Unidad 6 – Geometría euclídea. Producto escalar

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dados los vectores $\vec{u} = (2, -5, 3)$; $\vec{v} = (4, -3, 2)$ y $\vec{w} = (0, 2, -7)$:

   a) Calcula los productos escalares $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{w}$ y $\vec{v} \cdot \vec{w}$.

   b) Determina el módulo de cada uno de los vectores.

   c) Halla los ángulos formados por los vectores anteriores, tomados dos a dos.

2. Se consideran los vectores $\vec{u} = (2, 2, 2)$ y $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Halla todos los vectores, con módulo unidad, que forman un ángulo de 30° con $\vec{u}$ y de 45° con $\vec{v}$.

3. Dados los vectores unitarios $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, que satisfacen la condición $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$, calcula el valor de la expresión $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{w} \cdot \vec{u}$.

4. Calcula un vector $\vec{u}$ que satisfaga, en cada caso, las siguientes condiciones:

   a) Que sea proporcional al vector $\vec{v} = (2, -1, 1)$ y además cumpla que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.

   b) Que sea perpendicular a los vectores $\vec{v} = (2, -1, 1)$ y $\vec{w} = (18, -22, -5)$ y además $|\vec{u}| = 14$.

   c) Que sea perpendicular al eje OZ y cumpla $\vec{u} \cdot \vec{v} = 9$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = -4$, siendo $\vec{v} = (3, -1, 5)$ y $\vec{w} = (1, 2, -3)$.

   d) Que cumpla $\vec{u} \cdot \vec{a} = -5$, $\vec{u} \cdot \vec{b} = -11$, $\vec{u} \cdot \vec{c} = 20$, siendo los vectores $\vec{a} = (2, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, -3, 2)$ y $\vec{c} = (3, 2, -4)$.

5. Encuentra un vector que sea perpendicular a $\vec{u} = (3, -2, 5)$ y que dependa linealmente de $\vec{v} = (1, -1, 3)$ y $\vec{w} = (-2, 2, 1)$.

6. Calcula el ángulo formado por las rectas de ecuaciones:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+1}{-1} \qquad s: \frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-2}$$

7. Calcula el ángulo formado por el plano $\pi: x - y + z = 0$ y la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{3}$.

8. Calcula el ángulo que forman los planos $\pi_1: x + y - 2z = 3$ y $\pi_2: -x + y + 2z = 2$.

9. Halla la distancia del punto $(4, 5, 6)$ al plano $\pi: x - 2y + 3z = 5$.

10. Halla los siguientes elementos geométricos:

    a) Ecuación del plano que pasa por el punto $(1, 3, -1)$, es perpendicular al plano $\pi: x + z = 2$ y paralelo al eje OX.

    b) Ecuación del plano que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano $\pi: x - y - z + 3 = 0$ y al plano OXZ.

    c) Ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano $\pi: x - 2y + 3 = 0$.

    d) Ecuación del plano que pasa por el punto $(-1, 0, 0)$ y es perpendicular a la recta

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

SOLUCIONES

1. Queda:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=8+15+6=29, \vec{u}\cdot\vec{w}=0-10-21=-31, \vec{v}\cdot\vec{w}=0-6-14=-20.$

b) Los módulos de los vectores son:

$$|\vec{u}| = \sqrt{4+25+9} = \sqrt{38};\ |\vec{v}| = \sqrt{16+9+4} = \sqrt{29}.$$
$$|\vec{w}| = \sqrt{0+4+49} = \sqrt{53}$$

c) Los ángulos de los vectores, tomados dos a dos, son:

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{29}{\sqrt{38}\sqrt{29}} = \frac{29}{33{,}2} = 0{,}87$$

luego $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 29^\circ\ 17'\ 7''$

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|} = \frac{-31}{\sqrt{38}\sqrt{53}} = \frac{-31}{44{,}88} = -0{,}69$$

luego $(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = 133^\circ\ 41'\ 27{,}2''$

$$\cos(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = \frac{-20}{\sqrt{29}\sqrt{53}} = \frac{-20}{39{,}2} = -0{,}51$$

luego $(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = 120^\circ\ 40'\ 24{,}4''$

2. Sea $\vec{w}=(x,y,z)$ el vector buscado. Debe cumplir:

- $x^2+y^2+z^2=1$
- $\cos(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = \cos 30^\circ = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\,|\vec{w}|} = 0{,}866$

  luego $\dfrac{2x+2y+2z}{\sqrt{12}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0{,}866$

- $\cos(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) = \cos 45^\circ = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|} = 0{,}707$

  luego $\dfrac{x+z}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = 0{,}707$

La solución del sistema $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x+2y+2z=3 \\ x+z=1 \end{cases}$ son los vectores:

$$\left(\frac{\sqrt{2}+2}{4},\frac{1}{2},\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right) \text{ y } \left(\frac{\sqrt{2}-2}{4},\frac{1}{2},\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)$$

3. Se cumple que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{w}\cdot\vec{w}=1$ y $\vec{w}=-\vec{u}-\vec{v}$.

   Sustituyendo en la expresión $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{w}\cdot\vec{u}$, se obtiene:

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{w}+\vec{w}\cdot\vec{u} &= \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}(-\vec{u}-\vec{v})+\\ &+(-\vec{u}-\vec{v})\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{v}-\\ &-\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{u}=-\vec{v}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{v}\cdot\vec{u}=\\ &=-1-1-\vec{u}\cdot\vec{v}=-\vec{u}\cdot\vec{v}-2\end{aligned}$$

4. Queda:

   a) El vector $\vec{u}$ es de la forma $\vec{u}=(2k,-k,k)$ y como cumple $\vec{u}\cdot\vec{v}=3$ se tiene $4k+k+k=3; 6k=3; k=1/2$.

   b) El vector $\vec{u}$ será proporcional a $\vec{v}\times\vec{w}$ al ser perpendicular a ambos. Luego $u=k(\vec{v}\times\vec{w})=(27k,28k,-26k)$. además cumple $|\vec{u}|=14$, lo cual conduce a $729k^2+784k^2+676k^2=196$. por tanto, $k=14/\sqrt{2.189}\approx 0,3$

   por tanto, el vector $\vec{u}$ buscado es $\vec{u}=(8;8,4;-7,8)$

   c) El vector $\vec{u}=(a,b,c)$ debe cumplir:

$$\begin{cases} c=0 \\ 3a-b+5c=9 \\ a+2b-3c=-4 \end{cases}$$

   La solución del sistema es $a=2, b=-3, c=0$.

   Por tanto, el vector $\vec{u}$ buscado es $\vec{u}=(2,-3,0)$

   d) El vector $\vec{u}=(a,b,c)$ debe cumplir:

$$\begin{cases} 2a-b+3c=-5 \\ a-3b+2c=-11 \\ 3a+2b-4c=20 \end{cases}$$

   La solución del sistema es $a=2, b=3$ y c = - 2

   Por tanto, el vector $\vec{u}$ buscado es $\vec{u}=(2,3,-2)$.

5. Todos los vectores de la forma (a,b,c) que cumplen las condiciones de problema están sujetos a las siguientes condiciones:

$$(a,b,c)\cdot(3,-2,5)=0$$
$$(a,b,c)=(1,-1,3)+n(-2,2,1)$$

   Operando, se encuentra que todos los vectores (a,b,c) que cumplen las condiciones anteriores son la de forma $(-7t,7t,7t)$ con $t\in\mathbb{R}$.

   Para encontrar uno de ellos basta fijar un valor del parámetro t.

6. Los vectores direccionales son $\vec{u}=(2,-2,-1)$ y $\vec{v}=(-1,3,-2)$. el ángulo que forman es:

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{-6}{\sqrt{9}\sqrt{14}} = -0{,}535;$$

luego $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 122°\ 18'\ 41{,}5''$

7. El vector normal del plano $\vec{u}=(1,-1,1)$ y el direccional de la recta $\vec{v}=(2,-1,1)$ el ángulo que forman el plano y la recta es:

$$\operatorname{sen}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{6}{\sqrt{3}\sqrt{14}} = 0{,}926;$$

luego $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 67°\ 47'\ 32{,}44''$

8. Los vectores normales de los planos son $\vec{u}=(1,1,-2)$ y $\vec{v}=(-1,1,2)$. El ángulo que forman es:

$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \frac{-4}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = -0{,}667$$

luego $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 131°\ 47'\ 37{,}1''$

9. La distancia es:

$$d=\frac{|4-2\cdot 5+3\cdot 6-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{7}{\sqrt{14}}=1{,}871$$

10. Queda:

a) El plano viene determinado por el punto $(1,3,-1)$ y los vectores $(1,0,1)$ y $(1,0,0)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z+1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff y-3=0$$

b) El plano viene determinado por el punto $(0,0,0)$ y los vectores $(1,-1,-1)$ y $(0,1,0)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff x+z=0$$

c) La recta viene determinada por el punto $(0,0,0)$ y el vector $(1,-2,0)$. Su ecuación es:

$$\left.\begin{array}{r} x=t \\ y=-2t \\ z=0 \end{array}\right\} \; t\in\mathbb{R}$$

d) El plano tiene como vector normal $\vec{n}=(0,1,1)$. Su ecuación es de la forma:

$$y+z+d=0$$

Al pasar por el punto $(-1,0,0)$ se cumple: $0+0+d=0 \Leftrightarrow d=0$

La ecuación del plano buscada es: $y+z=0$.

PÁGINA 151

■ 11. Encuentra, en la recta que pasa por los puntos $A(-1, 0, 1)$ y $B(1, 2, 3)$, un punto tal que su distancia al punto $C(2, -1, 1)$ sea de tres unidades.

■ 12. Halla la ecuación del plano π que pasa por los puntos $(1, 1, 1)$, $(3, -2, 2)$, y es perpendicular al plano π_1: $2x - y - z = 0$, y las ecuaciones de la recta r que pasa por el punto $(1, 1, 1)$ y es perpendicular al plano π. Determina los puntos de r cuya distancia a π sea $\sqrt{3}$.

■ 13. Halla el punto simétrico del punto $A(1, -3, 7)$ respecto de la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-4}{2}$.

■ 14. Calcula la ecuación del plano en el que se encuentra el triángulo de vértices A, B y C, siendo:

A: El simétrico del punto $P(1, 2, 3)$ respecto al plano de ecuación $x = z$.

B: La proyección ortogonal del punto $Q(2, 1, 3)$ sobre el plano $z = 0$.

C: El origen de coordenadas.

■ 15. Dados los planos $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$

a) Analiza su posición relativa.

b) Halla el punto simétrico del origen de coordenadas respecto a la recta de intersección de los dos primeros planos.

c) Halla la proyección ortogonal del origen sobre el plano $x + 2y - z = 1$.

■ 16. Halla las proyecciones siguientes:

a) Del punto $P(4, -2, 1)$ sobre el plano $3x - 2y - 2z = -2$.

b) Del punto $P(4, -2, 1)$ sobre la recta $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{5} = \dfrac{z-7}{-1}$.

c) De la recta $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$ sobre el plano $x + 2y + z = 1$.

■ 17. Encuentra los puntos situados a distancia 5 del origen y pertenecientes a la recta que pasa por los puntos $(1, 2, 5)$ y $(6, 5, 6)$.

■ 18. Halla la distancia que hay desde el origen de coordenadas al plano que contiene las rectas:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{4} \qquad s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{5}$$

■ 19. Calcula la proyección ortogonal del punto $O(0, 0, 0)$ sobre el plano $x + y + z = 1$.

■ 20. Sea P_1 el punto $(1, 0, -1)$, P_2 el punto simétrico de P_1 respecto del plano $x - 2y = 0$ y P_3 el punto simétrico de P_1 respecto del plano $x + 2y + z = 1$. Halla la ecuación del plano que pasa por P_1, P_2 y P_3.

■ 21. Halla el punto de la recta $\dfrac{x-5}{3} = y + 2 = \dfrac{z}{-1}$ que está más próximo al punto $(1, 0, 1)$.

■ 22. El plano OXZ es mediatriz de un segmento, uno de cuyos extremos es el punto $P(1, 6, -4)$. Halla el otro extremo.

■ 23. Halla las coordenadas del punto de la recta $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto $A(-4, 2, 2)$.

11. Un punto genérico de la recta que pasa por A y B tiene por expresión: $(-1+2t, 2t, 1+2t)$

La distancia de este punto al punto C es 3, por tanto: $\sqrt{(2t-3)^2+(2t+1)^2+(2t)^2}=3$

Operando, se obtiene $t=\frac{1}{2}$ y $t=\frac{1}{6}$. Estos valores de t dan los puntos: $(0,1,2)$ y $(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{4}{3})$.

12. El plano pedido viene determinado por el punto $(1,1,1)$ y los vectores $\vec{u}=(2,-3,1)$ y $\vec{v}=(2,-1,-1)$.

Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = x+y+z-3=0$$

La recta r viene determinada por el punto $(1,1,1)$ y el vector $\vec{u}=(1,1,1)$, su ecuación en forma continua es:

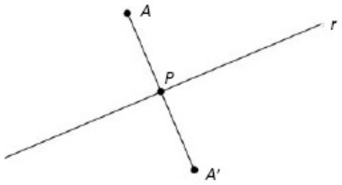
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$$

Un punto cualquiera de r es de forma $(1+t, 1+t, 1+t)$. Su distancia al plano π al ser $\sqrt{3}$ se cumple:

$$\frac{|(1+t)+(1+t)+(1+t)-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}$$

Operando, se obtiene $t=1$ y $t=-1$ y los puntos buscados son $(2,2,2)$ y $(0,0,0)$.

13. El punto P pertenece a la recta r y es tal que el vector AP y el director de la recta son perpendiculares.



Para la determinación del punto P. procedemos así:

- Tomamos un punto P$(1+t, -3+t, 4+2t)$ genérico de la recta r.
- Formamos el vector AP$(t, t, 2t-3)$.
- Este vector y $\vec{u}=(1,1,2)$ son perpendiculares, por tanto

  $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow t+t+4t-6=0 \Rightarrow t=1.$

  El valor $t=1$ conduce al punto $P(2,-2,6)$.

  Determinamos A' considerando que P es el punto medio del segmento AA'. Obtenemos $A'(3,-1,5)$.

14. El punto A simétrico del punto $P(1,2,3)$ respecto del plano de ecuación $x=z$ tiene por coordenadas $A(3,2,1)$.

El punto B proy. ortogonal de $Q(2,1,3)$ sobre el plano $z=0$ tiene por coordenadas $B(2,1,0)$.

La ecuación del plano que pasa por los puntos $A(3,2,1)$, $B(2,1,0)$ y $C(0,0,0)$ es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x-2y+z=0$$

15. Queda:

a) El rango de la matriz de los coeficientes es dos y el de la matriz ampliada es tres, por tanto, los planos se cortan dos a dos.

b)La recta r: $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y-z=0 \end{cases}$ expresada en forma continua es $\frac{x+1/3}{1}=\frac{y-2/3}{1}=\frac{z}{3}$

Procediendo como en la actividad numero 13. Se obtiene el punto de coordenadas $(\frac{-8}{11},\frac{14}{11},\frac{-2}{11})$ como el simétrico del origen respecto a la recta en cuestión.

c) La proyección ortogonal del origen sobre el plano $x+2y-z=1$, es el punto de intersección entre el plano $x+2y-z=1$ y la recta que pasa por el origen y es perpendicular al plano anterior.

La ecuación citada de la recta es: $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}$

La proyección ortogonal es la solución del sistema $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+z=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ que es: $(1/6, 1/3, -1/6)$.

16. Queda:

a) Es la solución del sistema $\begin{cases} 3x-2y-2z=-2 \\ 2x+3y=2 \\ y-z=-3 \end{cases}$ que es: $\left(\frac{20}{17},-\frac{2}{17},\frac{49}{17}\right)$

b) Sea $Q(3t+1, 5t+1, -t+7)$ un punto genérico de la recta. El punto Q proyección de P debe cumplir: $QP\cdot(3,5,-1)=0$. Por tanto, $35t=0 \Rightarrow t=0$, el punto buscado es $(1,1,7)$.

c) Hallamos el plano que contiene a la recta y es perpendicular al plano dado: $3x-4y+5z=1$. La recta pedida es la intersección de este plano y del dado:

$$\begin{cases} 3x-4y+5z=1 \\ x+2y+z=1 \end{cases}$$

17. La recta que pasa por los puntos $(1,2,5)$ y $(6,5,6)$ tiene por ecuación:

$$\frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

El punto $P(5t+1,3t+2,t+5)$ pertenece a la recta anterior. Los puntos a distancia 5 del origen cumplen $d(P,0)=5$.

Desarrollando $\sqrt{(5t+1)^2+(3t+2)^2+(t+5)^2}=5$ obtenemos $t=-\frac{5}{7}$ y $t=-\frac{1}{5}$.

Los puntos pedidos son $\left(\frac{-18}{7},\frac{-1}{7},\frac{30}{7}\right)$ y $\left(0,\frac{7}{5},\frac{24}{5}\right)$.

18. Las rectas se cruzan por tanto no hay ningún plano que las contenga.

19. El punto buscado es la solución del sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y \qquad =0 \\ \quad\; y-z=0 \end{cases}$$

Donde la solución es el punto $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

20. Las coordenadas de los puntos P_2 y P_3 son:

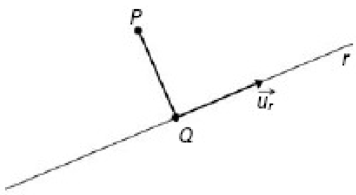
$P_2\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5},-1\right)$ y $P_3\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right)$

El plano que pasa por P_1, P_2 y P_3 tiene por ecuación:

$$0=\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ -2/5 & 4/5 & 0 \\ -1/3 & -2/3 & -1/3 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 2x+y-4z-6=0$$

21. Sea el punto $P(1,0,1)$ y la recta r: $\frac{x-5}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{-1}$.

El punto buscado será el punto Q; proyección ortogonal del punto P sobre la recta r.
Sea $Q(5+3t,-2+t,-t)$ un punto cualquiera de la recta r.



Los vectores $PQ=(3t+4,t-2,-t-1)$ y $\vec{u}=(3,1,-1)$ son perpendiculares. Se cumple:

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{u}_r=0 \Leftrightarrow 9t+12+t-2+t+1=0 \Leftrightarrow t=-1.$$

El punto buscado es $Q(2,-3,1)$.

22. El punto M proyección del punto $P(1,6,-4)$ sobre el plano OXZ, es decir sobre $y=0$, es el punto solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x=1 \\ y=6+t \\ z=-4 \end{array}\right\} \; t\in\mathbb{R}$$

Las coordenadas del punto M son $(1,0,-4)$.

El punto $M(1,0,-4)$ es el punto medio del segmento de extremos $P(1,6,-4)$ y $P'(x',y',z')$.

Las coordenadas de P' son:

$$\begin{cases} \dfrac{x'+1}{2}=1 \\[2ex] \dfrac{y'+6}{2}=0 \\[2ex] \dfrac{z'-4}{2}=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=1 \\ y'=-6 \\ z'=-4 \end{cases} \Rightarrow P'(1,-6,-4)$$

23. El punto buscado es la intersección de la recta dada con el plano mediatriz del segmento OA. Este plano tiene por ecuación $2x-y-z+6=0$ y al cortar con la recta dada obtenemos el punto (3, 7, 5).

PÁGINA 152

ACTIVIDADES FINALES

24. Dados los puntos (1, 2, 3) y (1, 2, 1), ¿cuál es el conjunto de puntos que está a igual distancia de ambos?

25. Sea la recta $r: \begin{cases} x - 2y + 2z = 3 \\ x + y - 4z = 3 \end{cases}$. Halla los puntos de esta recta tales que su distancia al origen de coordenadas es $\sqrt{14}$.

26. Si los puntos $P(2, 1, 2)$ y $Q(6, 1, 4)$ son los vértices opuestos de un cuadrado:

a) Calcula el área del cuadrado.

b) Obtén la ecuación del plano que pasa por el centro del cuadrado y es perpendicular a la diagonal que pasa por los vértices P y Q.

27. Los puntos $P(1, 1, 3)$ y $Q(-1, 0, 0)$ son dos vértices consecutivos de un rectángulo, y los otros dos vértices pertenecen a la recta r que pasa por el punto $C(4, 3, -5)$:

a) Halla la ecuación de la recta r y el plano π que contiene al rectángulo.

b) Halla las coordenadas de los otros dos vértices del rectángulo.

28. Dada la recta r de ecuación: $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0 \\ x + 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a esa recta y el origen de coordenadas.

b) Halla la ecuación del plano que contiene a esa recta y es paralelo al plano $y - 6z + 1 = 0$.

c) Halla la ecuación del plano que contiene a esa recta y es perpendicular al plano OYZ.

29. Halla la ecuación de la recta que se apoya en las rectas r y s dadas y pasa por el origen de coordenadas:

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \qquad s: \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-2}$$

30. Halla la ecuación de la recta que se apoya en las rectas:

$$r: \frac{x-1}{3} = y + 2 = z - 1 \qquad s: \begin{cases} z = 4 \\ 2x - y + 7 = 0 \end{cases}$$

y es paralela a la recta de ecuación:

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

31. Halla la ecuación de la recta contenida en el plano $2x - 2y + 5z = 3$ y perpendicular a la recta $\frac{x+1}{2} = -y + 2 = \frac{z}{3}$ en el punto $(-1, 2, 0)$.

SOLUCIONES

24. El plano que pasa por el punto medio (1, 2, 2), del segmento cuyos extremos son los puntos dados y tiene como vector normal (0, 0, 2).

Su ecuación es $(x-1)\cdot 0+(y-2)\cdot 0+(z-2)\cdot 2=0$, luego $z=2$.

25. Sea $P(3+2t, 2t, t)$ un punto genérico de la recta r.

Desarrollando la condición $d(P,0)=\sqrt{14}$, obtenemos:

$$\sqrt{(3+2t)^2+4t^2+t^2}=\sqrt{14} \Rightarrow 9t^2+12t-5=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{3} \quad \text{o} \quad t=-\frac{5}{3}$$

Para $t=\frac{1}{3} \Rightarrow P\left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ y

para $t=-\frac{5}{3} \Rightarrow P\left(-\frac{1}{3}, \frac{-10}{3}, \frac{-5}{3}\right)$

26. Queda:

a) La diagonal d del cuadrado mide $d=\sqrt{4^2+0^2+4}=\sqrt{20}$

Con este valor de la diagonal, el lado mide $l=\sqrt{10}$ y, por tanto, el área del cuadrado es 10.

b) El plano pedido pasa por el punto (4, 1, 3) y tiene como vector normal $(4,0,2)$. Su ecuación es:

$$4(x-4)+0\cdot(y-1)+2(z-3)=0 \Rightarrow 2x+z=11$$

27. Queda:

a) La recta r viene determinada por el punto $C(4,3,-5)$ y por el vector $\vec{v}=QP=(2,1,3)$, y su ecuación es:

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{3}$$

El plano es $14x-25y-z+14=0$.

b) Los otros vértices del rectángulo son los puntos:

$$\left(\frac{44}{7}, \frac{29}{7}, -\frac{11}{7}\right) \text{ y } \left(\frac{30}{7}, \frac{22}{7}, \frac{-32}{7}\right)$$

28. La ecuación del haz de planos cuya arista es la recta r es:

$$(3x-y+2z-6)+t(x+2y-z-2)=0.$$

El plano del haz que pasa por $O(0,0,0)$ cumple:

$$(3\cdot 0-0+2\cdot 0-6)+t(0+2\cdot 0-0-2)=0 \Leftrightarrow -6-2t=0 \Leftrightarrow t=-3.$$

Para $t=-3$ el plano buscado es $7y-5z=0$.

29. La recta pedida vendrá dada como intersección de los siguientes planos:

- Plano π_1 que contiene a r y al punto (0, 0,0)
- Plano π_2 que contiene a s y al punto (0, 0,0)

$$\pi_1 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x-2y+z=0$$

$$\pi_2 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad 13x-10y+11z=0$$

La recta tendrá de ecuación: $\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 13x-10y+11z=0 \end{cases}$

30. La recta pedida vendrá dada como intersección del plano π_1 que contiene a r y al vector $\vec{v}(-3,1,2)$ y del plano π_2 que contiene a s y al vector $\vec{v}(-3,1,2)$

$$\pi_1 = \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad x-9y+6z-25=0$$

$$\pi_2 = \begin{vmatrix} x & y-7 & z-4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad 4x-2y+7z-14=0$$

La recta tendrá de ecuación: $\begin{cases} x-9y+6z-25=0 \\ 4x-2y+7z-14=0 \end{cases}$

31. La ecuación del plano perpendicular a la recta $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{3}$ que pasa por el punto $(-1,2,0)$ es:

$$2(x+1)+(-1)(y-2)+3\cdot(z-0)=0$$

Operando, obtenemos:

$$2x-y+3z=-4$$

La recta buscada es la que viene dada como intersección de los planos:

$$\begin{cases} 2x-2y+5z=3 \\ 2x-y+3z=-4 \end{cases}$$

PÁGINA 153

■ 32. Dados el punto $P(3, 5, -1)$ y la recta $r: \frac{x-1}{2} = y + 2 = \frac{z+1}{4}$, halla un punto Q de la recta dada de modo que la recta PQ sea paralela al plano de ecuación $3x - 2y + z + 5 = 0$.

■ 33. Sea el punto $A(1, 0, 0)$ y el plano $\pi: 2x + y - z = 1$. Halla:

a) La ecuación del plano π' que pasa por A y no corta al plano dado.

b) La distancia entre los planos π' y π.

■ 34. Para cada valor de a, los puntos $P(1, 2, 3)$ y $P'(0, 1, a)$ son simétricos respecto a un plano. Halla la ecuación de dicho plano. En particular, encuentra el plano para $a = 2$.

■ 35. Sea la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{4}$ y el plano $\pi: 2x + 4y + 4z = 5$. Halla:

a) La distancia entre la recta y el plano.

b) La ecuación del plano perpendicular al dado y que contenga a la recta r.

■ 36. Halla la ecuación de la recta paralela al eje OY y que se apoya en las rectas r y s:

$$r: \begin{cases} x + 3y - 4 = 0 \\ y - 2z - 3 = 0 \end{cases} \qquad s: x = -y = -z$$

■ 37. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1, 1, 2)$ y es perpendicular a los planos $x - y + z = 3$ y OXZ.

■ 38. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1, 2, 2)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r: \begin{cases} x - y - z = 1 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

■ 39. Halla la ecuación de la recta paralela al plano $2x - 2y + 5z = 3$ y perpendicular a la recta $\begin{cases} x + 5y + z = 9 \\ 3y + z = 6 \end{cases}$ en el punto $(1, 1, 3)$.

■ 40. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 0, 0)$ y $\vec{w} = (2, 2, p)$, halla el valor de p para el cual los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{w}$ son ortogonales.

■ 41. Halla el valor de a para el cual la recta $r: \begin{cases} 2x - 5y - 1 = 0 \\ x + 5z + 7 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x - 3y + az + 6 = 0$ son paralelos y, en este caso, halla la distancia entre ellos.

■ 42. Halla el plano paralelo al plano $2x - y - z + 6 = 0$ y que diste de él $3\sqrt{6}$ unidades.

■ 43. ¿Para qué valor de a la distancia entre la recta $r: \begin{cases} x = a + 4t \\ y = 2 \\ z = 5 + 3t \end{cases}$ y el plano $6x - 8z + 10 = 0$ es 3 unidades?

32. Hallamos un plano paralelo al dado pasando por el punto P. cortando el plano con la recta dada obtenemos el punto Q pedido.

El plano tiene por ecuación $3x-2y+z+2=0$.

Resolvemos el sistema formado por el plano y la recta y obtenemos el punto Q de coordenadas $(-1,-3,-5)$.

33. Queda:

a) El plano que no corta al dado es un paralelo. Este plano pasando por A tiene de ecuación $2x+y-z-2=0$

b) La distancia entre planos paralelos la hacemos tomando un punto de uno de los planos y hallando la distancia al otro y obtenemos que esta distancia es $\frac{1}{\sqrt{6}}$ unidades.

34. El plano buscado es el plano mediatriz del segmento de extremos PP' y tiene por ecuación:

$$x+y(3-a)z+\frac{a^2-13}{2}=0$$

Para $a=2$ el plano tiene por ecuación $2x+2y+2z-9=0$

35. Queda:

a) La recta y el plano son paralelos. Para hallar la distancia entre ambos tomamos un punto de la recta y hallamos la distancia de este punto al plano y obtenemos 35/6 unidades.

b) El plano buscado tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z+3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 18x-9z-45=0$$

36. Hallamos el plano π_1 que contiene a la recta r y al vector de $OY(0,0,1)$ y hallamos el plano π_2 que contiene a la recta s y al mismo vector y obtenemos que su intersección nos da la recta buscada:

$$\pi_1\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -6 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad \pi_2\equiv\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{cases} x+6z+5=0 \\ x+z=0 \end{cases}$$

37. El plano pedido tiene por ecuación $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow x-z+1=0$

38. Hallamos el plano perpendicular a la recta dada y que pase por el punto dado y obtenemos su ecuación $y-z=0$.

Cortamos la recta dada con el plano y obtenemos el punto $A=(3,1,1)$

La recta perpendicular a la dada por el punto P es la recta que pasa por P y A:

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-2}{-1}$$

39. El vector de la reta que buscamos es perpendicular al de la recta dada y al vector normal del plano.

$$\begin{cases}(a,b,c)\cdot(2,-1,3)=0\\(a,b,c)\cdot(2,-2,5)=0\end{cases}$$

De este sistema obtenemos un vector de la recta de la forma $(-1,4,2)$.

La ecuación de la recta es $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-3}{2}$

40. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{w}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad p=-3$

41. La recta y el plano son paralelos si el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares de donde obtenemos que $a=-1$.

Para hallar la distancia entre esa recta y ese plano paralelo a ella tomemos un punto de la recta y hallamos la distancia de ese punto y obtenemos $\dfrac{8}{\sqrt{11}}$ unidades.

42. Todos los planos paralelos al dado son de la forma $2x-y-z+D=0$.

Tomamos un punto del plano dado, por ejemplo (0, 0, 6), y obligamos a que la distancia de este punto al plano que buscamos sea la dada. Obtenemos:

$$\left|\frac{-6+D}{\sqrt{6}}\right|=3\sqrt{6} \quad \text{de donde } D=24 \text{ o } D=-12.$$

Los planos buscados tienen por ecuaciones: $2x-y-z+24=0$ o $2x-y-z-12=0$

43. La recta y el plano dado son paralelos. Tomando un punto de la recta, por ejemplo $(a,2,5)$ y haciendo la distancia al plano e imponiendo que esta distancia es 3 obtenemos:

$\left|\dfrac{6a-30}{10}\right|=3$ de donde sacamos los valores de a: $a=0$ o $a=10$

PÁGINA 154

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

44. Calcula el ángulo que forman los planos $x + 2y - z = 0$ y $x - 2y + 5z - 3 = 0$.

45. Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π, siendo:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{3} \qquad \pi: x - y - z = 0$$

46. Calcula las coordenadas del punto de la recta r tal que forme un triángulo rectángulo en A con los puntos $A(1, 5, 6)$, $B(7, 6, 6)$, siendo r la recta de ecuaciones $\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ 2x - y - 3z = 2 \end{cases}$.

47. Halla el punto simétrico del origen respecto del plano $x + y + z = 1$.

48. Halla el punto simétrico del punto $A(2, 0, 1)$ respecto de la recta $\frac{x}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

49. Dados el punto $A(1, 0, -1)$ y el plano π: $2x - y + 3z = 4$, halla:
   a) La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a π.
   b) El punto simétrico de A respecto a π.
   c) De los planos que pasan por A y son perpendiculares a π, el plano que pasa por $B(2, 1, 2)$.
   d) La ecuación del plano que pasa por A y es paralelo a π.

50. Halla un punto de la recta $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{2}$ que equidiste de los puntos $A(1, 0, 1)$ y $B(0, 4, 2)$.

51. Halla el valor de a para que el plano que pasa por el punto (a, a, a) y es perpendicular a los planos $x + y - z = 0$ y $2x + y - z = 2$ diste $\frac{2}{\sqrt{2}}$ unidades del punto $(0, 0, 0)$.

52. Dado el plano π: $x - y + z = 0$:
   a) Halla el simétrico del punto $P(1, 0, 1)$ respecto de π.
   b) Halla la recta simétrica de $r: x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{3}$ respecto de π.

53. Determina m, si es posible, para que el plano de ecuación $2mx - 3(m-1)y - (m+3)z + 2m + 4 = 0$ sea ortogonal a la recta de ecuación $2x = y = -2z$.

54. Halla las coordenadas del punto simétrico del $(2, 4, 2)$ respecto del punto $(1, 2, 3)$.

55. Se consideran los planos de ecuaciones

$$\pi_1: -ax - y + az = 0 \qquad \pi_2: (a+3)x + \frac{y}{a} - z = 1 \quad ; \quad a \neq 0$$

   a) Estudia su posición relativa en función de a.
   b) Si para $a = -2$ los planos contienen las caras de un cubo, calcula el volumen del cubo.

44. El ángulo que forman los planos es el mismo que el formado por sus vectores normales. Su valor:

$$\cos(\widehat{\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}}) = \frac{\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}}{|\vec{n}_{\pi_1}|\,|\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{1+(-4)+(-5)}{\sqrt{6}\sqrt{30}} = 0{,}6$$

Luego el ángulo buscado es de $53^0\,23'44{,}6''$.

45. El ángulo buscado puede calcularse con el vector direccional de la recta $\vec{v}=(2,-1,3)$ y el normal al plano $\vec{n}=(1,-1,-1)$, a través de la expresión:

$$\text{sen}\,(\widehat{r,\pi}) = \text{sen}\,(\widehat{\vec{v},\vec{n}}) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{|\vec{v}|\,|\vec{n}|} = \frac{2+1-3}{\sqrt{14}\sqrt{3}} = 0$$

Luego el ángulo es 0^0 y, por tanto, la recta y el plano son paralelos.

46. Consideramos un punto genérico $P\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{3}t, \frac{4}{3}-\frac{7}{3}t, t\right)$ de la recta r.

Para que los puntos A, B y P formen un triangulo rectángulo en A debe cumplirse que $AP \cdot AB = 0$, es decir:

$\left(\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}, -\frac{7}{3}t-\frac{11}{3}, t-6\right)\cdot(6,1,0)=0$, luego $t=1$

El punto buscado es $(2,-1,1)$.

47. El punto proyección de $O(0,0,0)$ sobre el plano $x+y+z=1$ es el punto P solución del sistema formado por el plano y la recta perpendicular a el que pasa por el origen. Es decir, el punto P es solución de

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y \quad\;\; =0 \\ \quad\;\; y-z=0 \end{cases}$$

Por tanto, $P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},\right)$.

El punto $O'(x',y',z')$ cumple, con respecto a los puntos O y P la relación:

$$\frac{0+x'}{2} = \frac{1}{3},\quad \frac{0+y'}{2} = \frac{1}{3},\quad \frac{0+z'}{2} = \frac{1}{3}$$

Las coordenadas de O' son $x'=\frac{2}{3}, y'=\frac{2}{3}, z'=\frac{2}{3}$

48. Sea $P(2t,-t+3,t+2)$ un punto genérico de la recta para fijar este punto como punto medio del segmento AA' imponemos la condición $PA\cdot(2,-1,1)=0$. Es decir,

$(2t-2)\cdot 2+(-t+3)\cdot(-1)+(t+1)\cdot 1=0 \Rightarrow t=1$

El punto P es $P(2,2,3)$.

Las coordenadas de $A'(x',y',z')$ simétrico de A debe cumplir:

$$\frac{x'+2}{2}=2,\quad \frac{y'+0}{2}=2,\quad \frac{z'+1}{2}=3$$

Por tanto, $x'=2, y'=4, z'=5$.

49. Queda:

a) La ecuación de la recta es: $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{3}$

b) El punto P del plano π es el punto medio del segmento AA' es la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x-y+3z=4 \\ x+2y =1 \\ 3x -2z=5 \end{cases}$$

Las coordenadas de P son: $\left(\dfrac{24}{14},-\dfrac{5}{14},\dfrac{1}{14}\right)$

El punto simétrico de A, A' tiene por coordenadas: $\left(\dfrac{17}{7},-\dfrac{5}{7},\dfrac{8}{7}\right)$

c) El plano buscado $Ax+By+Cz=D$ debe cumplir:

$$\begin{cases} A-C=D \\ 2A+B+2C=D \\ 2A-B+3C=0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $2x-y+3z=-1$.

50. Sea $P(t,t+2,2t+3)$ un punto cualquiera de la recta dada. Se cumple:

$$d(P,A)=d(P,B)\Leftrightarrow\sqrt{(t-1)^2+(t+2)^2+(2t+2)^2}=\sqrt{t^2+(t-2)^2+(2t+1)^2}$$

Operando, obtenemos $t=-\dfrac{2}{5}$.

El punto buscado es $P\left(-\dfrac{2}{5},\dfrac{8}{5},\dfrac{11}{5}\right)$. Otra forma de resolver este problema es hallar el punto en el que se corta la recta dada con el plano mediatriz del segmento AB. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x-4y-z+9=0 \\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{2} \end{array}\right\}\Rightarrow P\left(-\dfrac{2}{5},\dfrac{8}{5},\dfrac{11}{5}\right)$$

51. El plano que pasa por (a,a,a) y es perpendicular a los planos dados tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-a & y-a & z-a \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y+z-2a=0$$

La condición de la distancia se expresa en la forma:

$$\frac{|0+0-2a|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |2a| = 2 \Leftrightarrow a=1 \text{ o } a=-1$$

Los planos son:

$$y+z-2=0 \quad \text{o} \quad y+z+2=0$$

52. Queda:

a) El punto proyección de P sobre el plano π es $M\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$. Este punto es el punto medio del segmento de extremos $P(1,0,1)$ y $P'(x',y',z')$. Por tanto,

$$\begin{cases} \dfrac{x'+1}{2} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{y'+0}{2} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{z'+1}{2} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1/3 \\ y' = 4/3 \\ z' = -1/3 \end{cases}$$

b) El simétrico del punto $P_1(1,0,1)$ perteneciente a la recta r es $P_1'\left(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

El simétrico del punto $Q_1(2,3,4)$ perteneciente a la recta r es $Q_1'(0,5,2)$.

La ecuación de la recta que pasa por P_1' y Q_1' es:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-5}{11} = \frac{z-2}{7}$$

53. El vector normal del plano es $\vec{n}(2m,-3m+3,-m-3)$ y un vector direccional de la recta es $(1,2,-1)$.

Si el plano es ortogonal a la recta los vectores anteriores deben ser proporcionales. Debe existir un único numero real que cumpla:

$(2m,-3m+3,-m-3)=k\cdot(1,2,-1)$.

Operando:

$$\begin{cases} 2\,m = k \\ -3\,m+3 = 2k \\ -m-3 = -k \end{cases}$$

El sistema carece de solución y por tanto no es posible determinar el m del enunciado.

54. Las coordenadas (x', y', z') del punto simétrico cumplen:

$$\begin{cases} \dfrac{x'+2}{2} = 1 \\ \dfrac{y'+4}{2} = 2 \\ \dfrac{z'+2}{2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = 4 \end{cases}$$

55. Quedan:

a) Si $a \neq -2$ los planos π_1 y π_2 se cortan en una recta.

Si $a = -2$ los planos π_1 y π_2 son paralelos.

b) Para $a = -2$ los planos son:

$$\pi_1 : 2x - y - 2z = 0$$
$$\pi_2 : 2x - y - 2z = 2$$

El valor de la arista del cubo será la distancia entre π_1 y π_2.

Esta distancia vale:

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(0, \pi_2) = \frac{|2 \cdot 0 - 0 - 2 \cdot 0 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}$$

El volumen del cubo es $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{8}{27}$ unidades cubicas.