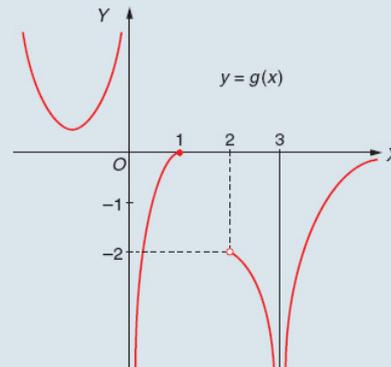
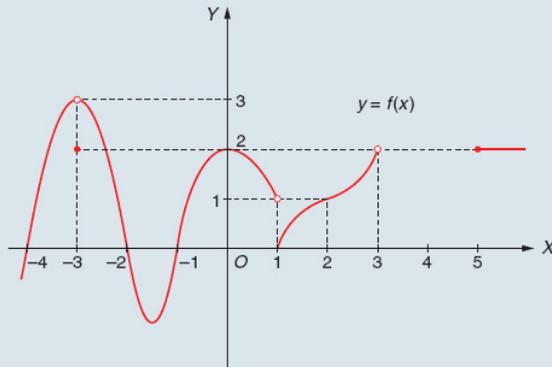


Unidad 9 – Límites de funciones

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Determina, en las siguientes funciones, los datos pedidos:



- | | | | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| • $f(-3)$ | • $f(-2)$ | • $f(0)$ | • $f(4)$ | • $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$ |
| • $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ |
| • $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ | • $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ |

2. Representa gráficamente funciones que satisfagan, respectivamente, las siguientes condiciones:

- $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -2$; $f(-3) = -2$; $\text{Dom } f = \mathbb{R}$; $\text{Im } f = [-3, +\infty)$.
- g estrictamente decreciente en $(0, 6)$; asíntota vertical en $x = 6$; $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -2$; no existe $g(3)$.
- h acotada inferiormente por 2; $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = 2$; asíntota vertical en $x = 2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$.

3. Calcula los siguientes límites:

- | | | |
|--|---|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x^2 + 1} + \frac{3}{x + 2} \right]$ | d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{-x}$ | g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{-x}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^3}$ | e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-2}}{5}$ | h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{3} \right]^x$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x - 1}{x^3 + 3}$ | f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x^5}$ | i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2}}$ |

4. Determina las asíntotas de cada una de las siguientes funciones:

- | | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ | b) $f(x) = \frac{2x^2}{x + 2}$ | c) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ | d) $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^3 - 9x}$ |
|-------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|

5. Halla los puntos de corte de la gráfica de la función $f(x) = \frac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1}$ con su asíntota oblicua.

SOLUCIONES

1. Los datos requeridos son los siguientes:

$$y = f(x)$$

$$f(-3) = 2; f(-2) = 0; f(0) = 2; f(4) \text{ no definida}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 3; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{ no existe}; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ no existe}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

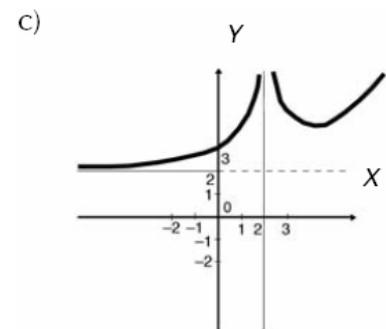
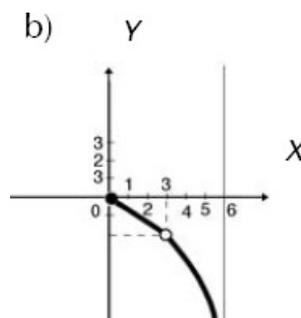
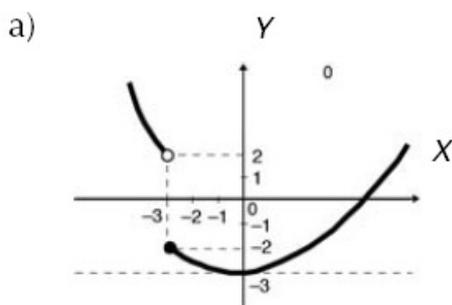
$$y = g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -2; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \text{ no existe}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \text{ no existe}$$

2. Las gráficas quedan:



3. La solución en cada caso es:

- | | | |
|--------------|--------------|--------------|
| a) 0 | b) $+\infty$ | c) $-\infty$ |
| d) 0 | e) $+\infty$ | f) 0 |
| g) $+\infty$ | h) 0 | i) $+\infty$ |

4. Queda:

$$a) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$\text{Asíntotas verticales: } x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = +1} \quad \boxed{x = -1}$$

$$\text{Asíntotas horizontales: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$$

Asíntotas oblicuas: no tiene.

$$b) g(x) = \frac{2x^2}{x+2}$$

$$\text{Asíntotas verticales: } x+2=0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$$

$$\text{Asíntotas horizontales: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x+2} = \pm\infty \text{ no existen.}$$

Asíntotas oblicuas: son rectas de ecuación $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2x^2}{x+2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 2x} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2}{x+2} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x}{x+2} = -4$$

La asíntota oblicua queda $\boxed{y = 2x - 4}$

$$c) h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$$

Asíntotas verticales: no existen.

$$\text{Asíntotas horizontales: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4} = 1 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

Asíntotas oblicuas: no existen.

$$d) f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^3 - 9x}$$

$$\text{Asíntotas verticales: } \boxed{x=0} \quad \boxed{x=3} \quad \boxed{x=-3}.$$

$$\text{Asíntotas horizontales: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3}{x^3 - 9x} = 0 \text{ quedando } \boxed{y=0}$$

5. La solución queda:

La asíntota oblicua tendrá por ecuación $y = mx + b$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - 4x^2}{2x^3 - x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1} - x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-4x^2 + x}{2x^2 - 1} = -2$$

La asíntota oblicua es la recta de ecuación $y = x - 2$

Para hallar los puntos de corte de la asíntota oblicua con la función $f(x)$, resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} y = x - 2 \\ y = \frac{2x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{el punto es } P(2, 0)$$

■ 6. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 6}{x^2 + 3x + 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x + 6}{x^3 + 3x^2 + 2x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{x}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}$

j) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 6x - 9}{x - 3}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 6x - 3}{2x^2 + 5x}$

l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x + 3}{x^2 - 5x + 4}$

m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x + 2} - \sqrt{x - 2})$

n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x)$

ñ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1})$

o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x + 1}{5x - 1} \right)^{3x + 2}$

p) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{3}{x - 1}}$

q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} \right)^{\frac{x^2 + 1}{x - 1}}$

■ 7. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^2 - 4}{x + 1} \cdot \frac{x^2 + 4}{x^2 - 2x} \right]$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} [x - 1]^{\frac{3}{x - 2}}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3)]$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x} + 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1 + x}{2 + x} \right]^{\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x + 2}{x - 1} - \frac{x + 5}{x^2 - 1} \right]$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - 5}{3x^2 + x} \right)^{x^2 - 1}$

i) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x - 4}}{x - 2}$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$

k) $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x^2 + 4}{x + 4} \right]^{\frac{x}{x - 1}}$

l) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x + 7} - 3}$

■ 8. Calcula, utilizando infinitésimos equivalentes, los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(2x)}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(7x)}{4x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}^2(x - 2)}{x^2 - 4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x - 1)}{2x - 4}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{sen} 2x}$

■ 9. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + 3x]^{4/x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 + 3}{4x^2 + 5} \right]^{x/2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x - 1}{2x + 5} \right]^{\sqrt{x^2 + 3x} - x}$

■ 10. Calcula el valor de a ($a \neq 0$) para que se verifique $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 1} \right]^{ax} = e^{-5}$.



SOLUCIONES

6. Los límites quedan:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 6}{x^2 + 3x + 2} = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1} = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^3 + 3x^2 + 2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x^2+x)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{x^2+x} = -\frac{5}{2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} \stackrel{\left(\frac{k}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-2} \quad \text{no existe este límite}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x}+1 = 2$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{x} \cdot \frac{2 + \sqrt{4-x}}{2 + \sqrt{4-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 + \sqrt{4-x}} = \frac{1}{4}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{2} = 1$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 6x - 9}{x-3} = 0$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 6x - 3}{2x^2 + 5x} \stackrel{\left(\frac{k}{0}\right)}{=} \text{no existe este límite}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 + 6x - 3}{2x^2 + 5x} = +\infty$$

$$m) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}} = 0$$

$$n) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \frac{(\sqrt{x^2 + x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x} = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{n}) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1}) \frac{(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1})}{(\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2 - x} + \sqrt{2x^2 + 1}} = -\infty$$

$$o) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{5x-1} \right)^{3x+2} \stackrel{\left(\frac{1^\infty}{e}\right)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+2) \cdot \left(\frac{5x+1}{5x-1} - 1 \right)} = e^{6/5}$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3+1}{x^2+1} \right)^{\frac{3}{x-1}} \stackrel{\left(\frac{1^\infty}{e}\right)_m}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x-1} \cdot \left(\frac{x^3+1}{x^2+1} - 1 \right)} = e^{3/2}$$

$$q) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2} \right)^{\frac{x^2+1}{x-1}} \stackrel{\left(\frac{1^\infty}{e}\right)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x-1} \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2} - 1 \right)} = e^2$$

7. Los límites quedan:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x+1} \cdot \frac{x^2+4}{x^2-2x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x^2+4)}{(x+1) \cdot x} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{3}{x-2}} \stackrel{(1^\infty)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2} \cdot (x-1-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} 3} = e^3$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[\sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3)][\sqrt{4x^2 - 5} + (2x - 3)]}{\sqrt{4x^2 - 5} + (2x - 3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12x - 14}{\sqrt{4x^2 - 5} + (2x - 3)} \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{12x}{x} - \frac{14}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{5}{x^2} + \frac{2x}{x} - \frac{3}{x}}} = 3$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1} \stackrel{(0/0)}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = -\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x} + 1} \stackrel{(\infty/\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x}}}{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}} = 1$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x-1} - \frac{x+5}{x^2-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = 2$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - 5}{3x^2 + x} \right)^{x^2 - 1} \stackrel{(1^\infty)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) \left(\frac{3x^2 - 5}{3x^2 + x} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 - 1)(-5 - x)}{3x^2 + x}} = e^{-\infty} = 0$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2} \stackrel{(0/0)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x - 1} \stackrel{(0/0)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(\sqrt{x+3} + 2) = 8$$

$$\stackrel{(0/0)}{=} \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(\sqrt{x+3} + 2) = 8$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 4}{x + 4} \right)^{\frac{x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} \right) \left(\frac{x^2 + 4}{x + 4} - 1 \right)} \stackrel{(0/0)}{=} e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot (x^2 - x)}{(x-1)(x+4)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x+4}} = e^{1/5}$$

$$\begin{aligned}
 \text{l) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{\sqrt{x+7}-3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}-3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x^2+5}+3)} = 4
 \end{aligned}$$

8. Los límites quedan:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(5x)}{\text{sen}(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\text{tg}^2(x-2)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{x+2} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(7x)}{4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(7x)^2/2}{4x^2} = \frac{49}{8}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln[1+(x-2)]}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{2(x-2)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x}-1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot \ln 2}{2x} = \frac{3 \cdot \ln 2}{2}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{tg}(5x)}{\text{sen}(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}$$

9. Las soluciones son:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{4}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x} \cdot (1+3x-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x}{x}} = e^{12}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2+3}{4x^2+5} \right)^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{2}{4} \right)^{\infty} = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+5} \right)^{\sqrt{x^2+3x}-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+3x}-x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x} = 1 \cdot \frac{3}{2} = 1$$

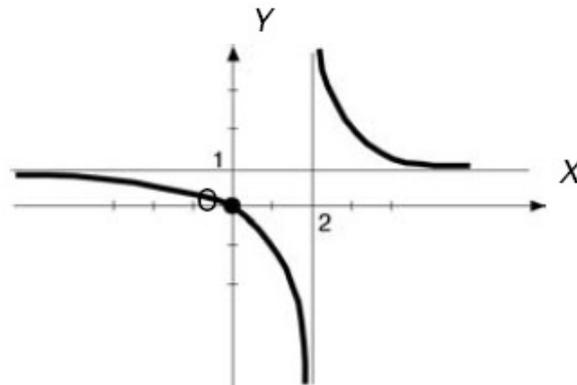
10. El límite es:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 1} \right)^{ax} \stackrel{(1^\infty)}{=} e^{x \lim_{x \rightarrow +\infty} ax \left(\frac{x^2 + 5x}{x^2 + 1} - 1 \right)} = e^{x \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax(5x-1)}{x^2+1}} = e^{x \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5ax^2 - ax}{x^2+1}} = e^{5a}$$

$$e^{5a} = e^{-5} \Rightarrow 5a = -5 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

SOLUCIONES

11. La gráfica queda:



12. El límite depende de por dónde nos acercamos a $x=2$, en cada caso queda:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} = 0$$

13. Queda del siguiente modo:

Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } -\infty < x \leq -2 \text{ ó } 2 \leq x < +\infty \\ 4 - x^2 & \text{si } -2 < x < 2 \end{cases}$

Los límites quedan:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 4) = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (4 - x^2) = 0 \qquad \text{entonces: } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (4 - x^2) = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 - 4) = 0 \qquad \text{entonces: } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$$

14. Queda:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) = 2 \qquad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3 - ax^2) = 3 - a$$

Para que la función tenga límite cuando x tiende a 1 ambos deben coincidir, por tanto $a=1$.

15. La solución es:

Asíntotas verticales: $x=2$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \pm\infty$ no existen.

Asíntotas oblicuas: son rectas de ecuación $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2-3}{2x-4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-3}{2x^2-4x} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2-3}{2x-4} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-3}{2x-4} = 1$$

La asíntota oblicua queda $y = \frac{1}{2}x + 1$

- Una función puede tener como máximo 2 asíntotas oblicuas correspondientes a los límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$.
- Una función puede tener como máximo 2 asíntotas horizontales correspondientes a los límites cuando $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$.
- Una función racional puede tener tantas asíntotas verticales como ceros del denominador que no lo sean en el numerador.

16. La solución queda:

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x - 5}{x - 2} = \pm\infty$ no existen.

Asíntotas oblicuas: son rectas de ecuación $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^2+x-5}{x-2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+x-5}{x^2-2x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2+x-5}{x-2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x-5}{x-2} = 3$$

La asíntota oblicua queda $y = x + 3$

17. Queda del siguiente modo:

a) $f(x) = \ln(x-1)$

Para $x=1$; $y \rightarrow -\infty$ tiene asíntota vertical en $x=1$

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-1) = +\infty$ no existen.

Asíntotas oblicuas: son rectas de ecuación $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x-1)}{x} = 0$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\ln(x-1) - 0 \cdot x) = +\infty$$

No tiene asíntotas oblicuas.

b) $g(x) = e^{x-1}$

Asíntotas verticales: No tiene.

Asíntotas horizontales: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-1} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x-1} = 0$ tiene asíntota horizontal en $y=0$

No tiene asíntotas oblicuas.

18. La solución queda:

a) Sí. Por ejemplo $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$. El punto $x=0 \notin \text{Dom } f$, pero existe $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0$

b) No es posible pues las asíntotas verticales son los valores de x para los cuales $y \rightarrow \pm\infty$.

19. Queda del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + ax + 1} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x)(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + ax + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 1}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4 \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x+5}{4x+3} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{4x+5}{4x+3} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{4x+3}} = e^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi} \right)^{ax^2} &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} ax^2 \left(\frac{4x^2+1}{4x^2+\pi} - 1 \right)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a(1-\pi)x^2}{4x^2+\pi}} = e^{\frac{a(1-\pi)}{4}} = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a = \frac{2}{1-\pi} \end{aligned}$$

20. La solución queda:

$$1.^\circ \text{ Si } a = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x+4} - \sqrt{ax} = +\infty$$

$$2.^\circ \text{ Si } a > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3x+4} - \sqrt{ax} \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{3x+4} - \sqrt{ax})(\sqrt{3x+4} + \sqrt{ax})}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{ax}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+4-ax}{\sqrt{3x+4} + \sqrt{ax}} = \begin{cases} 0 & \text{si } a = 3 \\ -\infty & \text{si } a > 3 \\ +\infty & \text{si } 0 < a < 3 \end{cases}$$

21. Los límites quedan:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(2x)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{3x^2} = \frac{(2x)^2}{3x^2} = \frac{4}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}} - \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}} - \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}}\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}}\right)}{\left(\sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{\left(\sqrt{x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{8}} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right] = -2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1 - 1 = 0$$