Unidad 7 – Producto vectorial y mixto. Aplicaciones.

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Para los vectores $\vec{u} = (2, 3, -1)$, $\vec{v} = (-3, 1, -1)$ y $\vec{w} = (1, 2, 1)$, calcula $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ y $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.

2. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 1, 3)$, $\vec{v} = (-2, 3, 1)$ y $\vec{w} = (2, -2, 5)$, calcula $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$.

3. Dados los vectores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (-2, 3, -2)$ y $\vec{w} = (5, 0, 2)$:

   a) Calcula los productos vectoriales $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{w}$ y $\vec{v} \times \vec{w}$.

   b) Calcula el producto mixto de los tres vectores anteriores.

4. Sean los vectores $\vec{u} = (2, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ y $\vec{w} = (3, -1, 1)$. Realiza las siguientes operaciones:

   a) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ b) $(\vec{v} \cdot \vec{w}) \cdot \vec{u}$ c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ d) $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}$ e) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ f) $(\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u}$

5. Los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$ y $\vec{w} = (1, 2, 4)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

   a) Prueba que los conjuntos de vectores $\{\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v}, \vec{w}\}$ y $\{\vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{w}, \vec{w}\}$ forman bases.

   b) Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{u} \times \vec{v}$, $\vec{v} \times \vec{w}$ y $\vec{w} \times \vec{u}$.

6. Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cumplen $|\vec{u}| = 10$, $|\vec{v}| = 2$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 12$. Calcula $|\vec{u} \times \vec{v}|$.

7. Sean los puntos $P(3, 1, 5)$ y $Q(-1, 7, 3)$. Por el punto medio del segmento PQ trazamos un plano π perpendicular a dicho segmento. Este plano corta los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Calcula:

   a) La ecuación del plano π.

   b) El área del triángulo ABC.

8. Dada la recta r de ecuaciones $\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = z \end{cases}$ y el punto $P(1, 2, -1)$:

   a) Halla la ecuación del plano que contiene a P y es perpendicular a la recta r.

   b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano hallado y los ejes coordenados.

9. Un triángulo tiene dos vértices en los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 1)$, y el tercer vértice está situado en la recta $\begin{cases} x = 2y \\ z = 1 \end{cases}$. Halla las coordenadas de este vértice sabiendo que el área del triángulo es $\sqrt{2}/2$.

10. Tres vértices de un paralelogramo en el espacio son los puntos $A(1, 0, 1)$, $B(-1, 1, 1)$ y $C(2, -1, 2)$.

    a) Halla el punto D que complete el paralelogramo. ¿Hay uno o varios?

    b) Calcula el área del paralelogramo hallado anteriormente.

11. El plano $-2x + 5y - z + 10 = 0$ corta los ejes OX, OY y OZ en tres puntos A, B y C, respectivamente. Estos puntos determinan, junto al origen de coordenadas O, un tetraedro. Obtén el volumen de dicho tetraedro.

12. Calcula la distancia del punto $(-2, 4, 3)$ a la recta $\begin{cases} x = 2z + 1/2 \\ y = 4 - 2z/3 \end{cases}$.

13. Dado el plano de ecuación $2x + 2y + z = 3$ y el punto $A(1, 0, 2)$, sea B el pie de la perpendicular de A a dicho plano y $C(2, 1, -2)$ un punto del plano. Halla el área del triángulo ABC.

SOLUCIONES

1. Al ser $\vec{u}\times\vec{v}=(-2,5,11)$, se tiene que $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=(-17,13,-9)$.
   Como $\vec{v}\times\vec{w}=(3,2,-7)$, por tanto $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(-19,11,-5)$.

2. Se tiene que:

$$\vec{u}\,(\vec{v}\times\vec{w})\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}=-7$$

3. Queda:

a) $$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}=-10i-2j+7k$$

$$\vec{u}\times\vec{w}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-2i+14j+5k$$

$$\vec{v}\times\vec{w}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}=6i-6j-15k$$

b) $$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-36$$

4. Queda:

a) $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}=4(3,-1,1)=(12,-4,4)$

b) $(\vec{v}\times\vec{w})\,\vec{u}=3(2,0,1)=(6,0,3)$

c) $$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=1$$

d) $$(\vec{v}\times\vec{w})\cdot\vec{u}=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1$$

e) $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}=(1,14,11)$

f) $(\vec{v}\times\vec{w})\times\vec{u}=(5,-18,-10)$

5. Queda:

a) El conjunto de vectores $\{\vec{u}\times\vec{v},\vec{v},\vec{w}\}$ está formado por $\{(-1,-1,1),(0,1,1),(1,2,4)\}$. Forman base al ser

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

El conjunto de vectores $\{\vec{u}\times\vec{v},\vec{v}\times\vec{w},\vec{w}\}$ está formado por $\{(-1,-1,1),(2,1,-1),(1,2,4)\}$. Forman base al ser

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

b) El producto mixto de los vectores pedidos es:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot [(\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{w} \times \vec{u}\} \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

6. Como $\vec{u}\cdot\vec{v}=12$, el ángulo α que forman u y v es:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{12}{10 \cdot 2};$$

Luego $a = 53º\,7'\,48{,}37''$

Por tanto, $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot$ sen $\alpha = 10\cdot 2\cdot$ sen $(53º\,7'\,48{,}37'') = 16$

7. Queda:

a) El plano π pasa por el punto $M(1,4,4)$ y su vector normal es $\overrightarrow{PQ}=(-4,6,-2)$, su ecuación es $-4x(x-1)+6(y-4)+(-2)(z-4)=0$, es decir, $2x-3y+z+6=0$.

b) Las coordenadas de los puntos *A, B* y *C* son:

$$A(-3, 0, 0),\ B(0, 2, 0) \text{ y } C(0, 0, -6).$$

El área del triangulo *ABC* es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| =$$

$$= \frac{1}{2}\,|(3, 2, 0) \times (3, 0, -6)| = \frac{1}{2}\sqrt{504} = 11{,}225.$$

8. La recta r expresada en la forma continua es:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

a) La ecuación del plano es $(x-1, y-2, z+1)\cdot(1,1,2)=0$

Operando se obtiene $x+y+2z-1=0$.

b) Los vértices del triangulo son:

$A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1/2)$.

El área de dicho triangulo es:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(-1, 1, 0) \times (-1, 0, 1/2)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} = 0{,}612 \text{ unidades cuadradas.}$$

9. El tercer vértice tiene de coordenadas $(2t, t, 1)$. El área del triangulo de vértices $A=(0,0,0), B=(1,1,1)$ y $C=(2t, t, 1)$ es:

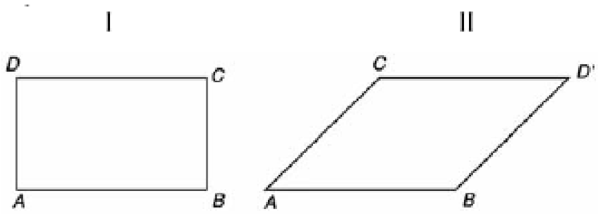
$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(1, 1, 1) \times (2t, t, 1)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(1-t, 2t-1, -t)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(1-t)^2 + (2t-1)^2 + (-t)^2}$$

Como el área vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$, se obtiene $t=0$ y $t=1$. Estos valores nos posibilitan dos soluciones: (0, 0, 1) y (2, 1, 1).

10. Queda:

a) Pueden ocurrir dos casos como se observa en el dibujo.



I. En este caso, $\vec{AB} = \vec{DC}$ y el punto D tiene por coordenadas $(4, -2, 2)$.

II. En este caso, $\vec{AB} = \vec{CD'}$ y el punto D' tiene por coordenadas $(0, 0, 2)$.

b) El área del paralelogramo es:

Área = $|AB \times AC| = |(-2,1,0)\times(1,-1,1)| = |(1,2,1)| = \sqrt{6} = 2{,}45$ unidades cuadradas.

- El área del paralelogramo es igual en cualquiera de los dos casos.

11. Los puntos *A, B* y *C* son:

$A(5,0,0), B(0,-2,0)$ y $C(0,0,10)$

El área del tetraedro es la suma de las aéreas de los triángulos siguientes:

$$\text{Área } (ABC) = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|(-5, -2, 0) \times\right.$$

$$\left.\times (-5, 0, 10)\right| = \frac{1}{2}\left|(-20, 50, -10)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{3000} = 27{,}39$$

$$\text{Área } (ABO) = \frac{1}{2}\left|\vec{OA} \times \vec{OB}\right| = \frac{1}{2}\left|(5, 0, 0) \times\right.$$

$$\left.\times (0, -2, 0)\right| = \frac{1}{2}\left|(0, 0, -10)\right| = \frac{1}{2}\,10 = 5$$

$$\text{Área } (ACO) = \frac{1}{2}\left|\vec{OA} \times \vec{OC}\right| = \frac{1}{2}\left|(5, 0, 0) \times\right.$$

$$\left.\times (0, 0, 10)\right| = \frac{1}{2}\left|(0, -50, 0)\right| = \frac{1}{2}\,50 = 25$$

$$\text{Área } (BCO) = \frac{1}{2}\left|\vec{OB} \times \vec{OC}\right| = \frac{1}{2}\left|(0, -2, 0) \times\right.$$

$$\left.\times (0, 0, 10)\right| = \frac{1}{2}\left|(-20, 0, 0)\right| = \frac{1}{2}\,20 = 10$$

Por tanto, el área del tetraedro es:

$27{,}39 + 5 + 25 + 10 = 67{,}39$ unidades cuadradas

12. La recta en forma continua puede expresarse:

$$\frac{x - 1/2}{2} = \frac{y - 4}{-2/3} = \frac{z}{1}$$

La distancia buscada es:

$$d = \frac{|(5/2,\ 0,\ -3) \times (2,\ -2/3,\ 1)|}{|(2,\ -2/3,\ 1)|} = \frac{\sqrt{2\,845}}{14} = 3{,}81$$

13. Las coordenadas del punto B son las soluciones del sistema $\begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ x - y = 1 \\ y - 2z = -4 \end{cases}$

Por tanto, los vértices del triangulo son los puntos

$$A(1,\ 0,\ 2),\ B\left(\frac{7}{9},\ -\frac{2}{9},\ \frac{17}{9}\right) \text{ y } C(2,\ 1,\ -2)$$

El área del triangulo es:

$$\text{Área } (ABC) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left(-\frac{2}{9},\ -\frac{2}{9},\ -\frac{1}{9}\right) \times (1,\ 1,\ -4)\right| = 0{,}71$$

PÁGINA 179

14. Sean $A(1, -5, a)$, $B(2, a, -1)$ y $C(a, -5, 2)$ los tres vértices del triángulo ABC. Determina el valor de a para que ese triángulo sea rectángulo en C y después calcula su área.

15. Halla la distancia entre las rectas:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

16. Calcula los puntos de la recta $r: \begin{cases} x - z = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ que equidistan de los planos:

$$\pi_1: 2x + y - 2z = 0 \qquad \pi_2: x - 2y + 2z - 1 = 0$$

17. Halla la ecuación de la recta perpendicular común a las rectas:

$$r: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

18. Dada la recta $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ y los puntos $A(2, -1, 1)$ y $B(3, 0, -2)$ encuentra los puntos P de r para los cuales el triángulo ABP es rectángulo con hipotenusa AB. Halla en estos casos el área del triángulo.

19. Halla el valor de a para que la recta:

$$r: \begin{cases} 2x - 5y - 1 = 0 \\ x + 5z + 7 = 0 \end{cases}$$

y el plano $\pi: x - 3y + az = -6$ sean paralelos. Para este valor de a halla la distancia entre ellos.

20. Los puntos $P(1, 1, 0)$ y $Q(0, 2, 1)$ son dos vértices contiguos de un rectángulo. Un tercer vértice pertenece a la recta $r: \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$.

a) Determina los restantes vértices del rectángulo.

b) ¿Qué posición relativa debería tener la recta r y la que contiene el segmento PQ para que la solución fuese única?

21. Halla la ecuación de la superficie esférica de centro el punto $C(1, 3, -1)$ y radio 3.

22. Halla el centro y el radio de la esfera de ecuación $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4x + 8y - 12z + 20 = 0$.

23. Halla la ecuación de la esfera que pasa por los puntos $P(5, 1, 3)$, $Q(1, 2, 0)$, $R(-2, -2, 1)$ y $S(1, 1, -1)$.

24. Determina la ecuación del plano tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0$ en el punto $(2, 4, 4)$.

25. Determina el área de una superficie esférica que es tangente a los planos π_1 y π_2 de ecuaciones $\pi_1: 3x - y + 5z = 5$, $\pi_2: 3x - y + 5z = 12$.

26. Halla la intersección de la esfera de centro $(3, 1, 0)$ y radio 2 con la recta de ecuaciones paramétricas $x = 2 + t$, $y = t$, $z = 1 - t$.

27. Halla la ecuación de la esfera de centro $C(-1, 4, 2)$ y tangente al plano de ecuación $4x - 4y + 4z - 12 = 0$.

14. Debe cumplirse que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ son perpendiculares. Es decir, el producto escalar de ambos debe ser nulo.

$\overrightarrow{CA} = (1 - a, 0, a - 2)$,

$\overrightarrow{CB} = (2 - a, a + 5, -3)$

De $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ se obtiene $a^2 - 6a + 8$

Las soluciones de la ecuación son: $a = 2$ y $a = 4$

El área del triangulo ABC es:

$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\right| = \frac{1}{2}\left|10 - 3a - a^2, a^2 - a + 1{,}5 - 4a - a^2\right|$

Si $a = 2 \Rightarrow$ área = 3,81 unidades cuadradas.

Si $a = 4 \Rightarrow$ área = 17,48 unidades cuadradas.

15. Ambas rectas se cruzan.

Hallamos la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a la recta s. Su ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - y - z + 2 = 0$$

La distancia entre las rectas es:

$$d = \frac{|0 - 0 - 3 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$$

16. Sea $P(t,-t+2,t-1)$ un punto cualquiera de la letra *r*. Se cumple:

$$d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2)\Leftrightarrow\frac{|2t-t+2-2t+2|}{\sqrt{4+1+4}}=$$

$$=\frac{|t+2t-4+2t-2-1|}{\sqrt{1+4+4}}\Leftrightarrow|-t+4|=|5t-7|\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-t+4=\ \ 5t-7\Rightarrow t=11/6\\ \qquad\text{o}\qquad\qquad\qquad \text{o}\\ -t+4=-5t+7\Rightarrow t=3/4\end{cases}$$

Para $t=\dfrac{11}{6}$ el punto es $P\left(\dfrac{11}{6},\dfrac{1}{6},\dfrac{5}{6}\right)$

Para $t=\dfrac{3}{4}$ el punto es $P\left(\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4},-\dfrac{1}{4}\right)$

17. Sea $P(t,0,0)$ un punto cualquiera de *r* y *Q(0, s, 3)* un punto genérico de *s*.
Los puntos *P* y *Q* por los que pasa la perpendicular común deben cumplir:

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{u_r}=0;\quad(-t,s,3)\cdot(1,0,0)=0$$
$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{u_s}=0;\quad(-t,s,3)\cdot(0,1,0)=0$$

Operando obtenemos: $t=0$ y $s=0$.

La recta buscada es la que pasa por $P(0,0,0)$ y $Q(0,0,3)$ y su ecuación es:

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\ y=0\\ z=3t\end{array}\right\}t\in\mathbb{R}$$

18. Sea $P(-1+2t, 2-2t, 1-t)$ un punto cualquiera de la recta *r*. Para que el triangulo *ABP* sea rectángulo en *P* debe cumplirse:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2t-3, -2t+3, -t) \cdot$$
$$\cdot (2t-4, -2t+2, -t+3) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ o } t = 2.$$

Para $t = 1$ el punto es $P(1, 0, 0)$.

Para $t = 2$ el punto es $P(3, -2, -1)$.

En el primer caso el área del triángulo es:

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2} |(-1, 1, -1) \times (1, 1, -3)| =$$
$$= \frac{1}{2} |(-2, -4, -2)| = \sqrt{6} \approx 2{,}45$$

En el segundo caso el área del triángulo es:

$$\frac{1}{2} |\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2} |(1, -1, -2) \times (1, 1, -3)| =$$
$$= \frac{1}{2} |(5, 1, 2)| = \frac{\sqrt{30}}{2} \approx 2{,}74$$

19. La ecuación de la recta *r* puede ser expresada en la forma:

$$\frac{x}{5} = \frac{y + 1/5}{2} = \frac{z + 7/5}{-1}$$

Para que la recta *r* y el plano π sean paralelos, debe cumplirse:

$$(1, -3, a) \cdot (5, 2\ -1) = 0 \Leftrightarrow a = -1$$

La distancia buscada es:

$$d = \frac{|0 - 3 \cdot (-1/5) - (-7/5) + 6|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{11}} = 2{,}41$$

20. a) sea $R(t, 0, 1)$ un punto genérico de la recta r. Para que R sea vértice de un rectángulo se debe cumplir:

$$\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow (t-1, -1, 1) \cdot (-1, 1, 1) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

o

$$\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow (t, -2, 0) \cdot (-1, 1, 1) = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

21. La ecuación es: $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 9$

22. El centro es el punto $(1,-2,3)$ y el radio es $r=2$.

23. La esfera de ecuación $x^2+y^2+z^2+mx+ny+pz+q=0$ cumple las condiciones:

$$\begin{cases} 5m+n+3p+q=-35 \\ m+2n \quad +q=-5 \\ -2m-2n+p+q=-9 \\ m+n-p+q=-3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$$m=-\frac{7}{2} \quad n=\frac{5}{2} \quad p=-\frac{9}{2} \quad q=-\frac{13}{2}$$

La ecuación de la esfera es:

$$x^2+y^2+z^2-\frac{7}{2}x+\frac{5}{2}y-\frac{9}{2}z-\frac{13}{2}=0$$

24. El centro de la esfera es el punto (1, 2, 2).
El plano buscado tiene por ecuación:

$$1\cdot(x-2)+2\cdot(y-4)+2\cdot(z-4)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x+2y+2z-18=0.$$

25. El diámetro de la superficie de la superficie esférica es la distancia entre los planos. Esta es:

$$d(\pi_1, \pi_2)=$$
$$=\frac{|3\cdot 0-0+5\cdot 1-12|}{\sqrt{3^2+(-1)^2+5^2}}=\frac{|-7|}{\sqrt{35}}=\frac{7}{\sqrt{35}}=1{,}18$$

El área buscada es:

$$4\pi r^2=4\pi\left(\frac{1{,}18}{2}\right)^2=4{,}398 \text{ unidades cuadradas.}$$

26. La solución del sistema:

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-1)^2+z^2=4 \\ \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1} \end{cases}$$

Nos da como resultado los puntos:

$(4{,}155;\ 2{,}155;\ -1{,}155)$ y $(1{,}845;\ -0{,}155;\ 1{,}155)$.

27. El radio es la distancia del centro C al plano dado y vale:

$$r = \frac{|4(-1) - 4(4) + 4(2) - 12|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{|-24|}{\sqrt{48}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

La ecuación de la esfera es:

$$(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z + 2)^2 = 12$$

PÁGINA 180

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

28. Halla la distancia entre el punto $A(1, 2, 3)$ y cada uno de los ejes coordenados.

29. Halla la distancia entre las rectas de ecuaciones:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-2} \quad \text{y} \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

30. a) Encuentra las coordenadas del punto B, proyección ortogonal del punto $A(1, 0, 2)$ sobre el plano π: $2x + y + z = 10$.

    b) El punto $C(2, 1, 5)$ es un punto del plano π. ¿Cuánto vale el área del triángulo ABC?

31. Halla la recta perpendicular común a las rectas $r: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$ y $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$.

32. Halla la distancia entre la recta que pasa por los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(0, 1, 1)$ y el eje OY.

33. a) Dado el punto $A(-6, 2, 0)$, halla su simétrico A' con respecto a la recta:

$$r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = -3t \end{cases}$$

    b) Halla un punto P de la recta r tal que el área del triángulo $AA'P$ valga $3\sqrt{66}$ u^2.

34. Dada la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$ encuentra la ecuación del plano que la contiene y es perpendicular al plano OXY.

35. Nos dan los vectores $\vec{a} = (1, 0, -1)$, $\vec{b} = (0, 2, -1)$ y $\vec{c} = (2, 0, 0)$. Halla:

    a) Valor absoluto del producto mixto de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y da su significado geométrico.

    b) Ángulo que forman $\vec{b}$ y $\vec{c}$.

    c) Razona si $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ forman base, y en caso afirmativo halla las coordenadas del vector $\vec{v} = (1, -2, 0)$ en dicha base.

36. Halla el lugar geométrico de los puntos P que determinan con $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, 1)$ un tetraedro de volumen 1/6.

37. Halla el volumen de un paralelepípedo de bases $ABCD$ y $EFGH$ sabiendo que $A(8, 0, 0)$, $B(0, 8, 0)$, $C(0, 0, 8)$ y $E(8, 8, 8)$. Obtén también las coordenadas de los otros vértices.

38. Calcula la distancia del punto $P(1, -1, 3)$ a la recta $r: \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 4 = 0 \end{cases}$.

39. a) Comprueba que los vectores $\vec{a} = (1, 1, 3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0)$ y $\vec{c} = (1, 3, 5)$ son linealmente dependientes.

    b) Encuentra la ecuación del plano que contiene a los vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$ y corta al eje OX a distancia 3 del origen.

40. Siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores cualesquiera del espacio, prueba que:

$$(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} \times \vec{v}$$

28. La distancia del punto $A(1,2,3)$ al eje OX viene dado por la expresión:

$$d(A,\ OX) = \frac{|(1,\ 2,\ 3) \times (1,\ 0,\ 0)|}{|(1,\ 0,\ 0)|} =$$

$$= \frac{|(0,\ 3,\ -2)|}{|(1,\ 0,\ 0)|} = \sqrt{13} = 3{,}606$$

La distancia a OY es:

$$d(A,\ OY) = \frac{|(1,\ 2,\ 3) \times (0,\ 1,\ 0)|}{|(0,\ 1,\ 0)|} =$$

$$= \frac{|(-3,\ 0,\ 1)|}{|(0,\ 1,\ 0)|} = \sqrt{10} = 3{,}162$$

La distancia a OZ es:

$$d(A,\ OZ) = \frac{|(1,\ 2,\ 3) \times (0,\ 0,\ 1)|}{|(0,\ 0,\ 1)|} =$$

$$= \frac{|(2,\ -1,\ 0)|}{|(0,\ 0,\ 1)|} = \sqrt{5} = 2{,}236$$

29. Estas rectas se cruzan. Por tanto

$$d(r,\ s) = \frac{|[\overrightarrow{P_rP_s},\ \vec{v_r},\ \vec{v_s}]|}{|\vec{v_r} \times \vec{v_s}|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\sqrt{4 + 64 + 121}} = 1{,}09$$

$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -2i - 8j - 11k$$

30. Quedan:

a) Junto B es la intersección del plano π con la recta que pasa por $A(1,0,2)$ y es perpendicular a π.

El punto B es la solución del sistema

$$\begin{cases} 2x + y + z = 10 \\ x - 2y = 1 \\ y - z = -2 \end{cases}$$

Las coordenadas del punto B son $B(3,1,3)$.

b) El área del triangulo de vértices $A(1,0,2)$, $B(3,0,3)$ y $C(2,1,5)$ es:

$$\text{Área } (ABC) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(2,\ 1,\ 1) \times (1,\ 1,\ 3)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{30} = 2{,}739$$

31. Sean $P(t,t,t)$ y $Q(s+1,3s,s)$ dos puntos genéricos de las rectas r y s. Los puntos anteriores quedan fijados bajo las condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} \times (1,\ 1,\ 1) = 0 \Rightarrow \quad 3t - 5s = 1 \\ \overrightarrow{PQ} \times (1,\ 3,\ 1) = 0 \Rightarrow 5t - 11s = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow t = \frac{3}{4},\ s = \frac{1}{4}$$

Los puntos fijados son $P(3/4, 3/4, 3/4)$ y $Q(5/4, 3/4, 1/4)$.

La perpendicular común tiene por ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{3}{4} + t \\ y = \frac{3}{4} \\ z = \frac{3}{4} - t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Otra forma de resolver este problema es hallar la intersección del plano que contiene a r y al vector $\vec{v}$ perpendicular a r y s, y el plano que contiene a s y al vector $\vec{v}$. Esta intersección nos da la recta perpendicular común.

$\vec{v} = (-2, 0, 2)$

$\pi_1 \supset$ r y a $\vec{v}: x - 2y + z = 0$

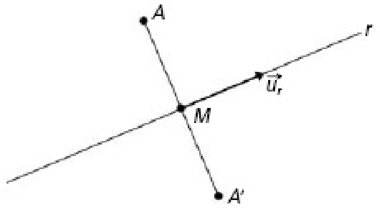
$\pi_2 \supset$ s y a $\vec{v}: 3x - 2y + 3z - 3 = 0$

Luego la recta buscada es $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3x - 2y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$

32. Estas rectas r (que pasa por A y B) y s (eje OY) se cruzan, por tanto la distancia viene dada por:

$$d(r,s)=\frac{\left|\left\{\vec{v}_r,\vec{v}_s,\overrightarrow{v_{PQ}}\right\}\right|}{\left|\vec{v}_r x \vec{v}_s\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{matrix}\right\|}{\left|(-1,0,-1)\right|}=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ unidades.}$$

33. Se da:



a) Sea $M(1-t,-2+t,-3t)$ un punto cualquiera de la recta r. Para determinar el punto M, punto medio del segmento de extremos A y A' se cumple:

$$\overrightarrow{AM}\perp\vec{u}_r \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}_r=0 \Leftrightarrow (-t+7,\ t-4,\ -3t)\cdot$$

$$\cdot(-1,\ 1,\ -3)=0 \Leftrightarrow t-7+t-4+9t=0 \Leftrightarrow t=1.$$

El punto M es $(0,-1,-3)$ y el simétrico de A es $A'(6,-4,-6)$.

b) Sea $P(1-t,-2+t,-3t)$ un punto de la recta r. El área del triangulo $AA'P$ es:

$$3\sqrt{66}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AA'}\times\overrightarrow{AP}| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{66}=\frac{1}{2}|(24t-24,\ -42t+42,\ 6t-6)| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{66}=\sqrt{2376t^2-4752t+2376} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2376t^2-4752t=0 \Leftrightarrow t=0 \quad \text{o} \quad t=2$$

Los puntos solución son $(1,-2,0)$ o $(-1,0,-6)$.

34. El haz de planos cuya arista es la recta dada puede expresarse en la forma:

$$(x+2y+1)+\lambda(3x-2z-3)=0$$

Operando:

$$(1+3\lambda)x+2y-2\lambda z+(1-3\lambda)=0$$

Si este plano es perpendicular a OXY se cumplirá:

$$(1+3\lambda,\ 2,\ -2\lambda)\cdot(0,0,1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda=0$$

El plano buscado es $x+2y+1=0$

35. Queda:

a) el producto misto vale 4 y representa el volumen del paralelepípedo de vectores concurrentes en un vértice los dados.

b) $\cos\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}=0$ luego los vectores forman un Angulo de 90º.

c) los vectores son linealmente independientes pues el determinante formado por ellos vale 4 distinto de cero. Por tanto forman base.

d) escribimos el vector $\vec{v}$ dado en combinación lineal de los de la base y obtenemos:
(1, -2, 0) = x (1, 0, -1) +y (0, 2, -1) + z (2, 0, 0)

Y resolviendo el sistema tenemos que $x=1; y=1; z=0.$ por tanto las coordenadas son (1,- 1,0)

36. Sean los puntos $P(x,y,z)$. Deben verificar que $\frac{1}{6}\left|\left\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}\right\}\right|=\frac{1}{6}$ de donde $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ x-1 & y & z \end{vmatrix}=1$y obtenemos que el lugar geométrico son los planos de ecuación $x+y+z=0$.

37. El volumen vendra dado por:

$$V=\left|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AE}]\right|=\begin{vmatrix} 8 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & -8 \\ 0 & 8 & 8 \end{vmatrix}=1\,024\ \text{m}^3$$

38. la recta puede expresarse en la forma: $\begin{cases} x=t \\ y=-4 \\ z=t \end{cases}$

la distancia buscada es:

$$d=\frac{|(1,3,3)\times(1,0,1)|}{|(1,0,1)|}=$$

$$=\frac{|(3,2,-3)|}{|(1,0,1)|}=\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}}=\sqrt{11}=3{,}317$$

39. Queda:

a) El determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ vale cero.

Por tanto los vectores dados son linealmente dependientes.

b) El plano está determinado por el punto (3, 0, 0) y los vectores $(-1, 2, 0)$ y $(1, 3, 5)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{r} 10x + 5y - 5z - 30 = 0 \\ 2x + y - z - 6 = 0 \end{array}$$

40. Teniendo en cuenta las propiedades del producto vectorial, se obtiene:

$$\begin{aligned} &(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v}) - \vec{v} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \\ &= \vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u} - \vec{v} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u} \\ &= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v} = 2\vec{u} \times \vec{v} \end{aligned}$$