# Unidad 5 – Geometría afín en el espacio

## ACTIVIDADES FINALES

### EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Dados en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A(2, 3, 5)$ y $B(1, 0, 8)$, halla:

   a) Las componentes de los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$.

   b) Dos puntos $C$ y $D$ tales que $\overrightarrow{CD}$ sea equipolente a $\overrightarrow{AB}$.

   c) El extremo $F$ de un vector fijo $\overrightarrow{EF}$ tal que sea equipolente a $\overrightarrow{AB}$, siendo $E(-3, 6, -9)$.

   d) El origen $G$ de un vector fijo $\overrightarrow{GH}$ tal que sea equipolente a $\overrightarrow{AB}$, siendo $H(3, 2, 9)$.

2. Dados los vectores libres $\vec{u} = (5, -2, 3)$ y $\vec{v} = (-4, 2, 1)$:

   a) Dibuja un representante de cada uno de ellos y de su suma.

   b) ¿Cuál es el extremo de $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{AB} = \vec{u} - \vec{v}$ y $A(0, 2, 0)$?

   c) ¿Cuáles son las componentes de los vectores $2\vec{u}$ y $3\vec{u} - 5\vec{v}$?

3. Halla dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $(5, 3, 5) = 2\vec{u} + 3\vec{v}$ y $(3, 2, 3) = \vec{u} + 2\vec{v}$.

4. Comprueba que son una base los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$: $\vec{u} = (1, 0, 2)$; $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ y $\vec{w} = (0, 2, -3)$. Calcula las coordenadas de los vectores $\vec{x} = (1, 1, 1)$ e $\vec{y} = (1, 2, 3)$ respecto de la base anterior.

5. Indica para qué valores de $t$ los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$; $\vec{v} = (2, 2, t)$ y $\vec{w} = (t, 0, 0)$ no forman una base de $\mathbb{R}^3$.

6. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y tiene como vector direccional el vector $\vec{v} = (6, 5, 4)$. Obtén seis puntos que pertenezcan a dicha recta.

7. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $P(1, 1, 0)$ y $Q(1, 0, 1)$.

8. Estudia si los puntos $A(3, -4, 2)$, $B(1, 2, 3)$ y $C(-1, 4, 6)$ están alineados.

9. Expresa cada una de las siguientes rectas de todas las formas que conozcas:

   a) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-4}{3}$ b) $\begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ x - 3y + z = 5 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

10. Halla la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la recta de ecuación $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y}{2} = -z$.

11. Halla la ecuación de los planos, en todas las formas que conozcas, determinados por las siguientes condiciones:

    a) Plano que pasa por el punto $P(2, -3, 5)$ y tiene como vectores direccionales a $\vec{u} = (1, 1, 2)$ y $\vec{v} = (3, -2, 1)$.

    b) Plano que pasa por los puntos $P(3, -1, 0)$ y $Q(1, -1, 3)$ y contiene el vector $\vec{v} = (1, 2, 3)$.

    c) Plano que contiene los puntos $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 0, 2)$ y $C(2, -1, 0)$.

12. Escribe las ecuaciones paramétricas del plano: $3x - y + 2z = 10$.

13. Escribe la ecuación implícita o general del plano: $x = 3 - t,\ y = 2 + s,\ z = t + s$.

## PÁGINA 127

14. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto $P(2, -4, 0)$ y contiene la recta:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3}$$

15. En cada uno de los siguientes apartados determina la ecuación del plano correspondiente:

a) Plano que pasa por los puntos $A(2, 1, 2)$ y $B(0, 1, -1)$, y es paralelo al eje $OY$.

b) Plano que contiene a las rectas $r$ y $s$:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = -1-t \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x + 2y = 5 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

c) Plano que pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es paralelo al plano $x - y + z = 4$.

16. Halla la ecuación del plano que contiene a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{7}$$

17. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, 0, -2)$ y es paralela a los planos: $x - y - 3z = 1$ ; $x - 3y + z = 5$.

18. Estudia la posición relativa de los planos en cada uno de los siguientes apartados:

a) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \\ 5x = 1 \end{cases}$

b) $\pi_1 \equiv x - 2y + z = 3;\ \ \pi_2 \equiv 2x + y = 4;\ \ \pi_3 \equiv 5y - 2z = -2$

c) $\begin{cases} x + 3y - 2z = -8 \\ 2x - y + z = 6 \\ 4x - 5y - 3z = 0 \end{cases}$

19. Determina, en cada caso, la posición relativa de la recta y el plano:

a) $\pi \equiv 3x - 2y + z = 3$ y $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{2} = z + 3$

b) $\pi \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t - 4s \\ y = -2 - t + 3s \\ z = 1 - t \end{cases}$ y $r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 0) + t(2, 1, -4)$

20. Estudia si las rectas $r: \begin{cases} 2x + z = 9 \\ y = 1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x + y = 0 \\ -x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$ se cortan, son paralelas o se cruzan.

Halla el plano que contiene a $s$ y es paralelo a $r$.

21. Estudia, según los valores de $b$, la posición relativa de las rectas:

$$r \equiv (x, y, z) = (1, 0, 2) + t(-3, 1, b) \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x+1}{3} = -y + 1 = z$$

22. Sea $m$ un número real; discute según los valores de $m$, la posición relativa de la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - my + z = 2 - m \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 3x + 2z = 2 - m$.

## PÁGINA 128

# ACTIVIDADES FINALES

## ACCESO A LA UNIVERSIDAD

23. ¿Para qué valores de $a$ el conjunto de vectores $(1, 1, 1)$; $(1, a, 1)$ y $(1, 1, a)$ es una base de $\mathbb{R}^3$?

24. Consideremos la recta $r$, el plano $\pi$ y el punto $P$, siendo:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-2}{5}; \qquad \pi: 2x - y + 3z = 1; \qquad P(1, 0, 4)$$

Obtén una recta $s$ paralela a $r$ que pase por el punto $P$. Calcula el punto de intersección de $\pi$ y $s$.

25. Halla las ecuaciones de la recta paralela a los planos $x + y = 1$, $x + z = 0$ y que pasa por el punto $(2, 0, 0)$.

26. Halla las ecuaciones de la recta que es paralela a la recta $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$ y pasa por el punto $(4, 5, 6)$.

27. Dado un tetraedro $ABCD$ de vértices $A(1, 2, 0)$, $B(2, 6, 0)$, $C(5, 3, 0)$ y $D(3, 4, 3)$:

a) Comprueba que los puntos medios de las aristas $AB$, $BD$, $CD$ y $CA$ están en un mismo plano y halla su ecuación.

b) El plano obtenido es paralelo a las otras dos aristas $CB$ y $AD$.

28. Siendo $r$ la recta determinada por las ecuaciones $\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi$ definido por $2x + y + mz = n$, halla $m$ y $n$, de modo que:

a) $r$ corte a $\pi$ b) $r$ y $\pi$ sean paralelos c) $r$ esté contenida en $\pi$

29. Halla la ecuación del plano que pasa por $(0, 0, 1)$ y contiene la recta $r: \begin{cases} 5x - 3y + 2z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \end{cases}$

30. Estudia la posición relativa de las rectas $r: \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2 - 3z \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 4 + 5z \\ y = 4z - 2 \end{cases}$

31. Estudia, según los valores del parámetro $m$, la posición relativa de las rectas:

$$r: \{x - 2z = 1, y - z = 2\} \quad \text{y} \quad s: \{x + y + z = 1, x - 2y + 2z = m\}$$

32. Estudia, para los diferentes valores de $m$, la posición relativa de los planos:

a) $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x + y + mz = 1 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} mx + z = 1 \\ my + z = 2 \\ y + z = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + z = 3 \\ mx + 10y + 4z = 11 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = m \\ 2x - 5y + mz = -2 \end{cases}$

33. El plano $x + y + z = 0$ y la recta de ecuaciones $x = 1 + t$; $y = 2 - t$; $z = -4 + t$ se cortan en el punto $A$. Halla de forma razonada la ecuación de la recta que pasa por $A$ y por $B(2, 2, 3)$.

34. De dos rectas en el espacio se sabe que no son coplanarias, ¿qué posiciones relativas pueden tener? Pon un ejemplo de cada una de las posiciones y razona la respuesta.

35. Prueba que los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera (en el espacio) son siempre vértices de un paralelogramo.