(2x-1)(2x-1) - (x^2-x)\cdot 2\cdot 2}{(2x-1)^3} = \frac{1}{(2x-1)^3}.$$

b) $f(x) = (5x-4)^2 e^{3x} \Rightarrow f'(x) = 2(5x-4)\cdot 5e^{3x} + (5x-4)^2\cdot 3e^{3x} = (15x-2)(5x-4)e^{3x}$

c) $f(x) = \ln(3x^2+2x) - \cos\left(\frac{x-3}{3}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{6x+2}{3x^2+2x} + \sin\left(\frac{x-3}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}$.

29. Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado cuando se pueda; calcula en todos los casos $f'(1)$, si existe.

a) $f(x) = \frac{2x^3+x^2}{x-1}$ b) $f(x) = (2-3x)\sqrt{3x^4-2x}$ c) $f(x) = \sin^2\left(\frac{x-1}{2}\right)$

Solución:

a) $f(x) = \frac{2x^3+x^2}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(6x^2+2x)(x-1) - 1(2x^3+x^2)}{(x-1)^2} = \frac{4x^3-5x^2-2x}{(x-1)^2} \to f'(1)$ no existe.

b) $f(x)=(2-3x)\sqrt{3x^4-2x} \Rightarrow f´(x)=-3\sqrt{3x^4-2x}+(2-3x)\cdot\dfrac{12x^3-2}{2\sqrt{3x^4-2x}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f´(x)=-3\sqrt{3x^4-2x}+(2-3x)\cdot\dfrac{6x^3-1}{\sqrt{3x^4-2x}} \to f´(1)=-3-1\cdot\dfrac{5}{\sqrt{1}}=-8$.

c) $f(x)=\sin^2\left(\dfrac{x-1}{2}\right) \Rightarrow f´(x)=2\sin\dfrac{x-1}{2}\cdot\cos\dfrac{x-1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\sin\dfrac{x-1}{2}\cdot\cos\dfrac{x-1}{2} \to f´(1)=0.$

30. Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado y calcula en cada caso $f´(-1)$, si existe.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3-3x}{x^2-1}$ b) $f(x)=x^2e^{2x-2}$ c) $f(x)=\sin(1+x)^2-\cos(\pi x)$

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{2x^3-3x}{x^2-1} \Rightarrow f´(x)=\dfrac{(6x^2-3)(x^2-1)-2x\cdot(2x^3-3x)}{(x^2-1)^2}=\dfrac{2x^4-3x^2+3}{(x^2-1)^2} \to f´(-1)$ no existe: la función no está definida en ese punto

b) $f(x)=x^2e^{2x-2} \Rightarrow f´(x)=2xe^{2x-2}+2x^2e^{2x-2}=2x(1+x)e^{2x-2} \to f´(-1)=0$.

c) $f(x)=\sin(1+x)^2-\cos(\pi x) \Rightarrow f´(x)=2(1+x)\cdot\cos(1+x)^2+\pi\cdot\sin(\pi x) \to f´(-1)=0$.

31. Halla la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $y=2^{3x^2-x}$ b) $f(x)=(\cos x^2)^3$ c) $f(x)=(\cos 2x)^3$ d) $y=\operatorname{tag}(3x+2)$

e) $y=\operatorname{tag}(x^3+2)$ f) $y=\operatorname{tag}(x+2)^3$ g) $y=\arcsin 3x$ h) $y=\arcsin\dfrac{x}{3}$

i) $y=\sqrt{9-x^2}$ j) $y=\arcsin x^3$ k) $y=\sqrt{1-x^6}$ l) $y=\arccos(1+x)$

m) $y=\arctan 4x$ n) $y=\arctan\dfrac{x}{4}$ o) $y=\ln(16+x^2)$ p) $y=\arctan\sqrt{x}$

Solución:

a) $y=2^{3x^2-x} \Rightarrow y´=(6x-1)\cdot 2^{3x^2-1}\ln 2$.

b) $f(x)=(\cos x^2)^3 \Rightarrow f´(x)=3(\cos x^2)^2\cdot(-\sin x^2)\cdot 2x = -6x\cdot\sin x^2\cdot(\cos x^2)^2$.

c) $f(x)=(\cos 2x)^3 \Rightarrow f´(x)=3(\cos 2x)^2\cdot(-\sin 2x)\cdot 2 = -6\cdot\sin 2x\cdot(\cos 2x)^2$.

d) $y=\operatorname{tag}(3x+2) \Rightarrow y´=3(1+\operatorname{tag}^2(3x+2)) = \dfrac{3}{\cos^2(3x+2)}$.

e) $y=\operatorname{tag}(x^3+2) \Rightarrow y´=3x^2(1+\operatorname{tag}^2(x^3+2))=\dfrac{3x^2}{\cos^2(x^3+2)}$.

f) $y=\operatorname{tag}(x+2)^3 \Rightarrow y´=3(x+2)^2(1+\operatorname{tag}^2(x+2)^3)$.

g) $y = \arcsin 3x \Rightarrow y' = \dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$.

h) $y = \arcsin \dfrac{x}{3} \Rightarrow y' = \dfrac{1/3}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}}} = \dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

i) $y = \sqrt{9-x^2} \Rightarrow y' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$.

j) $y = \arcsin x^3 \Rightarrow y' = \dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$.

k) $y = \sqrt{1-x^6} \Rightarrow y' = \dfrac{-6x^5}{2\sqrt{1-x^6}} = \dfrac{-3x^5}{\sqrt{1-x^6}}$.

l) $y = \arccos(1+x) \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(1+x)^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{x(-x-2)}}$.

m) $y = \arctan 4x \Rightarrow y' = \dfrac{4}{1+16x^2}$.

n) $y = \arctan \dfrac{x}{4} \Rightarrow y' = \dfrac{1/4}{1+\dfrac{x^2}{16}} = \dfrac{4}{16+x^2}$.

o) $y = \ln\left(16+x^2\right) \Rightarrow y' \dfrac{2x}{16+x^2}$.

p) $y = \arctan \sqrt{x} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1+x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

<u>Derivación logarítmica</u>

32. Aplicando las propiedades de los logaritmos, halla y simplifica la derivada de las funciones:

a) $y = \ln\left(x^2+5x\right)^3$ b) $f(x) = \ln\sqrt{2x^2-2x}$ c) $y = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

<u>Solución</u>:

a) $y = \ln\left(x^2+5x\right)^3 = 3\ln\left(x^2+5x\right)$.

Derivando ahora: $y' = 3 \cdot \dfrac{2x+5}{x^2+5x} = \dfrac{6x+15}{x^2+5x}$.

b) $f(x) = \ln\sqrt{2x^2-2x} \Rightarrow f(x) = \ln\left(2x^2-2x\right)^{1/2} = \dfrac{1}{2}\ln\left(2x^2-2x\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4x-2}{2x^2-2x} = \dfrac{2x-1}{2x^2-2x}$.

c) $y = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right) = \ln(x^2+1) - \ln(x^2-1) \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{x^2+1} - \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{-4x}{x^4-1}$.

33. Aplicando logaritmos halla la derivada de:

a) $f(x)=\left(x^2+1\right)^{(3x-2)}$ b) $f(x)=x^{\sin x}$ c) $f(x)=x^{\ln x}$ d) $f(x)=\left(e^x\right)^{e^x}$

Solución:

a) $f(x)=\left(x^2+1\right)^{(3x-2)} \Rightarrow \ln f(x)=\ln\left(x^2+1\right)^{(3x-2)} \Rightarrow \ln f(x)=(3x-2)\ln(x^2+1)$.

Derivando:

$$\frac{f´(x)}{f(x)}=3\ln(x^2+1)+(3x-2)\cdot\frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow f´(x)=f(x)\left(3\ln(x^2+1)+(3x-2)\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f´(x)=\left(x^2+1\right)^{3x-2}\cdot\left(3\ln(x^2+1)+(3x-2)\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right).$$

b) Si $f(x)=x^{\sin x}$, aplicando logaritmos: $\ln f(x)=(\sin x)\ln x$.

Derivando: $\dfrac{f´(x)}{f(x)}=(\cos x)\ln x+\sin x\cdot\dfrac{1}{x} \Rightarrow f´(x)=f(x)\left((\cos x)\ln x+\sin x\cdot\dfrac{1}{x}\right)\Rightarrow$

$$\Rightarrow f´(x)=x^{\sin x}\cdot\left((\cos x)\ln x+\frac{\sin x}{x}\right).$$

c) Si $f(x)=x^{\ln x} \Rightarrow \ln f(x)=\ln x^{\ln x}=\ln x\ln x=(\ln x)^2$.

Derivando: $\dfrac{f´(x)}{f(x)}=\dfrac{2}{x}\ln x \Rightarrow f´(x)=x^{\ln x}\cdot\dfrac{2}{x}\ln x$.

d) Si $f(x)=\left(e^x\right)^{e^x} \Rightarrow \ln f(x)=\ln\left(e^x\right)^{e^x}=e^x\ln e^x=xe^x$.

Derivando: $\dfrac{f´(x)}{f(x)}=e^x+xe^x \Rightarrow f´(x)=\left(e^x\right)^{e^x}(e^x+xe^x)$.

34. A partir de las fórmulas de las derivadas de $f(x)=\sin x$ y $f(x)=\cos x$ halla las fórmulas de las derivadas de las funciones:

a) $f(x)=\text{cosec}\, x$ b) $f(x)=\sec x$ c) $f(x)=\text{cotan}\, x$

Solución:

a) Por definición de cosecante: $f(x)=\text{cosec}\, x=\dfrac{1}{\sin x}$.

Derivando: $f´(x)=\dfrac{-\cos x}{(\sin x)^2}=\dfrac{-\cos x}{\sin x\cdot\sin x}=\dfrac{-\cos x}{\sin x}\cdot\dfrac{1}{\sin x}=-\text{cotag}\, x\cdot\text{cosec}\, x$

b) Por definición de secante: $f(x)=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$.

Derivando: $f´(x)=\dfrac{-(-\sin x)}{(\cos x)^2}=\dfrac{\sin x}{\cos x\cdot\cos x}=\dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}=\tan x\cdot\sec x$

c) Como $f(x)=\text{cot an}\, x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$, derivando:

$$f´(x)=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{(\sin x)^2}=\frac{-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)}{(\sin x)^2}=\frac{-1}{(\sin x)^2}=-(\text{cosec}\, x)^2.$$

35. Partiendo de la definición de arco coseno y arco tangente deduce las funciones derivadas de:

a) $f(x) = \arccos x$ b) $f(x) = \text{arctag}\, x$

Solución:

a) $f(x) = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos f(x)$.

Derivando miembro a miembro se obtiene:

$$1 = \left(-\sin f(x)\right) \cdot f'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sin f(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 f(x)}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Por tanto: $f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) $f(x) = \text{arctag}\, x \Leftrightarrow x = \text{tag}\, f(x)$.

Derivando miembro a miembro se obtiene:

$$1 = \left(1 + \text{tag}^2 f(x)\right) \cdot f'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+\text{tag}^2 f(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Por tanto: $f(x) = \text{arctag}\, x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

36. Halla la derivada *n*-ésima de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln x$ b) $f(x) = \ln(2x-1)$ c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

Solución:

a) De $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{-1}{x^2} \Rightarrow f'''(x) = \dfrac{+2}{x^3} \Rightarrow f^{4)}(x) = \dfrac{-2\cdot 3}{x^4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f^{5)}(x) = \frac{+2\cdot 3\cdot 4}{x^5} \Rightarrow \ldots\ f^{n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}.$$

Observación: Si se escribe $f'(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$, las sucesivas derivadas se obtienen con mayor facilidad, pues: $f''(x) = -1\cdot x^{-2} \Rightarrow f'''(x) = -1\cdot(-2)x^{-3} \Rightarrow f^{4)}(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4} \Rightarrow \ldots$

b) $f(x) = \ln(2x-1) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{2x-1} = 2(2x-1)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x) = -2(-1)\cdot 2(2x-1)^{-2} = +2^2(2x-1)^{-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'''(x) = -2\cdot 2^2\cdot 2(2x-1)^{-3} = -2\cdot 2^3\cdot(2x-1)^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{4)}(x) = -2\cdot(-3)\cdot 2^3\cdot 2(2x-1)^{-4} = +2\cdot 3\cdot 2^4(2x-1)^{-4} \Rightarrow f^{4)}(x) = +(3!)\cdot 2^4(2x-1)^{-4}$

$\Rightarrow f^{5)}(x) = -2\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot 2^4\cdot 2(2x-1)^{-5} = -2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^5(2x-1)^{-5} \Rightarrow f^{5)}(x) = -(4!)\cdot 2^5(2x-1)^{-5}$

…

Por tanto:

$$f^{n)}(x) = (-1)^n\left((n-1)!\right)\cdot 2^n(2x-1)^{-n} \Leftrightarrow f^{n)}(x) = \frac{(-1)^n\cdot\left((n-1)!\right)\cdot 2^n}{(2x-1)^n}.$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \Rightarrow f(x) = (1-x)^{-1} \Rightarrow f'(x) = -1\cdot(-1)(1-x)^{-2} = (1-x)^{-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x) = -2\cdot(-1)\cdot(1-x)^{-3} = 2\cdot(2x-1)^{-3} \Rightarrow f'''(x) = -3\cdot 2\cdot(-1)\cdot(1-x)^{-4} = 3!\cdot(2x-1)^{-4} \Rightarrow$
$\Rightarrow f^{4)}(x) = -4\cdot 3!\cdot(-1)\cdot(1-x)^{-5} = 4!\cdot(1-x)^{-5} \Rightarrow \ldots$
Por tanto:

$$f^{n)}(x) = (n!)\cdot(1-x)^{-n-1} \Leftrightarrow f^{n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

37. Halla la derivada n-ésima de las funciones:

a) $f(x) = e^{2x}$ b) $f(x) = xe^{x}$ c) $f(x) = e^{-x}$

Solución:

a) $f(x) = e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow f''(x) = 2\cdot 2e^{2x} = 2^2\cdot e^{2x} \Rightarrow f'''(x) = 2\cdot 2^2 e^{2x} = 2^3\cdot e^{2x} \ldots$
Por tanto:

$$f^{n)}(x) = 2^n e^{2x}.$$

b) $f(x) = xe^x \Rightarrow f'(x) = e^x + xe^x \Rightarrow f''(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x \Rightarrow$
$\Rightarrow f'''(x) = 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x \Rightarrow \ldots \Rightarrow f^{n)}(x) = ne^x + xe^x$.

c) $f(x) = e^{-x} \Rightarrow f'(x) = -e^{-x} \Rightarrow f''(x) = +e^{-x} \Rightarrow f'''(x) = -e^{-x} \ldots$
Por tanto:

$f^{n)}(x) = -e^{-x}$, si n es impar; $f^{n)}(x) = e^{-x}$, si n es par.

Diferencial de una función

38. Halla la diferencial de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ b) $y = e^{-x}$ c) $u = \cos^2 x$ d) $u = \sqrt{x+1}$

Solución:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow dy = (6x^2 - 6x)dx$. b) $y = e^{-x} \Rightarrow dy = -e^{-x}dx$.

c) $u = \cos^2 x \Rightarrow du = 2\cos x(-\sin x)dx$. d) $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow du = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}dx$.

39. ¿Cuál es el incremento (la variación aproximada) de cada una de las siguientes funciones cuando, partiendo de $x = 2$, la variable x se incrementa en 0,2?

a) $f(x) = \ln(x-1)$ b) $f(x) = xe^{2-x}$ c) $f(x) = \sqrt{x-1}$

Solución:

El incremento de la función es aproximadamente igual al valor de $df(2)$ con $dx = 0{,}2$.

a) Para $f(x) = \ln(x-1) \Rightarrow df(x) = \dfrac{1}{x-1}dx \to df(2) = \dfrac{1}{2-1}\cdot 0{,}2 = 0{,}2$.

b) Para $f(x) = xe^{2-x} \Rightarrow df(x) = \left(e^{2-x} - xe^{2-x}\right)dx \to df(2) = \left(e^{2-2} - 2\cdot e^{2-2}\right)\cdot 0{,}2 = -0{,}2$.

c) Para $f(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow df(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}dx \to df(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2-1}}\cdot 0{,}2 = 0{,}1$.

40. Teniendo en cuenta que $\sqrt{64}=8$, utilizando la diferencial de la función $f(x)=\sqrt{x}$, halla el valor aproximado de $\sqrt{65}$.
Solución:
Si $f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow df(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$.
Para $x = 64$ y $dx = 1$ se tiene: $df(64)=\dfrac{1}{2\sqrt{64}}\cdot 1=\dfrac{1}{16}=0{,}0625$.
Por tanto, $f(65)\approx f(64)+df(64)=8+0{,}0625=8{,}0625$.

Observación: Utilizando la recta tangente en $x = 64$, que es $y-f(64)=f'(64)(x-64) \Rightarrow$
$\Rightarrow y-8=\dfrac{1}{2\sqrt{64}}(x-64) \Rightarrow y=\dfrac{1}{16}x+4 \to$ Para $x = 65$, $f(65)\approx\dfrac{1}{16}\cdot 65+4 = 8{,}0625$.
Con la calculadora se obtiene $\sqrt{65}$ = 8,062257748. El error que se comete al aproximar ese valor con la diferencial es inferior a 0,0003.

Derivación implícita

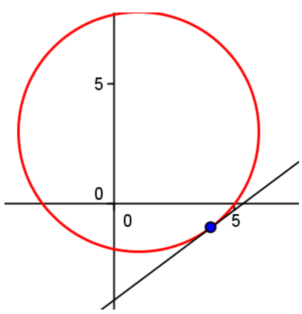
41. Para cada una de las siguientes ecuaciones, halla el valor de y' en el punto (1, 2) de su gráfica:

a) $x^2+2y^2=9$ b) $\sqrt{x}+\sqrt{2y}-3=0$ c) $y^2-2xy+x^2-2x+1=0$

Solución:
a) $x^2+2y^2=9 \Rightarrow 2x+2\cdot 2y\cdot y'=0 \Rightarrow y'=-\dfrac{2x}{4y}=-\dfrac{x}{2y}$.
Sustituyendo los valores de x e y: $y'(1,2)=-\dfrac{1}{2\cdot 2}=-\dfrac{1}{4}$.
b) $\sqrt{x}+\sqrt{2y}-3=0 \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{2y'}{2\sqrt{2y}}=0 \Rightarrow y'=-\dfrac{\sqrt{2y}}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y'(1,\ 2)=-\dfrac{\sqrt{4}}{2}=-1$.

c) $y^2-2xy+x^2-2x+1=0 \Rightarrow 2yy'-2y-2xy'+2x-2=0 \Rightarrow y'=\dfrac{y-x+1}{y-x} \Rightarrow y'(1,2)=2$.

42. Dada la circunferencia de ecuación $(x-1)^2+(y-3)^2=25$, halla la ecuación de la recta tangente a ella en el punto (4, –1).
Solución:
El punto (4, –1) pertenece a la circunferencia, pues cumple su ecuación:
$$(4-1)^2+(-1-3)^2=3^2+(-4)^2=25.$$
El valor de la pendiente de la tangente viene dado por la derivada en el punto; en este caso, se obtiene implícitamente.
$$(x-1)^2+(y-3)^2=25 \Rightarrow 2(x-1)+2(y-3)y'=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'=-\frac{2(x-1)}{2(y-3)}=-\frac{x-1}{y-3} \Rightarrow y'(4,-1)=\frac{3}{4}.$$
La ecuación de la recta tangente: $y+1=\dfrac{3}{4}(x-4)$.



Propiedades de las funciones derivables. Teoremas de Rolle y del valor medio

43. ¿Verifica la función $f(x)=x^2-2x+3$ el teorema de Rolle en el intervalo [–1, 3]? En caso afirmativo halla el punto que afirma el teorema.
Solución:
Es obvio que la función es continua y derivable en el intervalo dado; además, $f(-1)=6$ y $f(3)=6$.
Por tanto, verifica el teorema de Rolle y, en consecuencia, existe un punto $c \in (-1, 3)$ tal que $f'(c)=0$.
Efectivamente, derivando $f'(x)=2x-2=0 \Rightarrow x=1$. Esto es, $c = 1$.
Observación: Como la función dada es una parábola, la abscisa hallada es la del vértice.

44. (Propuesto en Selectividad)
¿Se verifica el teorema de Rolle para la función $f(x)=|2x-3|-7$, $-2 \le x \le 5$?
Solución:
La función es continua y toma valores iguales en los extremos del intervalo:
$f(-2)=f(5)=0$.
Pero, como no es derivable en el intervalo dado (en concreto en $x = 3/2$), no satisface las condiciones exigidas por el teorema.

45. Halla el punto que verifica el teorema del valor medio para la función $f(x)=x^3-3x$, en el intervalo [–2, 0].
Solución:
La función es continua y derivable en el intervalo dado. Por tanto, existe un punto $x \in (-2, 0)$ tal que:

$$\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=f'(x) \Rightarrow \frac{0-(-2)}{2}=3x^2-3 \Rightarrow 3x^2=4 \Rightarrow x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

El punto buscado es $x=-\frac{2}{\sqrt{3}} \in (-2, 0)$.

46. Halla el punto que verifica el teorema del valor medio para la función $f(x)=\frac{1}{x}$, en el intervalo $(a, 2a)$, $a \ne 0$. Concrétalo cuando $a = 2$.
Solución:
Es obvio que la función es continua y derivable en el intervalo dado (La función está definida para todo $x \ne 0$). Por tanto, existe un punto $c \in (a, 2a)$ tal que:

$$\frac{f(2a)-f(a)}{2a-a}=f'(c) \Rightarrow \frac{1/2a-1/a}{a}=\frac{-1}{c^2} \Rightarrow \frac{-1}{2a^2}=\frac{-1}{c^2} \Rightarrow c^2=2a^2 \Rightarrow c=a\sqrt{2}.$$

Si $a = 2$, el intervalo es (2, 4), y $c=2\sqrt{2}$.

47. (Propuesto en Selectividad)
Aplica el teorema del valor medio a la función $f(x)=\ln x$ en el intervalo $(1, e^2)$, determinando el valor de c, $1 < c < e^2$, para el que se verifica dicho teorema.
Solución:
La función es continua y derivable en el intervalo dado; por tanto, se cumple que existe un punto $c \in (1, e^2)$ tal que:

$$\frac{f(e^2)-f(1)}{e^2-1}=f'(c)\Rightarrow\frac{\ln e^2-\ln 1}{e^2-1}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{2}{e^2-1}=\frac{1}{x}\Rightarrow x=\frac{e^2-1}{2}.$$

Ese es el valor de *c*.

48. Demuestra que el valor que verifica el teorema del valor medio para $f(x)=x^2-ax+3$, en el intervalo (1, 4), no depende de *a*. ¿Cuál es ese valor?

Solución:

Hay que hallar el valor de $x\in(1,4)$ que verifica: $\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(x)$.

Por tanto:

$$\frac{19-4a-(4-a)}{3}=2x-a\Rightarrow\frac{15-3a}{3}=2x-a\Rightarrow 15-3a=6x-3a\Rightarrow x=\frac{5}{2}$$, que, obviamente, no depende de *a*.

49. (Propuesto en EBAU 2018, Navarra)

Demuestra que existe $\alpha\in(0,2)$ tal que $f'(\alpha)=1$, siendo

$$f(x)=\sin\left(\frac{\pi+\pi x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\ln\left(2e^x+2x-x^2\right).$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

Solución:

La función dada es continua en el intervalo cerrado [0, 2] y derivable en el abierto (0, 2)*.

Por tanto, cumple el teorema del valor medio (incrementos finitos; de Lagrange), que dice:

Si $f(x)$ es continua en [*a*, *b*] y derivable en (*a*, *b*), entonces existe algún punto $\alpha\in(a,b)$ tal que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\alpha)$.

Como:

$$f(0)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos(0)\cdot\ln\left(2e^0\right)=1\cdot1\cdot\ln 2=\ln 2;$$

$$f(2)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos(\pi)\cdot\ln\left(2e^2+2\cdot2-4\right)=-1\cdot(-1)\ln\left(2e^2\right)=\ln\left(2e^2\right)=\ln 2+2,$$

entonces:

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{\ln 2+2-\ln 2}{2}=1\Rightarrow$$ existe $\alpha\in(0,2)$ tal que $f'(\alpha)=1$.

* Habría que justificar de alguna manera que $f_3(x)=\ln\left(2e^x+2x-x^2\right)$ está definida en [0, 2]; bastaría con comprobar que $2e^x+2x-x^2>0$ cuando $x\geq 0$.

Podría hacerse como sigue:

1) Para $x=0\to 2e^x+2x-x^2$ vale 2;
2) Derivando $2e^x+2x-x^2$ se obtiene $2e^x+2-2x=2\left(2e^x+1-x\right)>0$ para valores de *x* entre 0 y 2. Luego la expresión $2e^x+2x-x^2$ es creciente; y como en *x* = 0 vale 2, siempre será positiva.

50. (Propuesto en EvAU 2017, Castilla–La Mancha)

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+a & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+bx-9 & \text{si } x>2 \end{cases}$

a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo **R**.

b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo [–2, 6].

Solución:

a) El único punto que presenta dudas es $x = 2$.

Continuidad: los límites laterales deben ser iguales.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(x^2+a\right)=4+a\,; \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(-x^2+bx-9\right)=-13+2b$$

Derivabilidad: las derivadas laterales deben ser iguales.

$$\lim_{x\to 2^-} f´(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(2x\right)=4\,; \qquad \lim_{x\to 2^+} f´(x)=\lim_{x\to 2^-}\left(-2x+b\right)=-4+b$$

De $4=-4+b \Rightarrow b=8$.

Sustituyendo en $4+a=-13+2b \Rightarrow 4+a=3 \Rightarrow a=-1$.

La función debe ser: $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{si } x\le 2 \\ -x^2+8x-9 & \text{si } x>2 \end{cases}$.

b) El teorema de Rolle dice:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en el intervalo (a, b), y además $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos, un punto $c \in (a, b)$ tal que $f´(c)=0$.

La función anterior es continua y derivable en todo **R**; en particular en el intervalo [–2, 6].

Como $f(-2)=3$ y $f(6)=-36+48-9=3$, la función verifica las hipótesis de Rolle, luego existe un punto $c \in (-2, 6)$ tal que $f´(c)=0$.

Aplicación al cálculo de límites. Regla de L´Hôpital

51. Aplicando la regla de L´Hôpital halla los siguientes límites:

a) $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$ b) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ c) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}$

Solución:

a) $\displaystyle \lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2-4x+1}{4x^2+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ = (aplicando L´Hôpital) =

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x-8}{8x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L´H)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8}{8}=1.$$

Observación: Para hacer este límite no es necesario aplicar L´Hôpital; basta con comparar los grados.

b) $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1}=\frac{1}{2}$.

Observación: Este límite se resolvió de otra forma en el tema anterior. Puede resultar interesante comparar ambos métodos.

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{-3x}}{4x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=(L\'H)=\lim_{x\to 0}\dfrac{3e^{3x}+3e^{-3x}}{4}=\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$.

52. Halla los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\pi/2}\dfrac{x\sin x}{\sqrt{3-\cos 2x}}$ b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-\cos x}{\sin^2 x}$

<u>Solución</u>:

a) $\lim_{x\to\pi/2}\dfrac{x\sin x}{\sqrt{3-\cos 2x}}=\dfrac{\pi/2\cdot\sin(\pi/2)}{\sqrt{3-\cos\pi}}=\dfrac{\pi/2\cdot 1}{\sqrt{4}}=\dfrac{\pi}{4}$ → No hay indeterminación.

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=(L\'H)=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x\cos x}{\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=(L\'H)=$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x+\cos x-x\sin x}{\cos x}=\dfrac{1+1}{1}=2$.

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-x-\cos x}{\sin^2 x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=(L\'H)=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1+\sin x}{2\sin x\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=(L\'H)=$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x+\cos x}{2\cos x\cos x-2\sin x\sin x}=\dfrac{2}{2}=1$.

53. Calcula:

a) $\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x\cdot\ln x\right)$ b) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{xe^{1/x}}{2}$

<u>Solución</u>:

a) Se trata de una forma indeterminada del tipo [0 · ∞].

$\lim_{x\to 0^+}\left(\sin x\cdot\ln x\right)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}}=\left[\dfrac{-\infty}{\infty}\right]=$ (Ahora puede aplicarse L´Hôpital) =

$=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{-\sin^2 x}{x\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left(L\'H\right)=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{-2\sin x\cos x}{\cos x-x\sin x}=\dfrac{0}{1}=0$.

a) $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{xe^{1/x}}{2}=[0\cdot\infty]$ → se escribe en la forma: $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{xe^{1/x}}{2}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^{1/x}}{\dfrac{2}{x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, y ahora se aplica L´Hôpital: $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^{1/x}}{\dfrac{2}{x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}e^{1/x}}{-\dfrac{2}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^{1/x}}{2}=+\infty$.

54. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$ b) $\lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{e^x}{1-x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$

Solución:

a) Da lugar a una forma indeterminada del tipo [∞ – ∞].

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\text{(Aplicando L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\dfrac{1}{(1+x)^2}}{\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1+x-x}{(1+x)^2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

b) $\lim_{x\to 1^+}\left(\dfrac{e^x}{1-x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$ = [∞ – ∞]. Se hace la operación indicada y …

$$=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{e^x\ln x-x+x^2}{(1-x)\ln x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{e^x\ln x+e^x\cdot\dfrac{1}{x}-1+2x}{-\ln x+\dfrac{1-x}{x}}\right)=\left[\frac{e+1}{0}\right]=\infty.$$

55. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1+x-e^x}{\sin^2 x}$ b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-2x-\cos x}{x\cdot\sin x}$ c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-1\right)^2}{e^{x^2}-1}$

Solución:

a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1+x-e^x}{\sin^2 x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 0}\dfrac{1-e^x}{2\sin x\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=(L´H)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{2\cos^2 x-2\sin^2 x}=-\frac{1}{2}.$$

b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-2x-\cos x}{x\cdot\sin x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 0}\dfrac{2e^{2x}-2+\sin x}{\sin x+x\cdot\cos x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=(L´H)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4e^{2x}+\cos x}{\cos x+\cos x-x\cdot\sin x}=\frac{5}{2}.$$

c) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-1\right)^2}{e^{x^2}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 0}\dfrac{2\left(e^x-1\right)e^x}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^x}{xe^{x^2}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=(L´H)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}-e^x}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}=\frac{2-1}{1+0}=1.$$

56. Calcula:

a) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln(x)}{e^x}$ b) $\lim_{x\to 2^+}\dfrac{-\ln(3-x)}{(2-x)^2}$ c) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$ d) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x^2}}{x}$

Solución:

a) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x\ln(x)}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=(L´H)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)+1}{e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=(L´H)=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1/x}{e^x}=\left[\dfrac{0}{\infty}\right]=0.$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-\ln(3-x)}{(2-x)^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{\dfrac{1}{3-x}}{2(2-x)\cdot(-1)} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] \to +\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2} = +\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2xe^{x^2}}{2} = +\infty$.

57. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)^{1/x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1/2} 3^{1/(2x-1)}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)^{1/x} = [1^\infty] \to$ Aplicando logaritmos se tiene:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(2x+1)^{1/x}\right) = \lim_{x\to 0}\ln(2x+1)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{2x+1}}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Luego $\lim\limits_{x\to 0}(2x+1)^{1/x} = e^2$.

b) $\lim\limits_{x\to 1/2} 3^{1/(2x-1)} = \left[3^{\frac{1}{0}}\right]$. (No es una forma indeterminada). El límite no existe, pero pueden estudiarse los límites laterales, cumpliéndose:

$$\lim_{x\to 1/2^-} 3^{1/(2x-1)} = \left[3^{\frac{1}{0^-}} = 3^{-\infty}\right] = 0\,; \quad \lim_{x\to 1/2^+} 3^{1/(2x-1)} = \left[3^{\frac{1}{0^+}} = 3^{+\infty}\right] = +\infty$$

58. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x - 2\sin x)^{1/2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{2/\sin x}$

Solución:

a) Es una forma indeterminada: $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x - 2\sin x)^{1/2x} = [1^\infty]$.

Aplicando logaritmos se tiene:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(\cos x - 2\sin x)^{1/2x}\right) = \lim_{x\to 0}\ln\left((\cos x - 2\sin x)^{1/2x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x}\ln(\cos x - 2\sin x) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x - 2\sin x)}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \text{(aplicando L´Hôpital)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x - 2\cos x}{\cos x - 2\sin x}}{2} = -1$$

Por tanto,

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x - 2\sin x)^{1/2x} = e^{-1}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{2/\sin x} = [1^\infty]$. Aplicando logaritmos:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{2/\sin x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln(\cos x)^{2/\sin x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\sin x}\ln(\cos x) = [\infty\cdot 0] =$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2\ln(\cos x)}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-2\sin x}{\cos x}}{\cos x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-2\sin x}{\cos^2 x} = \frac{0}{2} = 0$$

El límite pedido vale: $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos x)^{2/\sin x} = e^0 = 1$.

59. Calcula, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{x^2} = [0^0] \to$ se aplican neperianos:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\ln(\sin x)^{x^2} = \lim_{x\to 0^+}x^2\ln(\sin x) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= (L'H) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3\cos x}{-2\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L'H) = \lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2\cos x - x^3\sin x}{2\cos x} = 0$$

Por tanto, $\lim\limits_{x\to 0^+}(\sin x)^{x^2} = e^0 = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \left[\infty^0\right]$.

Aplicando logaritmos:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x\right) = \lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}{1/x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= (L'H) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+2/x}\cdot\left(\frac{-2}{x^2}\right)}{-1/x^1} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x+2} = 0.$$

Por tanto: $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = e^0 = 1$.

60. Halla los valores de a y b para que los infinitésimos en $x = 1$, $f(x) = \dfrac{x-1}{ax}$ y $g(x) = \dfrac{x^2-1}{bx^2}$, sean equivalentes.

Solución:

Dos infinitésimos son equivalentes si $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Luego:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x-1}{ax}}{\dfrac{x^2-1}{bx^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)bx^2}{ax(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{bx^2}{ax(x+1)}=\frac{b}{2a}=1\Rightarrow b=2a.$$

61. Determina el valor de p para que los infinitésimos, en $x = 1$, $f(x)=px\ln x$ y $g(x)=x-e^{1-x}$ sean equivalentes.

Solución:

Debe cumplirse que $\lim_{x\to 1}\dfrac{px\ln x}{x-e^{1-x}}=1$.

Luego:

$$\lim_{x\to 1}\frac{px\ln x}{x-e^{1-x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to 1}\frac{p\ln x+p}{1+e^{1-x}}=\frac{p}{2}=1\Rightarrow p=2.$$

62. ¿Existe algún valor de x en el que las funciones $f(x)=x^2-p^2$ y $g(x)=x^2+(1-p)x-p$, sean infinitésimos del mismo orden?

Solución:

$f(x)=x^2-p^2$ es un infinitésimo cuando $x\to \pm p$, pues $\lim_{x\to\pm p}\left(x^2-p^2\right)=0$.

$g(x)=x^2+(1-p)x-p$ es infinitésimo cuando $x\to p$, pues

$$\lim_{x\to p}\left(x^2+(1-p)x-p\right)=p^2+(1-p)p-p=0.$$

Para que sean infinitésimos del mismo orden debe cumplirse que $\lim_{x\to p}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k\neq 0,\ \infty$.

Se tiene:

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to p}\frac{x^2-p^2}{x^2+(1-p)x-p}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L'H)=\lim_{x\to p}\frac{2x}{2x+1-p}=\frac{2p}{p+1}.$$

Como:

1) $\dfrac{2p}{p+1}=0$ si $p = 0$ y 2) $\dfrac{2p}{p+1}=\infty$ (no está definido) si $p = –1$,

se deduce que $f(x)=x^2-p^2$ y $g(x)=x^2+(1-p)x-p$ serán infinitésimos del mismo orden en $x = p$ siempre que $p\neq 0$ y $–1$.

Falta considerar el caso $x = –p$ en $g(x)=x^2+(1-p)x-p$. ¿Podría ser un infinitésimo?

Debe cumplirse que $g(-p)=(-p)^2+(1-p)(-p)-p=0\ \Rightarrow\ 2p^2-2p=0\ \Rightarrow p=0$ o $p = 1$.

El caso $p = 0$ ha quedado descartado antes.

Lo mismo sucede con $p = 1$, pues si $p = 1$, $x = –p = –1$, que también se ha descartado.

Otras aplicaciones de los límites

63. ¿Qué valor hay que asignar a p para que la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x} & \text{si } x\neq 0\\ p & \text{si } x=0\end{cases}$ sea continua en x = 0.

Solución:

Para que $f(x)$ sea continua en x = 0 debe cumplirse que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=p\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{senx}\right)=p$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x-x}{x\sin x}\right)=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=0.$$

Por tanto, p = 0.

64. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2}$.

Solución:

El dominio de la función es **R** – {1, 2}. Por tanto, en las abscisas x = 1 y x = 2 puede haber asíntotas verticales.

En x = 1: Aplicando la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{2x-3}=\frac{1}{-1}=-1 \Rightarrow \text{No hay asíntota vertical.}$$

En x = 2:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2}=\frac{\sin 1}{0}=\infty \Rightarrow \text{La recta } x = 2 \text{ es asíntota vertical}$$

Además, hay una asíntota horizontal, pues $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2}=0$, ya que el numerador está acotado, mientras que el denominador se hace arbitrariamente grande. La asíntota es la $y=0$.

65. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x}$. Indica también la posición de la curva respecto de las asíntotas.

Solución:

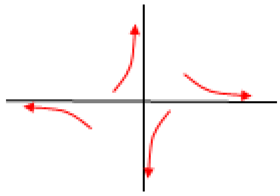
En x = 0 puede haber una asíntota vertical, pues en ese punto se anula el denominador.

Como $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x^2}{x}=\left[\dfrac{-\infty}{0}\right]=\infty \Rightarrow$ La recta x = 0 es una asíntota vertical.

Si $x\to 0^-$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln x^2}{x}=\left[\dfrac{-\infty}{0^-}\right]=+\infty$. Si $x\to 0^+$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x^2}{x}=\left[\dfrac{-\infty}{0^+}\right]=-\infty$.

Como $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x^2}{x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2/x}{1}=0 \Rightarrow$ La recta y = 0 es una asíntota horizontal.

Si $x \to -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln x^2}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2/x}{1} = 0^-$. La curva va por debajo del eje *OX*.



Si $x \to +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2/x}{1} = 0^+$. La curva va por encima del eje *OX*.

66. Dependiendo de los valores de *p*, estudia la continuidad de la función dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^x - 1}{px} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{\cos x}{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:
El único punto en el que puede ser discontinua es en $x = 0$.
Para que una función sea continua en $x = 0$ es necesario que los límites laterales existan y sean iguales.
Por la izquierda:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2^x - 1}{px} = \left[\frac{0}{0}\right] = \text{(aplicando la regla de L´Hôpital)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2^x \ln 2}{p} = \frac{\ln 2}{p}.$$

Por la derecha:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x^2 + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Será continua cuando $\frac{\ln 2}{p} = 1 \Rightarrow p = \ln 2$.