Unidad 7 – Producto vectorial y mixto. Aplicaciones.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Para los vectores $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $\vec{v} = (-3, 1, -1)$ y $\vec{w} = (1, 2, 1)$, calcula $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ y $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

2. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 1, 3)$, $\vec{v} = (-2, 3, 1)$ y $\vec{w} = (2, -2, 5)$, calcula $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.

3. Dados los vectores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (-2, 3, -2)$ y $\vec{w} = (5, 0, 2)$:

   a) Calcula los productos vectoriales $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{w}$ y $\vec{v} \times \vec{w}$.

   b) Calcula el producto mixto de los tres vectores anteriores.

4. Sean los vectores $\vec{u} = (2, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ y $\vec{w} = (3, -1, 1)$. Realiza las siguientes operaciones:

   a) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ b) $(\vec{v} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{u}$ c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ d) $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$ e) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ f) $(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u}$

5. Los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ y $\vec{w} = (1, 2, 4)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

   a) Prueba que los conjuntos de vectores $\{\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v}, \vec{w}\}$ y $\{\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w}\}$ forman bases.

   b) Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{v} \times \vec{w}$ y $\vec{w} \times \vec{u}$.

6. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cumplen $|\vec{u}| = 10$, $|\vec{v}| = 2$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$. Calcula $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

7. Sean los puntos $P(3, 1, 5)$ y $Q(-1, 7, 3)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento. Este plano corta los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Calcula:

   a) La ecuación del plano π.

   b) El área del triángulo ABC.

8. Dada la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = z \end{cases}$ y el punto $P(1, 2, -1)$:

   a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r.

   b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano hallado y los ejes coordenados.

9. Un triángulo tiene dos vértices en los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$, y el tercer vértice está situado en la recta $\begin{cases} x = 2y \\ z = 1 \end{cases}$. Halla las coordenadas de este vértice sabiendo que el área del triángulo es $\sqrt{2}/2$.

10. Tres vértices de un paralelogramo en el espacio son los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 1)$ y $C(2, -1, 2)$.

    a) Halla el punto D que complete el paralelogramo. ¿Hay uno o varios?

    b) Calcula el área del paralelogramo hallado anteriormente.

11. El plano $-2x + 5y - z + 10 = 0$ corta los ejes OX, OY y OZ en tres puntos A, B y C, respectivamente. Estos puntos determinan, junto al origen de coordenadas O, un tetraedro. Obtén el volumen de dicho tetraedro.

12. Calcula la distancia del punto $(-2, 4, 3)$ a la recta $\begin{cases} x = 2z + 1/2 \\ y = 4 - 2z/3 \end{cases}$.

13. Dado el plano de ecuación $2x + 2y + z = 3$ y el punto $A(1, 0, 2)$, sea B el pie de la perpendicular de A a dicho plano y $C(2, 1, -2)$ un punto del plano. Halla el área del triángulo ABC.

PÁGINA 179

■ 14. Sean $A(1, -5, a)$, $B(2, a, -1)$ y $C(a, -5, 2)$ los tres vértices del triángulo ABC. Determina el valor de a para que ese triángulo sea rectángulo en C y después calcula su área.

■ 15. Halla la distancia entre las rectas:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

■ 16. Calcula los puntos de la recta $r: \begin{cases} x - z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ que equidistan de los planos:

$$\pi_1: 2x + y - 2z = 0 \qquad \pi_2: x - 2y + 2z - 1 = 0$$

■ 17. Halla la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas:

$$r: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

■ 18. Dada la recta $r: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$ y los puntos $A(2, -1, 1)$ y $B(3, 0, -2)$ encuentra los puntos P de r para los cuales el triángulo ABP es rectángulo con hipotenusa AB. Halla en estos casos el área del triángulo.

■ 19. Halla el valor de a para que la recta:

$$r: \begin{cases} 2x - 5y - 1 = 0 \\ x + 5z + 7 = 0 \end{cases}$$

y el plano $\pi: x - 3y + az = -6$ sean paralelos. Para este valor de a halla la distancia entre ellos.

■ 20. Los puntos $P(1, 1, 0)$ y $Q(0, 2, 1)$ son dos vértices contiguos de un rectángulo. Un tercer vértice pertenece a la recta $r: \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$.

a) Determina los restantes vértices del rectángulo.

b) ¿Qué posición relativa debería tener la recta r y la que contiene el segmento PQ para que la solución fuese única?

■ 21. Halla la ecuación de la superficie esférica de centro el punto $C(1, 3, -1)$ y radio 3.

■ 22. Halla el centro y el radio de la esfera de ecuación $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y - 12z + 20 = 0$.

■ 23. Halla la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $P(5, 1, 3)$, $Q(1, 2, 0)$, $R(-2, -2, 1)$ y $S(1, 1, -1)$.

■ 24. Determina la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$ en el punto $(2, 4, 4)$.

■ 25. Determina el área de una superficie esférica que es tangente a los planos π_1 y π_2 de ecuaciones $\pi_1: 3x - y + 5z = 5$, $\pi_2: 3x - y + 5z = 12$.

■ 26. Halla la intersección de la esfera de centro $(3, 1, 0)$ y radio 2 con la recta de ecuaciones paramétricas $x = 2 + t$, $y = t$, $z = 1 - t$.

■ 27. Halla la ecuación de la esfera de centro $C(-1, 4, 2)$ y tangente al plano de ecuación $4x - 4y + 4z - 12 = 0$.

PÁGINA 180

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

28. Halla la distancia entre el punto $A(1, 2, 3)$ y cada uno de los ejes coordenados.

29. Halla la distancia entre las rectas de ecuaciones:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-2} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y+2z=1 \end{cases}$$

30. a) Encuentra las coordenadas del punto B, proyección ortogonal del punto $A(1, 0, 2)$ sobre el plano π: $2x + y + z = 10$.

b) El punto $C(2, 1, 5)$ es un punto del plano π. ¿Cuánto vale el área del triángulo ABC?

31. Halla la recta perpendicular común a las rectas $r: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ y $s: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$.

32. Halla la distancia entre la recta que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(0, 1, 1)$ y el eje OY.

33. a) Dado el punto $A(-6, 2, 0)$, halla su simétrico A' con respecto a la recta:

$$r: \begin{cases} x = 1-t \\ y = -2+t \\ z = -3t \end{cases}$$

b) Halla un punto P de la recta r tal que el área del triángulo $AA'P$ valga $3\sqrt{66}$ u^2.

34. Dada la recta $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$ encuentra la ecuación del plano que la contiene y es perpendicular al plano OXY.

35. Nos dan los vectores $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, 2, -1)$ y $\vec{c} = (2, 0, 0)$. Halla:

a) Valor absoluto del producto mixto de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y da su significado geométrico.

b) Ángulo que forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

c) Razona si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman base, y en caso afirmativo halla las coordenadas del vector $\vec{v} = (1, -2, 0)$ en dicha base.

36. Halla el lugar geométrico de los puntos P que determinan con $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1)$ un tetraedro de volumen 1/6.

37. Halla el volumen de un paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$ sabiendo que $A(8, 0, 0)$, $B(0, 8, 0)$, $C(0, 0, 8)$ y $E(8, 8, 8)$. Obtén también las coordenadas de los otros vértices.

38. Calcula la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta $r: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases}$.

39. a) Comprueba que los vectores $\vec{a} = (1, 1, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0)$ y $\vec{c} = (1, 3, 5)$ son linealmente dependientes.

b) Encuentra la ecuación del plano que contiene a los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y corta al eje OX a distancia 3 del origen.

40. Siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores cualesquiera del espacio, prueba que:

$$(\vec{u}-\vec{v}) \times (\vec{u}+\vec{v}) = 2\vec{u} \times \vec{v}$$