TEMA 7 – GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

ÁNGULOS

EJERCICIO 15 :

Dados las rectas $r: \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 3-3\lambda, \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$ $s: \begin{cases} 3x-2y-z=0 \\ 4x+y+3z-1=0 \end{cases}$ **y el plano** $\pi: 4x+y+z-3=0;$

calcula el ángulo que forman:

a) ***r* y *s*** **b) *s* y π**

Solución:

a) Hallamos el vector director de s: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-5,-13,11)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{v_r \cdot v_s}{|v_r|\cdot|v_s|} = \dfrac{(1,-3,2).(-5,-13,11)}{\sqrt{1+9+4}.\sqrt{25+169+121}}\dfrac{-5+39+22}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{315}} = \dfrac{56}{\sqrt{4\,410}} \approx 0{,}843 \quad \rightarrow \quad \alpha = 32^{o}\ 30'\ 45''$

b) $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{|v_s \cdot \vec{n}_\pi|}{|v_s|\cdot|\vec{n}\pi|} = \dfrac{|(-5,-13,11).(4,1,1)}{\sqrt{25+169+121}\sqrt{16+1+1}}\dfrac{|-20-13+11|}{\sqrt{315}\cdot\sqrt{18}} = \dfrac{22}{\sqrt{5\,670}} \approx 0{,}292 \quad \rightarrow \alpha = 16^{o}\ 59'\ 16''$

EJERCICIO 16 : Considera los planos π: 2*x* + *ay* + 4*z* - 1 = 0 y σ: *ax* + 2*y* + 4*z* - 3 = 0.

a) Calcula el ángulo que forman π y σ cuando *a* = 1.

b) Halla *a* para que π y σ sean paralelos.

c) Determina el valor de *a* para que σ y σ sean perpendiculares.

Solución:

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$ Un vector normal a π es $\vec{n}_1(2,\ 1,\ 4)$. Un vector normal a σ es $\vec{n}_2(1,\ 2,\ 4)$.

$\cos\alpha = \dfrac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \dfrac{2+2+16}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{21}} = \dfrac{20}{21} \approx 0{,}952 \quad \rightarrow \quad \alpha = 17^{o}\ 45'\ 10''$

b) Sus vectores normales han de ser proporcionales: $\dfrac{2}{a} = \dfrac{a}{2} = \dfrac{4}{4} \quad \rightarrow \quad a = 2$

c) Sus vectores normales han de ser perpendiculares: (2,*a*,4)·(*a*,2,4) = 2*a* + 2*a* + 16 = 4*a* + 16 = 0 ⇒ *a* = -4

EJERCICIO 17 : Dados las rectas $r: \begin{cases} 2x-3y+z-2=0 \\ -3x+2y+2z+1=0 \end{cases}$ **y** $s: \begin{cases} x = 3-2\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{cases}$ **y el punto** $P(1,\ 0,\ -5);$

calcula el ángulo que forma la recta *r* con el plano, π, perpendicular a *s* que pasa por *P*.

Solución: $\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{\vec{d}\cdot\vec{n}}{|\vec{d}|\cdot|\vec{n}|}$

- Un vector dirección de *r* es: $\vec{d}_r = (2,\ -3,\ 1)\times(-3,\ 2,\ 2) = (-8,\ -7,\ -5)\ //\ (8,\ 7,\ 5) = \vec{d}$

- Un vector normal al plano π es: $\vec{n} = \vec{d}_s = (-2,\ 1,\ 2)$

$\operatorname{sen}(\alpha) = \dfrac{\vec{d}\cdot\vec{n}}{|\vec{d}|\cdot|\vec{n}|} = \dfrac{-16+7+10}{\sqrt{138}\cdot\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3\sqrt{138}} \approx 0{,}028 \quad \rightarrow \alpha = 1^{o}\ 37'\ 34''$

DISTANCIAS

EJERCICIO 18 : Calcula la distancia entre las rectas: $r: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{-2}$ **y** $s: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases}$

Solución: $\text{dist}(r,\ s) = \dfrac{|\,[v_r,\ v_s,\ \overrightarrow{P_rP_s}]\,|}{|\,v_r \times v_s\,|}$

Buscamos un punto y un vector dirección de cada recta:

Recta r: Punto: P_r (2,-1,0) Vector: $\vec{v}_r$ (1,3,-2)

Recta s: Punto: P_s (1,0,-1) Vector: $\vec{v}_s$ (1,2,1)

$$\overrightarrow{P_rP_s}(-1, 1, -1) \Rightarrow [v_r,\ v_s,\ \overrightarrow{P_rP_s}] = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9$$

$$v_r \text{ x } v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7i - 3j - k = (7,-3,-1)$$

$$\text{dist}(r,\ s) = \frac{|\,[v_r,\ v_s,\ \overrightarrow{P_rP_s}]\,|}{|\,v_r \times v_s\,|} = \frac{|-9|}{\sqrt{49+9+1}} = \frac{9}{\sqrt{59}} \approx 1{,}17u$$

EJERCICIO 19 : Calcula la distancia entre las rectas: $r: \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{4} = \dfrac{z+1}{0}$ **y** $s: \begin{cases} x = -5+\lambda \\ y = 2-\lambda \\ z = 3+4\lambda \end{cases}$

Solución: $\text{dist}(r,\ s) = \dfrac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\ v_r,\ v_s]|}{|\,v_r \times v_s|}$

- En la recta r: $P_r(-1,\ 2,\ -1)$; $v_r(3,\ 4,\ 0)$
- En la recta s: $P_s(-5,\ 2,\ 3)$; $v_s(1,\ -1,\ 4)$
- $\overrightarrow{P_rP_s}(-4,\ 0,\ 4) \Rightarrow [\overrightarrow{P_rP_s},\ v_r,\ v_s] = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -92$
- $|\,v_r \times v_s| = |\,(3,\ 4,\ 0) \times (1,\ -1,\ 4)\,| = |\,(16,\ -12,\ -7)\,| = \sqrt{16^2 + (-12)^2 + (-7)^2} = \sqrt{449}$

Por tanto: $\text{dist}(r,\ s) = \dfrac{92}{\sqrt{449}} \approx 4{,}34$

EJERCICIO 20 : Dados el punto $P(2,\ 0,\ -3)$**, la recta** $r: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -3+\lambda \\ z = 2-2\lambda \end{cases}$ **y el plano** $\pi: x + 2y + 2z - 1 = 0$**,**

calcula la distancia entre: a) ***P* y** π **b)** ***P* y *r***

Solución:

a) $dist(P,\ \pi) = \dfrac{|2+0-6-1|}{\sqrt{1+4+4}} = \dfrac{5}{3} \approx 1{,}67$

b) dist (P,r) = $\dfrac{|P_rPxv_r|}{|v_r|}$

- Hallamos un punto y un vector dirección de la recta *r* : $P_r(2,\ -3,\ 2)$; $v_r(1,\ 1,\ -2)$
- $|\overrightarrow{P_rP} \times v_r| = |\,(0,\ 3,\ -5) \times (1,\ 1,\ -2)\,| = |\,(-1,\ -5,\ -3)\,| = \sqrt{1+25+9} = \sqrt{35}$
- $|\,v_r| = |\,(1,\ 1,\ -2)\,| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$ $\Rightarrow$ Por tanto: $\text{dist}(P,\ r) = \dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{6}} \approx 2{,}42$

EJERCICIO 21 : Calcula la distancia del punto $P(3,\,1,\,-2)$ a la recta $r: \begin{cases} x-2y-z+5=0 \\ 2x+3y+z+1=0 \end{cases}$.

Solución: dist (P,r) = $\dfrac{|\overrightarrow{P_rP} x v_r|}{|v_r|}$

- Hallamos un punto y un vector de r (pasamos la recta a paramétricas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & 7 & 3 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} y=\alpha \\ z=\dfrac{9-7\alpha}{3} \\ x=\dfrac{-6-\alpha}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-6-\alpha}{3} \\ y=\alpha \\ z=\dfrac{9-7\alpha}{3} \end{cases}$$

Punto (-2,0,3) Vector (-1/3,1,-7/3)||(-1,3,-7)

$$\left|\overrightarrow{P_rP} \times dv_r\right| = \left|(5,\,1,\,-5)\times(-1,\,3,-7)\right| = \left|(8,\,40,\,16)\right| = \sqrt{1\,920} \qquad |dv_r| = \left|(-1,3,-7)\right| = \sqrt{59}$$

Por tanto: $\text{dist}(P,\,r) = \dfrac{\sqrt{1\,920}}{\sqrt{59}} \approx 5{,}70$

EJERCICIO 22 : Halla la distancia de la recta $r: \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}$ al plano $\pi: 2x+y=4$.

Solución: d(r,π) = d(P_r,π)

P_r (-1,2,3) π: 2x + y – 4 = 0

d(r,π) = d(P_r, π) = $\dfrac{|2.(-1)+2-4|}{\sqrt{4+1+0}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} \approx 1{,}79$ u

LUGARES GEOMÉTRICOS

EJERCICIO 23 : Halla el lugar geométrico de los puntos, *P*, tales que la distancia de *P* a *A* sea igual al triple de la distancia de *P* a *B*, siendo *A* (1, 0, 0) y *B* (1, 0, 0).

Solución:

Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que: *dist* (*P*, *A*) = 3 *dist* (*P*, *B*), es decir:

$\sqrt{(x+1)^2+y^2+z^2} = 3\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2} \Rightarrow (x+1)^2+y^2+z^2 = 9\,[(x-1)^2+y^2+z^2]$

$x^2+2x+1+y^2+z^2 = 9\,[x^2-2x+1+y^2+z^2] \Rightarrow 8x^2+8y^2+8z^2-20x+8=0$

EJERCICIO 24 : Obtén el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos π: 3*x* - 2*y* + 4*z* - 1 = 0 y σ: 4*x* + 2*y* - 3*z* + 2 = 0.

Solución: Si *P* (*x*, *y*, *z*) es un punto del lugar geométrico, tenemos que: *dist* (*P*, π) □ *dist* (*P*, →), es decir:

$\dfrac{|3x-2y+4z-1|}{\sqrt{29}} = \dfrac{|4x+2y-3z+2|}{\sqrt{29}} \Rightarrow |3x-2y+4z-1| = |4x+2y-3z+2| \Rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x-2y+4z-1=4x+2y-3z+2 \;\rightarrow\; x+4y-7z+3=0 \\ 3x-2y+4z-1=-4x-2y+3z-2 \;\rightarrow\; 7x+z+1=0 \end{cases}$$

EJERCICIO 25 : Dados los puntos *A* (-1, 0) y *B* (1, 0), halla el lugar geométrico de los puntos, *P*, del plano tales que el cociente de distancias: $\dfrac{\text{dist}(P,\,A)}{\text{dist}(P,\,B)}$ sea igual a 1. Identifica la figura resultante.

Solución: Si *P* (*x*, *y*) es un punto del lugar geométrico, tenemos que:

$\dfrac{\text{dist}(P,\,A)}{\text{dist}(P,\,B)} = 1 \;\rightarrow\; \text{dist}(P,\,A) = \text{dist}(P,\,B) \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2} \;\rightarrow\; (x+1)^2+y^2 = (x-1)^2+y^2$

$x^2+2x+1+y^2 = x^2-2x+1+y^2 \Rightarrow 4x=0 \;\Rightarrow\; x=0 \Rightarrow$

Es la ecuación del eje *Y*, que en este caso es la mediatriz del segmento *AB*.

EJERCICIO 26 : Halla el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de *A* (2, 1, -5) y *B* (6, 0, 3). ¿Qué figura obtienes?

Solución: Si $P(x, y, z)$ es un punto del lugar geométrico, tenemos que: *dist* (*P*, *A*) = *dist* (*P*, *B*)

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+5)^2}=\sqrt{(x-6)^2+y^2+(z-3)^2}$$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 + 10z + 25 = x^2 - 12x + 36 + y^2 + z^2 - 6z + 9 \Rightarrow 8x - 2y + 16z - 15 = 0$

Es el plano mediador del segmento AB (es perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ y pasa por el punto medio de *AB*).

REPASO

EJERCICIO 27 : Halla la posición relativa de las siguientes rectas y escribe la ecuación del plano que las contiene: $r:\begin{cases}x=-1+2\lambda\\ y=3\lambda\\ z=2-\lambda\end{cases}$ $\quad s:\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{6}=\dfrac{z}{-2}$

Solución:

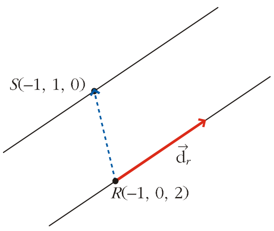
- Posición relativa de las rectas : Pasamos las rectas a paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r:\begin{cases}x=-1+2\lambda\\ y=3\lambda\\ z=2-\lambda\end{cases};\quad s:\begin{cases}x=-1+4\alpha\\ y=1+6\alpha\\ z=-2\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\lambda-4\alpha=0\\ 3\lambda-6\alpha=1\\ -\lambda+2\alpha=-2\end{cases}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&-2&0\\-1&-2&-2\\3&-6&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&-1\\0&-4&-2\\0&0&1\end{array}\right)$$

Rango A = 2 ≠ Rango A* = 3 ⇒ Sistema Incompatible. No existe solución: Paralelas o se cruzan.

Hallamos los vectores directores: $\vec{v}_r = (2, 3, -1)$, $\vec{v}_s = (4, 6, -2)$ ⇒ Los vectores son paralelos porque son proporcionales ⇒ Las rectas son PARALELAS

- Ecuación del plano que las contiene : Necesitamos un punto y dos vectores: P_r, v_r, P_rP_s



Recta r: P_r (-1,0,2)

Recta s: P_s(-1,1,0) $\quad v_r = (2,3,-1)$

$P_rP_s = (0,1,-2)$

Ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix}x+1&y-0&z-2\\2&3&-1\\0&1&-2\end{vmatrix}=0\Rightarrow-5(x+1)+4y+2(z-2)=0\Rightarrow-5x+4y+2z-9=0$$

EJERCICIO 28

a) Escribe la ecuación del plano, π, perpendicular a la recta $r:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$, **que pase por *P* (1, 2, -1).**

b) Calcula la distancia del punto *P* a la recta *r*.

Solución:

a) Un vector normal al plano será el vector dirección de la recta r: $v_r = \vec{n}_\pi = (2,-2,1)$

La ecuación del plano será: $2x – 2y + z + D = 0$

Sustituimos el punto P(1,2,-1) y obtenemos D: $2 - 4 – 1 + D = 0 \Rightarrow D = 3$

Solución: π: $2x - 2y + z + 3 = 0$

b) $d(P,r) = \dfrac{|PP_r x v_r|}{|v_r|}$

Hallamos un punto y un vector de r: $P_r(2,-1,1)$ $\quad v_r(2,-2,1)$

Hallamos $PP_r = (1,-3,2)$

$$PP_r \times v_r=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&-3&2\\2&-2&1\end{vmatrix}=i+3j+4k=(1,3,4)\Rightarrow d(P,r)=\frac{|PP_r x v_r|}{|v_r|}=\frac{\sqrt{1+9+16}}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{\sqrt{26}}{3}\approx 1{,}7u$$

EJERCICIO 29
a) Calcula el valor de *m* para que los puntos *P*(1, 2, -1), *Q*(0, -1, 2), *R*(3, 1, -1) y *S*(*m*, 2, 1) sean coplanarios, y escribe la ecuación del plano que los contiene.
b) Obtén un punto simétrico de *A*(1, -1, 1) respecto del plano anterior.

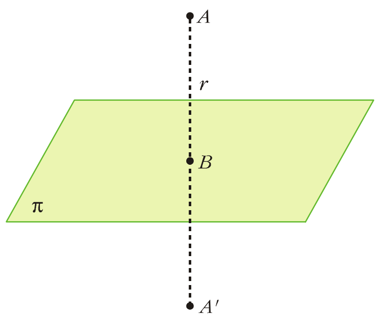
Solución:
a) Escribimos la ecuación del plano, π, que contiene a los puntos *P*(1, 2, -1), *Q*(0, -1, 2) y *R*(3, 1, -1):

$$P(1,2,-1),\ \overrightarrow{PQ}(-1,-3,3),\ \overrightarrow{PR}(2,-1,0) \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3(x-1)+6(y-2)+7(z+1)=0$$

$$3x+6y+7z-8=0$$

Hallamos el valor de *m* para que *S*(*m*, 2, 1) ∈ π : 3m + 12 + 7 – 8 = 0 ⇒ $m = \frac{-11}{3}$

b) (1) Obtenemos la recta, *r*, que pasa por *A* y es perpendicular a π: $r: \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = -1+6\lambda \\ z = 1+7\lambda \end{cases}$



(2) Buscamos el punto, *B*, de intersección de *r* y π:
3(1 + 3λ) + 6(-1 + 6λ) + 7(1 + 7λ) - 8 = 0

$$94\lambda = 4 \rightarrow \lambda = \frac{4}{94} = \frac{2}{47} \rightarrow B\left(\frac{53}{47}, \frac{-35}{47}, \frac{61}{47}\right)$$

(3) Si *A*'(*x*, *y*, *z*) es el simétrico de *A* respecto de A´, *B* es el punto medio de *AA*': $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-1}{2}, \frac{z+1}{2}\right) = \left(\frac{53}{47}, \frac{-35}{47}, \frac{61}{47}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x+1}{2} = \frac{53}{47} \rightarrow x = \frac{59}{47} \\ \frac{y-1}{2} = \frac{-35}{47} \rightarrow y = \frac{-23}{47} \\ \frac{z+1}{2} = \frac{61}{47} \rightarrow z = \frac{75}{47} \end{array}\right\} \rightarrow A'\left(\frac{59}{47}, \frac{-23}{47}, \frac{75}{47}\right)$$

EJERCICIO 30 : Halla la ecuación de la perpendicular común a las rectas:

$$\boldsymbol{r: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{-1}} \quad \textbf{y} \quad \boldsymbol{s: \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = -2+\lambda \\ z = 3+\lambda \end{cases}}$$

Solución:
- Un punto genérico de *r* es *R*(-1 + μ, 2 + 2μ, 3 - μ).
- Un punto genérico de *s* es *S*(1 + λ, -2 + λ, 3 + λ).

Un vector genérico de origen en *r* y extremo en *s* es: $\overrightarrow{RS}(\lambda-\mu,\ \lambda-2\mu-4,\ \lambda+\mu)$
Este vector debe ser perpendicular a *r* y a *s*:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS}\cdot\vec{d}_r = \overrightarrow{RS}\cdot(1,2,-1) = 0 \rightarrow 2\lambda-6\mu-8=0 \\ \overrightarrow{RS}\cdot\vec{d}_s = \overrightarrow{RS}\cdot(1,1,1) = 0 \rightarrow 3\lambda-2\mu-4=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda = \frac{4}{7} \\ \mu = \frac{-8}{7} \end{array}$$

$$\text{Así: } R\left(\frac{-15}{7}, \frac{-2}{7}, \frac{29}{7}\right);\ S\left(\frac{-3}{7}, \frac{-10}{7}, \frac{25}{7}\right)$$

$$\overrightarrow{RS}\left(\frac{12}{7}, \frac{-8}{7}, \frac{-4}{7}\right) // (3,-2,-1)$$

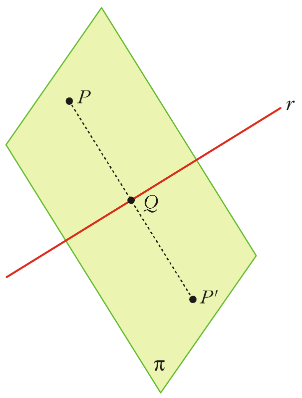
Por tanto, las ecuaciones de la perpendicular común son: $P:\begin{cases} x = \dfrac{-15}{7} + 3\lambda \\ y = \dfrac{-2}{7} - 2\lambda \\ z = \dfrac{29}{7} - \lambda \end{cases}$

<u>EJERCICIO 31</u> : Averigua las coordenadas del punto simétrico de *P*(3, 4, -1) respecto de la recta $r:\begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$; **y calcula la distancia de *P* a *r*.**

Solución:

(1) Hallamos la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r:

$$n_\pi = v_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1,-4,-7) \parallel (1,4,7) \Rightarrow x + 4y + 7z + D = 0 \Rightarrow 3 + 16 - 7 + D = 0 \Rightarrow D = -12$$



$\pi : x + 4y + 7z - 12 = 0$

(2) Resolvemos el sistema entre la recta y el plano (Para ello pasamos la recta a paramétricas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} z = \alpha \\ y = \dfrac{3+4\alpha}{7} \\ x = \dfrac{6+8\alpha}{7} - \alpha = \dfrac{6+\alpha}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6+\alpha}{7} \\ y = \dfrac{3+4\alpha}{7} \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\frac{6+\alpha}{7} + \frac{12+16\alpha}{7} + 7\alpha - 12 = 0 \Rightarrow 6 + \alpha + 12 + 16\alpha + 49\alpha - 84 = 0 \Rightarrow \alpha = 66/66 = 1$$

Q(1,1,1)

(3) Si llamamos $P'(x, y, z)$ al simétrico de P, entonces Q es el punto medio de PP':

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{2} = 1 \rightarrow x = -1 \\ \dfrac{y+4}{2} = 1 \rightarrow y = -2 \\ \dfrac{z-1}{2} = 1 \rightarrow z = 3 \end{array}\right\} P'(-1, -2, 3)$$

- La distancia de P a r es igual a la distancia de P a Q:

$$dist(P, r) = dist(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = |(-2, -3, 2)| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17} \approx 4{,}12$$

<u>EJERCICIO 32</u> :

a) Halla la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{1}$ **y es perpendicular al plano** **π: 2*x* + *y* + *z* - 2 = 0.**

b) Calcula el ángulo que forman la recta *r* y el plano π.

Solución:

a) Necesitamos un punto y dos vectores: $P_r(1,-2,0)$, $v_r(3,-1,1)$, $n_\pi(2,1,1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x-1) - (y+2) + 5z = 0 \Rightarrow -2x - y + 5z = 0$$

b) $\text{sen}(\alpha) = \dfrac{\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{n}_\pi|} = \dfrac{(3,-1,1).(2,1,1)}{\sqrt{9+1+1}\sqrt{4+1+1}} \dfrac{6-1+1}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{6}} = \dfrac{6}{\sqrt{66}} \rightarrow \alpha = 47^o\ 36'\ 29''$

<u>EJERCICIO 33</u> : Determina la posición relativa de las rectas *r* y *s*, y calcula la mínima distancia entre ellas: $\mathbf{r : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 \\ z = -1 + 6\lambda \end{cases}}$ $\quad \mathbf{s : \dfrac{x-6}{1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z+1}{3}}$

Solución:

a) Posición relativa: Pasamos las rectas a paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 \\ z = -1 + 6\lambda \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 6 + \alpha \\ y = -2 \\ z = -1 + 3\alpha \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \\ 6 & -3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{Sistema Incompatible (Paralelas o se cruzan)}$$

Hallamos los vectores directores: $\vec{v}_r(2,0,6)$, $\vec{v}_s(1,0,3) \Rightarrow$ Proporcionales $\Rightarrow$ Son paralelas.

b) Como son paralelas d(r,s) = d(P_r,s) = $\dfrac{|P_rP_s x v_s|}{|v_s|}$

$P_r(2,3,-1)$, $P_s(6,-2,-1)$, $\vec{v}_s(1,0,3) \Rightarrow P_rP_s = (4,-5,0)$

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{P_rP_s} \times v_s|}{|v_s|} = \frac{|(4,-5,0)\times(1,0,3)|}{|(1,0,3)|} = \frac{|(-15,-12,5)|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{394}}{\sqrt{10}} \approx 6{,}28$$

<u>EJERCICIO 34</u> : El plano π: 2*x* + *y* + 4*z* + 8 = 0 corta a los ejes coordenados en tres puntos; *A*, *B* y *C*. Halla el área del triángulo con vértices en esos tres puntos.

Solución:

Obtenemos los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados:

- Con el eje *X* : $y = z = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow$ Punto *A* (-4, 0, 0)
- Con el eje *Y* : $x = z = 0 \Rightarrow y = -8 \Rightarrow$ Punto *B* (0, -8, 0)
- Con el eje *Z* : $x = y = 0 \Rightarrow z = -2 \Rightarrow$ Punto *C* (0, 0, -2)

$\overrightarrow{AB}(4,-8,0)$; $\overrightarrow{AC}(4,0,-2)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(16,8,32)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16^2+8^2+32^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1\,344} \approx 18{,}33\ u^2$$

<u>EJERCICIO 35</u> :

a) Escribe la ecuación del plano, π, que pasa por los puntos *P* (2, 1, -1), *Q* (1, 0, 3) y *R* (-3, 1, 1).

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

Solución:

a) Necesitamos un punto P(2,1,-1) y dos vectores PQ(-1,-1,4), PR(-5,0,2)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -1 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x-2) - 18(y-1) - 5(z+1) = 0 \Rightarrow -2x - 18y - 5z + 17 = 0$$

b) Hallamos los puntos de corte de □ con los ejes coordenados:

$$-\text{Con el eje } X \rightarrow y = z = 0 \rightarrow x = \frac{17}{2} \rightarrow \text{Punto } A\left(\frac{17}{2}, 0, 0\right)$$

$$-\text{Con el eje } Y \rightarrow x = z = 0 \rightarrow y = \frac{17}{18} \rightarrow \text{Punto } B\left(0, \frac{17}{18}, 0\right)$$

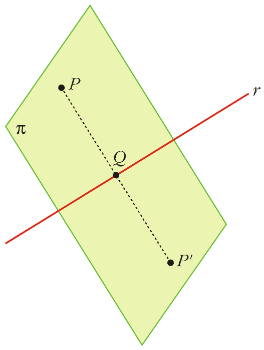
$$-\text{Con el eje } Z \rightarrow x = y = 0 \rightarrow z = \frac{17}{5} \rightarrow \text{Punto } C\left(0, 0, \frac{17}{5}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\left(-\frac{17}{2}, \frac{17}{18}, 0\right);\ \overrightarrow{AC}\left(-\frac{17}{2}, 0, \frac{17}{5}\right)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\left(\frac{289}{90}, \frac{289}{10}, \frac{289}{36}\right)\right| \approx 15{,}08 \text{ u}^2$$

EJERCICIO 36 : Halla el punto simétrico de $P(-2, 1, 5)$ respecto a la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-1}{1}$.

Solución:



[1] Hallamos la ecuación del plano, π, que pasa por P y es perpendicular a r :
x – 2y + z + D = 0 ⇒ -2 -2 + 5 + D = 0 ⇒ D = -1 ⇒ x – 2y + z – 1 = 0

[2] Hallamos el punto, Q, de intersección de r y π:

$$r:\begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -3-2\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \qquad \begin{array}{l} (2+\lambda)-2(-3-2\lambda)+(1+\lambda)-1=0 \\ 2+\lambda+6+4\lambda+1+\lambda-1=0 \\ 6\lambda+8=0 \quad\rightarrow\quad \lambda=\frac{-8}{6}=\frac{-4}{3} \end{array} \qquad \Rightarrow Q\left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

[3] El punto Q es el punto medio de PP', siendo P' el simétrico de P respecto a r : Si $P'(x, y, z)$:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x-2}{2} = \frac{2}{3} \quad\rightarrow\quad x = \frac{10}{3} \\ \frac{y+1}{2} = \frac{-1}{3} \quad\rightarrow\quad y = \frac{-5}{3} \\ \frac{z+5}{2} = \frac{-1}{3} \quad\rightarrow\quad z = \frac{-17}{3} \end{array}\right\} P'\left(\frac{10}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{-17}{3}\right)$$

EJERCICIO 37 : Determina la posición relativa de las rectas:

$$\mathbf{r:\begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} \quad y \quad s: \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2};}$$ **y halla la ecuación de la perpendicular común.**

Solución:

- Pasamos las rectas a paramétricas y resolvemos el sistema:

$$r:\begin{cases} x = 2-\lambda \\ y = 3+2\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} \quad y \quad s:\begin{cases} x = -2+3\alpha \\ y = 1+\alpha \\ z = 1+2\alpha \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -4 \\ 0 & -7 & -10 \\ 0 & -5 & -2 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -3 & -4 \\ 0 & -7 & -10 \\ 0 & 0 & 36 \end{array}\right)$$

Rango A = 2 ≠ Rango A^* = 3 ⇒ Sistema incompatible ⇒ Se cruzan o son paralelas

Hallamos los vectores directores: $\vec{v}_r(-1,2,1)$ $\vec{v}_s(3,1,2)$ ⇒ No son proporcionales ⇒ SE CRUZAN

- Perpendicular común:

Un punto genérico de r es $P_r(2 - \lambda, 3 + 2\lambda, -1 + \lambda)$.

Un punto genérico de s es $P_s(-2 + 3\alpha, 1 + \alpha, 1 + 2\alpha)$

El vector $P_rP_s = (-4 + 3\alpha + \lambda, -2 + \alpha - 2\lambda, 2 + 2\alpha - \lambda)$ es perpendicular a v_r y a v_s :

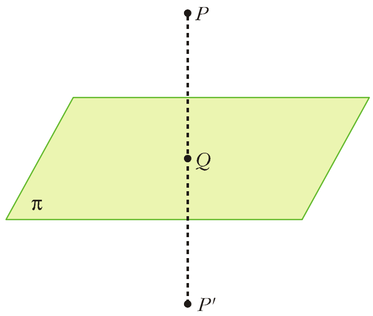
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RS}\cdot\vec{d}_r = 0 \quad\rightarrow\quad -6\lambda+\mu+2=0 \\ \overrightarrow{RS}\cdot\vec{d}_s = 0 \quad\rightarrow\quad -\lambda+14\mu-10=0 \end{array}\right\} \lambda = \frac{38}{83};\ \mu = \frac{62}{83}$$

$$\text{Así}: P_r\left(\frac{128}{83}, \frac{325}{83}, \frac{-45}{83}\right);\ P_s\left(\frac{20}{83}, \frac{145}{83}, \frac{207}{83}\right) \Rightarrow \overrightarrow{P_rP_s}\left(\frac{-108}{83}, \frac{-180}{83}, \frac{252}{83}\right) \,//\, (3, 5, -7)$$

Por tanto, las ecuaciones de la perpendicular común son: $p: \begin{cases} x = \dfrac{128}{83} + 3\lambda \\ y = \dfrac{325}{83} + 5\lambda \\ z = \dfrac{-45}{83} - 7\lambda \end{cases}$

<u>EJERCICIO 38</u> : Obtén el punto simétrico de *P* (2, -1, 3) respecto al plano π: 3*x* + 2*y* + *z* - 5 = 0.

Solución:



[1] Hallamos la ecuación de la recta, *r*, que pasa por *P* y es perpendicular a π: $r: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

[2] Obtenemos el punto, *Q*, de intersección de *r* y π:
3 (2 + 3λ) + 2(-1 + λ) + (3 + λ) – 5 = 0 ⇒

$6 + 9\lambda - 2 + 4\lambda + 3 + \lambda - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad 14\lambda + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\dfrac{1}{7} \Rightarrow$

$Q\left(\dfrac{11}{7}, -\dfrac{9}{7}, \dfrac{20}{7}\right)$

[3] Si llamamos *P '* al simétrico de *P* respecto de π, *Q* es el punto medio de *PP'*:*P'* (*x*, *y*, *z*)

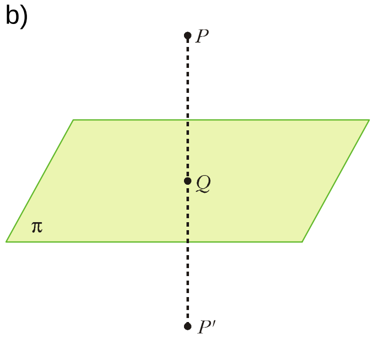
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{11}{7} \quad \rightarrow \quad x = \dfrac{8}{7} \\ \dfrac{y-1}{2} = -\dfrac{9}{7} \quad \rightarrow \quad y = -\dfrac{11}{7} \\ \dfrac{z+3}{2} = \dfrac{20}{7} \quad \rightarrow \quad z = \dfrac{19}{7} \end{array}\right\} P'\left(\dfrac{8}{7}, -\dfrac{11}{7}, \dfrac{19}{7}\right)$$

<u>EJERCICIO 39</u> : Dados el punto *P* (3, 1, -1) y el plano π: 3*x* - *y* - *z* = 2, calcula:
a) La ecuación de la recta que pasa por *P* y es perpendicular a π.
b) El punto simétrico de *P* respecto a π.
c) Ecuación del plano que pasa por *P* y es paralelo a π.

Solución:

a) $r: \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$

b)



[1] Apartado a)

[2] Hallamos el punto, *Q*, de intersección de *r* y π:
3 (3 + 3λ) - (1 - λ) -(-1 - λ) = 2 ⇒ 9 + 9λ - 1 + λ + 1 + λ = 2 ⇒

$11\lambda = -7 \quad \rightarrow \quad \lambda = -\dfrac{7}{11} \Rightarrow Q\left(\dfrac{12}{11}, \dfrac{18}{11}, \dfrac{-4}{11}\right)$

[3] Si *P'* (*x*, *y*, *z*) es el simétrico de *P* respecto a □, *Q* es el punto medio de *PP'*:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x+3}{2}=\frac{12}{11} \to x=-\frac{9}{11} \\ \frac{y+1}{2}=\frac{18}{11} \to y=\frac{25}{11} \\ \frac{z-1}{2}=\frac{-4}{11} \to z=\frac{3}{11} \end{array}\right\} P'\left(\frac{-9}{11},\frac{25}{11},\frac{3}{11}\right)$$

c) Un plano paralelo a π es de la forma $3x - y - z + D = 0$

Como pasa por P(3, 1, -1) $\Rightarrow 9 - 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -9 \Rightarrow 3x - y - z - 9 = 0$

<u>EJERCICIO 40</u> : Dadas las rectas: $\mathbf{r: \begin{cases} x - az = 2 \\ y - z = -3 \end{cases}}$ **y** $\mathbf{s: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{b} = \frac{z}{1}}$**,**

calcula *a* y *b* para que sean ortogonales y coplanarias.

Solución:

Escribimos la recta *r* en paramétricas: $r: \begin{cases} x = 2 + a\lambda \\ y = -3 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\quad P_r(2,\ -3,\ 0);\ dv_r(a,\ 1,\ 1)$ $\quad P_s(1,\ -1,\ 0);\ dv_s(2,\ b,\ 1)$

- Para que sean ortogonales, ha de ser: $v_r \cdot v_s = 0 \quad \to \quad 2a + b + 1 = 0$

- Para que sean coplanarias: $\left[\overrightarrow{P_rP_s},\ v_r,\ v_s\right] = 0 \quad \to \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} = -2a + b + 3 = 0$

Uniendo las dos condiciones anteriores, tenemos que: $\left.\begin{array}{l} 2a + b + 1 = 0 \\ -2a + b + 3 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \end{array}$

<u>EJERCICIO 41</u> : Un cuadrado tiene uno de sus lados sobre la recta

$\mathbf{r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \quad -2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}}$ **y otro sobre** $\mathbf{s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-2}}$ **Calcula el área del cuadrado.**

Solución:

$v_r = (1,\ -2,\ -1)\ //\ v_s = (2,\ -4,\ -2)$. Por tanto las dos rectas son paralelas.

El lado del cuadrado es la distancia entre *r* y *s*.

$$\text{dist}(r,\ s) = \text{dist}(P_r,\ s) = \frac{\left|\overrightarrow{P_rP_s} \times dv_s\right|}{|v_s|} = \frac{|(-10,\ -4,\ -2)|}{\sqrt{4+16+4}} = \frac{\sqrt{120}}{\sqrt{24}} = \sqrt{5} = \text{lado del cuadrado}$$

Por tanto, $\text{Área} = \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5\ u^2$

<u>EJERCICIO 42</u> : Halla la ecuación de la recta *s* que pasa por *P*(2, 0, 1) y corta perpendicularmente a la recta $\mathbf{r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}}$**.**

Solución:

[1] Hallamos el plano, π, perpendicular a r que pasa por P: $2x - y + 2z + D = 0 \Rightarrow 4 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -6$

$2x - y + 2z - 6 = 0$

[2] Hallamos el punto Q de intersección entre r y π: $2(2\alpha + 2) - (-\alpha+1) + 2(2\alpha) - 6 = 0 \Rightarrow 9\alpha - 3 = 0 \Rightarrow$

$\alpha = 1/3 \Rightarrow$ Q ($\left(\frac{2}{3}+2, -\frac{1}{3}+1, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{8}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

[3] La recta pedida pasa por P y Q $\Rightarrow \begin{cases} \text{Punto: } P(2,0,1) \\ \text{Vector: } v = PQ = \left(\frac{8}{3}-2, \frac{2}{3}-0, \frac{2}{3}-1\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) \parallel (2,2,-1) \end{cases}$

Así: $s: \begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = \quad +2\lambda \\ z = 1 \ -\lambda \end{cases}$

<u>EJERCICIO 43</u> : Determina la ecuación de un plano π paralelo al plano de ecuación $2x - y + z + 4 = 0$ y que dista 10 unidades del punto $P(2, 0, 1)$.

Solución:

Un plano paralelo a $2x - y + z + 4 = 0$ es de la forma: π: $2x - y + z + D = 0$

Tenemos que hallar D para que la distancia a P sea 10 u: $\text{dist}(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 + 1 + D|}{\sqrt{4+1+1}} = 10$

$|5+D| = 10\sqrt{6} \begin{cases} 5+D = 10\sqrt{6} & \rightarrow \quad D = 10\sqrt{6}-5 \\ -5-D = 10\sqrt{6} & \rightarrow \quad D = -5-10\sqrt{6} \end{cases}$

Hay dos planos:

$2x - y + z + 10\sqrt{6} - 5 = 0$

$2x - y + z - 10\sqrt{6} - 5 = 0$

<u>EJERCICIO 44</u> : Halla la ecuación de la proyección ortogonal, r', de la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$ sobre el plano π: $x - y + z + 2 = 0$.

Solución:

[1] Hallamos el puntode corte de la recta r y el plano π: $(2\alpha + 1) - (-\alpha) + (\alpha - 2) + 2 = 0 \Rightarrow 4\alpha + 1 = 0$

$\alpha = -1/4 \Rightarrow P_1(1/2, 1/4, -9/4)$

[2] Hallamos otro punto cualquiera de r: $\alpha = 0$ $P_r(1,0,-2)$

[3] Calculamos la recta perpendicular a π que pase por r: $s \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -2+\lambda \end{cases}$

[4] Hallamos el punto P_2 de intersección entre la recta s y el plano π

$(1 + \lambda) - (-\lambda) + (-2 + \lambda) + 2 = 0 \Rightarrow 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -1/3 \Rightarrow P_2(2/3,1/3,-7/3)$

[5] La recta pedida es la que pasa por P_1 y $P_2 \Rightarrow$ r' : $\begin{cases} \text{Punto: } P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{9}{4}\right) \\ \text{Vector: } P_1P_2\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{12}\right) \parallel (2,1,-1) \end{cases} \Rightarrow$ r': $\begin{cases} x = \frac{1}{2}+2\lambda \\ y = \frac{1}{4}+\lambda \\ z = -\frac{9}{4}-\lambda \end{cases}$