Unidad 6 – Geometría euclídea. Producto escalar

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -5, 3)$; $\vec{v} = (4, -3, 2)$ y $\vec{w} = (0, 2, -7)$:

   a) Calcula los productos escalares $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$ y $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

   b) Determina el módulo de cada uno de los vectores.

   c) Halla los ángulos formados por los vectores anteriores, tomados dos a dos.

2. Se consideran los vectores $\vec{u} = (2, 2, 2)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Halla todos los vectores, con módulo unidad, que forman un ángulo de 30° con $\vec{u}$ y de 45° con $\vec{v}$.

3. Dados los vectores unitarios $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, que satisfacen la condición $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, calcula el valor de la expresión $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.

4. Calcula un vector $\vec{u}$ que satisfaga, en cada caso, las siguientes condiciones:

   a) Que sea proporcional al vector $\vec{v} = (2, -1, 1)$ y además cumpla que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.

   b) Que sea perpendicular a los vectores $\vec{v} = (2, -1, 1)$ y $\vec{w} = (18, -22, -5)$ y además $|\vec{u}| = 14$.

   c) Que sea perpendicular al eje OZ y cumpla $\vec{u} \cdot \vec{v} = 9$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = -4$, siendo $\vec{v} = (3, -1, 5)$ y $\vec{w} = (1, 2, -3)$.

   d) Que cumpla $\vec{u} \cdot \vec{a} = -5$, $\vec{u} \cdot \vec{b} = -11$, $\vec{u} \cdot \vec{c} = 20$, siendo los vectores $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, -3, 2)$ y $\vec{c} = (3, 2, -4)$.

5. Encuentra un vector que sea perpendicular a $\vec{u} = (3, -2, 5)$ y que dependa linealmente de $\vec{v} = (1, -1, 3)$ y $\vec{w} = (-2, 2, 1)$.

6. Calcula el ángulo formado por las rectas de ecuaciones:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{-1} \qquad s: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$$

7. Calcula el ángulo formado por el plano $\pi: x - y + z = 0$ y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3}$.

8. Calcula el ángulo que forman los planos $\pi_1: x + y - 2z = 3$ y $\pi_2: -x + y + 2z = 2$.

9. Halla la distancia del punto $(4, 5, 6)$ al plano $\pi: x - 2y + 3z = 5$.

10. Halla los siguientes elementos geométricos:

    a) Ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 3, -1)$, es perpendicular al plano $\pi: x + z = 2$ y paralelo al eje OX.

    b) Ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano $\pi: x - y - z + 3 = 0$ y al plano OXZ.

    c) Ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano $\pi: x - 2y + 3 = 0$.

    d) Ecuación del plano que pasa por el punto $(-1, 0, 0)$ y es perpendicular a la recta

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

PÁGINA 151

■ 11. Encuentra, en la recta que pasa por los puntos $A(-1, 0, 1)$ y $B(1, 2, 3)$, un punto tal que su distancia al punto $C(2, -1, 1)$ sea de tres unidades.

■ 12. Halla la ecuación del plano π que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$, $(3, -2, 2)$, y es perpendicular al plano π_1: $2x - y - z = 0$, y las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π. Determina los puntos de r cuya distancia a π sea $\sqrt{3}$.

■ 13. Halla el punto simétrico del punto $A(1, -3, 7)$ respecto de la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-4}{2}$.

■ 14. Calcula la ecuación del plano en el que se encuentra el triángulo de vértices A, B y C, siendo:

A: El simétrico del punto $P(1, 2, 3)$ respecto al plano de ecuación $x = z$.

B: La proyección ortogonal del punto $Q(2, 1, 3)$ sobre el plano $z = 0$.

C: El origen de coordenadas.

■ 15. Dados los planos $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$

a) Analiza su posición relativa.

b) Halla el punto simétrico del origen de coordenadas respecto a la recta de intersección de los dos primeros planos.

c) Halla la proyección ortogonal del origen sobre el plano $x + 2y - z = 1$.

■ 16. Halla las proyecciones siguientes:

a) Del punto $P(4, -2, 1)$ sobre el plano $3x - 2y - 2z = -2$.

b) Del punto $P(4, -2, 1)$ sobre la recta $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-7}{-1}$.

c) De la recta $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$ sobre el plano $x + 2y + z = 1$.

■ 17. Encuentra los puntos situados a distancia 5 del origen y pertenecientes a la recta que pasa por los puntos $(1, 2, 5)$ y $(6, 5, 6)$.

■ 18. Halla la distancia que hay desde el origen de coordenadas al plano que contiene las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{4} \qquad s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{5}$$

■ 19. Calcula la proyección ortogonal del punto $O(0, 0, 0)$ sobre el plano $x + y + z = 1$.

■ 20. Sea P_1 el punto $(1, 0, -1)$, P_2 el punto simétrico de P_1 respecto del plano $x - 2y = 0$ y P_3 el punto simétrico de P_1 respecto del plano $x + 2y + z = 1$. Halla la ecuación del plano que pasa por P_1, P_2 y P_3.

■ 21. Halla el punto de la recta $\dfrac{x-5}{3} = y + 2 = \dfrac{z}{-1}$ que está más próximo al punto $(1, 0, 1)$.

■ 22. El plano OXZ es mediatriz de un segmento, uno de cuyos extremos es el punto $P(1, 6, -4)$. Halla el otro extremo.

■ 23. Halla las coordenadas del punto de la recta $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto $A(-4, 2, 2)$.

PÁGINA 152

ACTIVIDADES FINALES

24. Dados los puntos (1, 2, 3) y (1, 2, 1), ¿cuál es el conjunto de puntos que está a igual distancia de ambos?

25. Sea la recta $r: \begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ x + y - 4z = 3 \end{cases}$. Halla los puntos de esta recta tales que su distancia al origen de coordenadas es $\sqrt{14}$.

26. Si los puntos $P(2, 1, 2)$ y $Q(6, 1, 4)$ son los vértices opuestos de un cuadrado:

a) Calcula el área del cuadrado.

b) Obtén la ecuación del plano que pasa por el centro del cuadrado y es perpendicular a la diagonal que pasa por los vértices P y Q.

27. Los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(-1, 0, 0)$ son dos vértices consecutivos de un rectángulo, y los otros dos vértices pertenecen a la recta r que pasa por el punto $C(4, 3, -5)$:

a) Halla la ecuación de la recta r y el plano π que contiene al rectángulo.

b) Halla las coordenadas de los otros dos vértices del rectángulo.

28. Dada la recta r de ecuación: $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a esa recta y el origen de coordenadas.

b) Halla la ecuación del plano que contiene a esa recta y es paralelo al plano $y - 6z + 1 = 0$.

c) Halla la ecuación del plano que contiene a esa recta y es perpendicular al plano OYZ.

29. Halla la ecuación de la recta que se apoya en las rectas r y s dadas y pasa por el origen de coordenadas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \qquad s: \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-2}$$

30. Halla la ecuación de la recta que se apoya en las rectas:

$$r: \frac{x-1}{3} = y + 2 = z - 1 \qquad s: \begin{cases} z = 4 \\ 2x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

y es paralela a la recta de ecuación:

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

31. Halla la ecuación de la recta contenida en el plano $2x - 2y + 5z = 3$ y perpendicular a la recta $\frac{x+1}{2} = -y + 2 = \frac{z}{3}$ en el punto $(-1, 2, 0)$.

PÁGINA 153

32. Dados el punto $P(3, 5, -1)$ y la recta $r: \frac{x-1}{2} = y + 2 = \frac{z+1}{4}$, halla un punto Q de la recta dada de modo que la recta PQ sea paralela al plano de ecuación $3x - 2y + z + 5 = 0$.

33. Sea el punto $A(1, 0, 0)$ y el plano $\pi: 2x + y - z = 1$. Halla:

    a) La ecuación del plano π' que pasa por A y no corta al plano dado.

    b) La distancia entre los planos π' y π.

34. Para cada valor de a, los puntos $P(1, 2, 3)$ y $P'(0, 1, a)$ son simétricos respecto a un plano. Halla la ecuación de dicho plano. En particular, encuentra el plano para $a = 2$.

35. Sea la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{4}$ y el plano $\pi: 2x + 4y + 4z = 5$. Halla:

    a) La distancia entre la recta y el plano.

    b) La ecuación del plano perpendicular al dado y que contenga a la recta r.

36. Halla la ecuación de la recta paralela al eje OY y que se apoya en las rectas r y s:

$$r: \begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ y - 2z - 3 = 0 \end{cases} \qquad s: x = -y = -z$$

37. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 1, 2)$ y es perpendicular a los planos $x - y + z = 3$ y OXZ.

38. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, 2, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

39. Halla la ecuación de la recta paralela al plano $2x - 2y + 5z = 3$ y perpendicular a la recta $\begin{cases} x + 5y + z = 9 \\ 3y + z = 6 \end{cases}$ en el punto $(1, 1, 3)$.

40. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 0, 0)$ y $\vec{w} = (2, 2, p)$, halla el valor de p para el cual los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{w}$ son ortogonales.

41. Halla el valor de a para el cual la recta $r: \begin{cases} 2x - 5y - 1 = 0 \\ x + 5z + 7 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x - 3y + az + 6 = 0$ son paralelos y, en este caso, halla la distancia entre ellos.

42. Halla el plano paralelo al plano $2x - y - z + 6 = 0$ y que diste de él $3\sqrt{6}$ unidades.

43. ¿Para qué valor de a la distancia entre la recta $r: \begin{cases} x = a + 4t \\ y = 2 \\ z = 5 + 3t \end{cases}$ y el plano $6x - 8z + 10 = 0$ es 3 unidades?

PÁGINA 154

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

44. Calcula el ángulo que forman los planos $x + 2y - z = 0$ y $x - 2y + 5z - 3 = 0$.

45. Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π, siendo:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3} \qquad \pi: x - y - z = 0$$

46. Calcula las coordenadas del punto de la recta r tal que forme un triángulo rectángulo en A con los puntos $A(1, 5, 6)$, $B(7, 6, 6)$, siendo r la recta de ecuaciones $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x - y - 3z = 2 \end{cases}$.

47. Halla el punto simétrico del origen respecto del plano $x + y + z = 1$.

48. Halla el punto simétrico del punto $A(2, 0, 1)$ respecto de la recta $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

49. Dados el punto $A(1, 0, -1)$ y el plano π: $2x - y + 3z = 4$, halla:
    a) La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a π.
    b) El punto simétrico de A respecto a π.
    c) De los planos que pasan por A y son perpendiculares a π, el plano que pasa por $B(2, 1, 2)$.
    d) La ecuación del plano que pasa por A y es paralelo a π.

50. Halla un punto de la recta $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ que equidiste de los puntos $A(1, 0, 1)$ y $B(0, 4, 2)$.

51. Halla el valor de a para que el plano que pasa por el punto (a, a, a) y es perpendicular a los planos $x + y - z = 0$ y $2x + y - z = 2$ diste $\frac{2}{\sqrt{2}}$ unidades del punto $(0, 0, 0)$.

52. Dado el plano π: $x - y + z = 0$:
    a) Halla el simétrico del punto $P(1, 0, 1)$ respecto de π.
    b) Halla la recta simétrica de $r: x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{3}$ respecto de π.

53. Determina m, si es posible, para que el plano de ecuación $2mx - 3(m-1)y - (m+3)z + 2m + 4 = 0$ sea ortogonal a la recta de ecuación $2x = y = -2z$.

54. Halla las coordenadas del punto simétrico del $(2, 4, 2)$ respecto del punto $(1, 2, 3)$.

55. Se consideran los planos de ecuaciones

$$\pi_1: -ax - y + az = 0 \qquad \pi_2: (a+3)x + \frac{y}{a} - z = 1 \quad ; \quad a \neq 0$$

    a) Estudia su posición relativa en función de a.
    b) Si para $a = -2$ los planos contienen las caras de un cubo, calcula el volumen del cubo.