Unidad 4 – Espacios vectoriales. Aplicaciones lineales

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Demuestra que el conjunto de matrices 2×2 es un espacio vectorial real respecto a las operaciones suma de matrices y producto de un número real por una matriz, dadas por:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a_1 & b+b_1 \\ c+c_1 & d+d_1 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \cdot a & t \cdot b \\ t \cdot c & t \cdot d \end{pmatrix}$$

2. Sea $(V, +, \bullet_{\mathbb{R}})$ un espacio vectorial real. Demuestra que son ciertas las siguientes propiedades:

   a) $(t - s) \cdot \vec{v} = t \cdot \vec{v} - s \cdot \vec{v}$ $\quad \forall t, s \in \mathbb{R}$ y $\forall \vec{v} \in V$

   b) $t \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = t \cdot \vec{v} - t \cdot \vec{w}$ $\quad \forall t \in \mathbb{R}$ y $\forall \vec{v}, \vec{w} \in V$

   c) Si $\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w} \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$ $\quad \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

   d) $t \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow t = 0$ o $\vec{v} = \vec{0}$

3. Estudia cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

   a) $A = \{(x, x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$

   b) $B = \{(x, y, -x-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

   c) $C = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

   d) $D = \{(x, y, z) \mid x + y = 3; \ x, y, z \in \mathbb{R}\}$

4. Estudia si el conjunto de matrices que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las matrices 2×2.

5. En el espacio vectorial real de los polinomios $\{\mathbb{P}_2(x), +, \bullet_{\mathbb{R}}\}$ de grado menor o igual que 2, estudia si el subconjunto $\{P'(x), P''(x)\}$, siendo $P'(x)$ y $P''(x)$ los polinomios derivados de $P(x)$ y $P'(x)$, respectivamente, es un subespacio vectorial.

6. En el espacio vectorial real $(\mathbb{R}^3, +, \bullet_{\mathbb{R}})$ consideramos los vectores $\vec{v} = (1, 2, 0)$ y $\vec{w} = (1, 1, -1)$. Encuentra un vector $\vec{u}$ en cada uno de los siguientes casos:

   a) De forma que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sean linealmente dependientes.

   b) De forma que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sean linealmente independientes.

7. Halla el valor o valores de a de modo que el vector $(1, -6, a)$ sea linealmente independiente de los vectores $(2, 0, -1)$, $(1, 2, 1)$. ¿Cuánto ha de valer a para que el vector dado sea linealmente dependiente de los vectores $(2, 0, -1)$, $(1, 2, 1)$?

8. Halla el valor de x para que los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ sean linealmente dependientes:

$$(x, 2, 0), (x, 3x, 5) \text{ y } (1, x, 5)$$

9. Estudia si el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ $\{(1, 2, 3), (0, 2, 4), (0, 2, 0)\}$ forman una base de $\mathbb{R}^3$. En caso afirmativo halla las coordenadas del vector $(1, 1, 1)$ respecto de ella.

SOLUCIONES

1. Las propiedades asociativa y conmutativa se verifican ya que la suma de números reales que se establecen en los elementos de las matrices cumple las propiedades asociativa y conmutativa.

   El elemento neutro para la suma es la matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   El elemento simétrico de la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ para la suma es $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

   Veamos que se cumplen las propiedades para el producto.

2. a) $(t-s)\cdot\vec{v}=\left[t+(-s)\right]\cdot\vec{v}=t\cdot\vec{v}+(-s)\cdot\vec{v}=t\cdot\vec{v}+(-s\cdot\vec{v})=t\cdot\vec{v}-s\cdot\vec{v}\quad\forall t,s\in\mathbb{R}$ y $\forall\vec{v}\in V$.

   b) Sean $t\in\mathbb{R}$ y $\vec{v},\vec{w}\in V$, se cumple:

   $t\cdot(\vec{v}-\vec{w})=t\cdot[(\vec{v}+(-\vec{w})]=t\cdot\vec{v}+t\cdot(-\vec{w})=t\cdot\vec{v}+(-t\cdot\vec{w})=t\vec{v}-t\vec{w}.$

   c) Sean $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$ se cumple:

   $\vec{u}+\vec{w}+\vec{v}+\vec{w}\Rightarrow\vec{u}+\vec{w}-\vec{w}=\vec{v}+\vec{w}-\vec{w}\Rightarrow\vec{u}+(\vec{w}-\vec{w})=\vec{v}+(\vec{w}-\vec{w})\Rightarrow\vec{u}+\vec{0}=\vec{v}+\vec{0}\Rightarrow\vec{u}=\vec{v}.$

   d) Veamos la demostración de la condición necesaria. Sea $t\cdot\vec{v}=\vec{0}$ y $t\neq 0$, entonces existe $t^{-1}=\frac{1}{t}$ y se cumple:

$$t\cdot\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow\frac{1}{t}\cdot(t\cdot\vec{v})=\frac{1}{t}\cdot\vec{0}\Rightarrow\left(\frac{1}{t}\cdot t\right)\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1\cdot\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow\vec{v}=\vec{0}.$$

   Sea $t\cdot\vec{v}=\vec{0}$ y $\vec{v}\neq\vec{0}$ se cumple:

$$t\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow t\vec{v}=t\vec{0}\Rightarrow t\vec{v}-t\vec{0}=\vec{0}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow t(\vec{v}-\vec{0})=\vec{0}\Rightarrow t=0.$$

   Veamos la demostración de la condición suficiente.

   Si $t=0$, puede verse en el libro de texto la demostración de $t\cdot\vec{0}=\vec{0}$.

   Si $\vec{v}=\vec{0}$, también puede verse que $t\cdot\vec{0}=\vec{0}$.

3. La solución en cada caso es:

a) *A* es un subespacio vectorial al cumplirse:
$t(x_1, x_1, 0) + s(x_2, x_2, 0) = (tx_1 + sx_2, tx_1 + sx_2, 0) \in A.$

b) *B* también es un subespacio vectorial ya que:
$t(x_1, y_1, -x_1 - y_1) + s(x_2, y_2, -x_2 - y_2) = (tx_1 + sx_2, ty_1 + sy_2, -tx_1 - sx_2 - ty_1 - sy_2) \in B$

c) *C* es un subespacio vectorial al ser:
$t(x_1, 2x_1, 3x_1) + s(x_1, 2x_1, 3x_1) = (tx_1 + sx_2, 2(tx_1 + sx_2), 3(tx_1 + sx_2)) \in C.$

d) *D* no es subespacio vectorial al cumplirse que:
El vector (1, 2, 5) pertenece a D, lo mismo que (2, 1, 7);
pero la suma de ambos (1, 2, 5) + (2, 1, 7) = (3, 3, 12) no pertenece al cumplirse $x + y = 3 + 3 = 6 \neq 3.$

4. Las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ son de la forma $\begin{pmatrix} c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ con $c, d \in \mathbb{R}$.

Sea el conjunto $M = \left\{ \begin{pmatrix} c+d & 0 \\ c & d \end{pmatrix}; c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

Forma un subespacio vectorial al cumplirse:

$$\begin{pmatrix} c_1 + d_1 & 0 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 + d_2 & 0 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + d_1 + d_2 & 0 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{pmatrix} \in M$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} c_1 + d_1 & 0 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tc_1 + td_1 & 0 \\ tc_1 & td_1 \end{pmatrix} \in M$$

5. El conjunto del enunciado es un subespacio vectorial ya que las reglas de derivación permiten afirmar que:

$$[p(x) + q(x)]' = p'(x) + q'(x)$$
$$[t \cdot p(x)]' = t \cdot p'(x)$$
$$[p(x) + q(x)]'' = p''(x) + q''(x)$$
$$[t \cdot p(x)]'' = t \cdot p''(x)$$

6. a) el vector *u* puede ser cualquier combinación lineal de *v y w*, por ejemplo, *v + w*, es decir: $u = v + w = (1,2,0) + (1,1,-1) = (2,3,-1)$.

   b) en este caso habrá que tomar un vector *u* que no sea combinación lineal de *v* y *w,* es decir, que el determinante formado por los tres sea distinto de cero.

   Por ejemplo $u = (2,3,1)$ ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

7. Tiene que cumplirse para que sean linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & a \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 4a + 20 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -5.$$

   Para que sean linealmente dependientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & a \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4a + 20 = 0 \Leftrightarrow a = -5.$$

8. Se debe cumplir que el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ x & 3x & 5 \\ 1 & x & 5 \end{vmatrix} \text{ sea nulo.}$$

   Sin embargo, $\begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ x & 3x & 5 \\ 1 & x & 5 \end{vmatrix} = 10x^2 - 10x + 10$ no se anula para ningún valor real de *x.*

   Por tanto, no existe ningún valor de *x* que haga que los vectores sean linealmente dependientes.

9. Si forman una base al ser linealmente independientes ya que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8.$$

Sean *a, b* y *c* las coordenadas del vector (1, 1, 1) respecto de la base dada. Se cumplirá:

$$(1, 1, 1) = a(1, 2, 3) + b(0, 2, 4) + c(0, 2, 0)$$

Operando y resolviendo el sistema resultante:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = 1 \\ 2a + 2b + 2c = 1 \\ 3a + 4b & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1/2 \\ c = 0 \end{cases}$$

Las coordenadas son (1, ½, 0)

PÁGINA 103

■ 10. En el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual que 2 $\{\mathbb{P}_2(x), +, \bullet_{\mathbb{R}}\}$, estudia si los siguientes polinomios forman o no una base: $A(x) = x^2 + 1$; $B(x) = x^2 + x$; $C(x) = x + 1$. En caso afirmativo halla las coordenadas del polinomio $M(x) = x^2 - x + 2$ respecto a dicha base.

■ 11. Halla una base y la dimensión de los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:

$$S = \{(x, y, z) \mid x - 2z = 0; \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$$
$$T = \{(x, 0, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$E = \{(x, y, z) \mid x + y = 0; y + z = 0; x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

■ 12. Sea la aplicación:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \rightsquigarrow (x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2)$$

Demuestra que es una aplicación lineal, halla sus ecuaciones y su matriz asociada.

■ 13. Halla las ecuaciones de la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(-1, 1, 0) = (-1, 0) \qquad f(0, 0, 1) = (1, -1) \qquad f(1, 3, -1) = (0, 1)$$

■ 14. Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal de matriz asociada $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Halla $f(3, 5, -7)$ y $f^{-1}(1, 1)$.

■ 15. Sea $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f(e_1) = (2, 5, 0)$, $f(e_2) = (1, 1, 1)$ y $(3, 2, 1) \in Ker\, f$, siendo $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Halla $f(e_3)$, la matriz asociada a esta aplicación lineal, su núcleo y su imagen.

■ 16. Halla el núcleo y la imagen de la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(0, 1) = (1, 1, -2)$ y $f(-1, 1) = (2, -2, -4)$.

■ 17. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1, x_1 - x_2 - x_3, x_1 + 2x_2 + 2x_3)$. Halla el núcleo, la imagen y una base y la dimensión de estos.

■ 18. Dadas las aplicaciones lineales:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad\qquad g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x_1, x_2) \rightsquigarrow (2x_1, x_1 - x_2) \qquad\qquad (x_1, x_2) \rightsquigarrow (x_1 + x_2, -x_1)$$

Halla la aplicación compuesta $g \circ f$. ¿Esta aplicación es lineal? En caso afirmativo estudia qué relación existe entre su matriz asociada y las matrices asociadas a las aplicaciones lineales g y f.

■ 19. Estudia si es lineal la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, x_2) \rightsquigarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

En caso afirmativo halla su núcleo.

10. Consideramos a los polinomios x^2, x y 1 como la base canónica del espacio vectorial dado.

Los polinomios del enunciado tienen por coordenadas respecto a la base canónica:

$A(x) = x^2 + 1 = (1,0,1); B(x) = x^2 + x = (1,1,0)$ y $C(x) = x + 1 = (0,1,1)$.

Los vectores anteriores forman una base al cumplirse $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$.

Sean a, b y c las coordenadas de *M(x)* respecto a la base *{A(x), B(x), C(x)}*.

Se cumple: $(1,-1,2) = a(1,0,1) + b(1,1,0) + c(0,1,1)$.

Operando y resolviendo:

$$\begin{cases} a + b \quad = 1 \\ b + c = -1 \\ a + \quad c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b \quad = 1 \\ b + c = -1 \\ b - c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b \quad = 1 \\ b + c = -1 \\ 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Observa que se cumple:

$$x^2 - x + 2 = 2(x^2 + 1) - (x^2 + x) + 0 \cdot (x + 1).$$

11. Los vectores de *S* pueden ponerse en la forma:

$$(2z, y, z) = y(0,1,0) + z(2,0,1)$$

Los vectores $(0,1,0)$ y $(2,0,1)$ forman una base de *S* y su dimensión es 2.

Al ser $(x, 0, -x) = x(1,0,-1)$ para los vectores de *T* podemos considerar el vector $(1,0,-1)$ como una base de *T* su dimensión será 1.

En el caso del subespacio *E* podemos escribir:

$$(x, y, z) = (-y, y, -y) = y(-1, 1, -1)$$

El vector $(-1,1,-1)$ constituye una base de *E* y su dimensión es 1.

12. Veamos que la aplicación *f* es lineal.

Consideremos los vectores $\vec{v}=(x_1,x_2)$ y $\vec{w}=(z_1,z_2)$ de $\mathbb{R}^2$. Se cumple:

$$= (x_1 + z_1 + 2(x_2 + z_2), x_1 + z_1 - 2(x_2 + z_2)) =$$
$$= (x_1 + 2x_2 + z_1 + 2z_2, x_1 - 2x_2 + z_1 - 2z_2) =$$
$$= (x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2) + (z_1 + 2z_2, z_1 - 2z_2)$$

$$f(x_1,x_2)+f(z_1,z_2)=(x_1+2x_2,x_1-2x_2)+(z_1+2z_2,z_1-2z_2).$$

Además se cumple:

$$f[t(x_1, x_2)] = f(tx_1, tx_2) = (tx_1 + 2tx_2, tx_1 - 2tx_2)$$
$$t \cdot f(x_1, x_2) = t(x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2) = (tx_1 + 2tx_2, tx_1 - 2tx_2).$$

Las ecuaciones de esta aplicación son:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_1 - 2x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Su matriz asociada es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

13. Las ecuaciones de la aplicación lineal son de la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta las condiciones del enunciado:

$$f(-1, 1, 0) = (-1, 0) \Rightarrow \begin{cases} -a_{11} + a_{12} = -1 \\ -a_{21} + a_{22} = 0 \end{cases}$$

$$f(0, 0, 1) = (1, -1) \Rightarrow \begin{cases} a_{13} = 1 \\ a_{23} = -1 \end{cases}$$

$$f(1, 3, 1) = (0, 1) \Rightarrow \begin{cases} a_{11} + 3a_{12} - a_{13} = 0 \\ a_{21} + 3a_{22} - a_{23} = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos:

$a_{11}=1;\quad a_{12}=0;\quad a_{13}=1;\quad a_{21}=0;\quad a_{22}=0$ y $a_{23}=-1$.

Las ecuaciones buscadas son:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + x_3 \\ y_2 = -x_3 \end{cases}$$

La expresión de la aplicación es:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, -x_3)$$

14. Las ecuaciones de la aplicación lineal son:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Hallamos $f(3,5,-7)$:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $f(3,5,-7)=(29,-6)$.

Calculamos $f^{-1}(1,1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$x_1 = t$; $x_2 = 3 - 4t$; $x_3 = 4 - 6t$ con $t \in \mathbb{R}$

Por tanto,

$f^{-1}(1, 1) = \{(t, 3-4t, 4-6t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

15. Expresamos el vector $e_3 = (1,0,0)$ en combinación lineal de $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (3,2,1)$ al formar estos una base y obtenemos:

$$e_3 = (0, 0, 1) = -3(1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + (3, 2, 1)$$

Calculamos $f(e_3)$ teniendo en cuenta que f es una aplicación lineal:

$$\begin{aligned} f(e_3) &= f[-3(1, 0, 0) - 2(0, 1, 0) + (3, 2, 1)] = \\ &= -3f(1, 0, 0) - 2f(0, 1, 0) + f(3, 2, 1) = \\ &= -3(2, 5, 0) - 2(1, 1, 1) + (0, 0, 0) = (-8, -17, -2). \end{aligned}$$

La matriz asociada de la aplicación *f* es:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -8 \\ 5 & 1 & -17 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

El nucleo de la aplicación lineal es:

$$Ker\, f = \{(x_1, x_2, x_3) \mid f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)\}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 8x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 17x_3 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8x_3 \\ 5x_1 + x_2 = 17x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

Por tanto $Ker\, f = \{(x_1, x_1, x_1) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = \{3t, 2t, t\} \mid t \in \mathbb{R}$

Una base del nucleo es el vector (3, 2, 1) y la dimensión de *Ker f* es 1.
La imagen de la aplicación *f* es:

$$Im\, f = \{(y_1, y_2, y_3) \mid \exists\, (x_1, x_2, x_3);\, f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)\}$$

A partir de las ecuaciones de la aplicación

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 - 8x_3 \\ y_2 = 5x_1 + x_2 - 17x_3 \\ y_3 = x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

Y eliminando x_1, x_2, x_3 obtenemos la ecuación $5y_1 - 2y_2 - 3y_3 = 0$

Por tanto :

$$Im\, f = \{(y_1, 5/2\, y_1 - 3/2\, y_3, y_3)\} = (2t, 5t - 3s, 2s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

Una base del subespacio $\mathrm{Im}\, f$ $\{(2,5,0)\} = (2t, 5t-3s, 2s) \mid t, s \in \Re\}$ y su dimensión es 2.

16. las ecuaciones de la aplicación, en forma matricial son:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Las condiciones del enunciado nos conducen a:

$$\left.\begin{array}{l} f(0,1)=(1,1,-2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f(-1,1)=(2,-2,-4) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a=-1, b=1 \\ c=\ 3, d=1 \\ e=\ 2, f=-2 \end{array}$$

Por tanto las ecuaciones de la aplicación son:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = -x_1 + x_2 \\ y_2 = 3x_1 + x_2 \\ y_3 = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

El nucleo de esta aplicación contiene a los vectores $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ que cumplan $f(x_1, x_2) = (0,0,0)$, es decir, los que cumplen:

$$\begin{cases} -x_1 + \ x_2 = 0 \\ 3x_1 + \ x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

El nucleo de la aplicación es $Ker\ f = \{(0,0)\}$.

La imagen de esta aplicacion contiene a los vectores $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ que cumplen:

Existe $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3)$.

Los vectores buscados cumplen:

$$\begin{cases} y_1 = -x_1 + x_2 \\ y_2 = 3x_1 + x_2 \\ y_3 = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Eliminando x_1 y x_2 obtenemos: $2y_1 + y_3 = 0$.

Por tanto $Im\ f = \{(y_1, y_2, -2y_1)\} = \{(t, s, -2t) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$

Una base del subespacio *Im f* está formada por los vectores $\{(1, 0, -2), (0, 1, 0)\}$ y su dimensión es 2.

17. El nucleo de esta apicacion esta formado por los vectores $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que:

$$\begin{cases} 3x_1 & = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 & = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Por tanto Ker f = $\{(0, -x_3, x_3)\} = \{(0, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Una base del nucleo esta formada por el vector $(0, -1, 1)$ y su dimensión es 1.

La imagen de *f* está formada por los vectores $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ que cumplen:

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 \\ y_2 = x_1 - x_2 - x_3 \\ y_3 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Eliminando x_1, x_2, x_3 obtenemos: $y_1 - 2y_2 - y_3 = 0$.

Por tanto $Im\, f = \{(2y_2 + y_3, y_2, y_3)\} = \{(2t + s, t, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$.

Una base del subespacio imagen está formada por los vectores $\{(2, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ y su dimensión es 2.

18. La aplicación compuesta $g \circ f$ tiene por expresión:

$(g \circ f)(x_1, x_2) = g[f(x_1, x_2)] = g(2x_1, x_1 - x_2) = (3x_1 - x_2, -2x_1)$

Puede comprobarse sin dificultad que la aplicación anterior es lineal. Las matrices asociadas a las aplicaciones *f* y *g* son, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz asociada a la aplicación compuesta $g \circ f$ es $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Es fácil comprobar que:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

19. La expresión de la aplicación es $f(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2$. La aplicación es lineal al cumplir:

$f((x_1, x_2) + (z_1, z_2)) = f(x_1 + z_1, x_2 + z_2) = 2x_1 + 2z_1 - x_2 - z_2$

$f(x_1, x_2) + f(z_1, z_2) = 2x_1 - x_2 + 2z_1 - z_2 = 2x_1 + 2z_1 - x_2 - z_2$

$f[t(x_1, x_2)] = f[(tx_1, tx_2)] = 2tx_1 - tx_2$

$t f(x_1, x_2) = t(2x_1 - x_2) = 2tx_1 - tx_2$

El núcleo lo forman los vectores $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ que cumplen:

$$f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow 2x_1 - x_2 = 0$$

Por tanto *Ker f* $= \{(x_1, 2x_1)\} = \{(t, 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. El núcleo es un subespacio vectorial de dimensión 1.

PÁGINA 104

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

20. Sea la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(\vec{e}_1) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$; $f(\vec{e}_2) = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$; $f(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3$, siendo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Halla:

a) La matriz de esta aplicación lineal.

b) El núcleo y su dimensión.

c) La imagen y una base de la misma.

d) La imagen del vector $\vec{v} = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3$.

21. Prueba que el subconjunto T de $\mathbb{R}^3$ dado por $T = \{(x, y, z) \mid 2x - y - z = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Halla una base y su dimensión.

22. Consideremos la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(1, 2) = (-2, 1, 0)$; $f(1,0) = (6, -1, 2)$. Halla $f^{-1}(2, 7, -7)$.

23. Prueba que si los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, y $\vec{w}$ son linealmente independientes también lo son los vectores $\vec{u}$, $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

24. Razona para qué valor o valores de a los vectores $(1, 1, 0)$, $(a, 1, 1)$ y $(1, a, 0)$ forman una base de $\mathbb{R}^3$.

25. En $\mathbb{R}^3$ tomamos el subconjunto de vectores $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$. ¿Es este subconjunto un subespacio de $\mathbb{R}^3$? En caso afirmativo halla una base y su dimensión.

26. Sea V el espacio vectorial de los polinomios de coeficientes reales y grado menor o igual que 3. Sean los polinomios:

$$P_1(x) = 1 - x \quad ; \quad P_2(x) = x^2 + x \quad ; \quad P_3(x) = 1 - x^2 \quad ; \quad P_4(x) = x + x^3$$

Prueba que estos polinomios constituyen una base de V. Determina las coordenadas del polinomio $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ en dicha base.

27. Sea W el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual a 2. Sea f la aplicación:

$$f: W \longrightarrow W$$
$$P \rightsquigarrow P'$$

siendo P' el polinomio derivado del polinomio P. Demuestra que f es lineal y halla su núcleo.

28. Una aplicación g de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ viene dada por $g(1, 0, 0) = (2, 1, 1)$, $g(0, 1, 0) = (3, 0, -1)$, y su núcleo está engendrado por el vector $(1, 2, -1)$. ¿Qué vectores de $\mathbb{R}^3$ coinciden con su imagen en esta aplicación?

29. Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ definidos de la siguiente forma:

$$A = \{(x, y, z) \mid x \cdot z = 3; \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$$
$$B = \{(x, y, z) \mid x = y^2; \quad x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Estudia si son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

20. La solución en cada caso es:

a) La matriz de la aplicación lineal es:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}$$

b) El núcleo de *f* esta formado por los vectores $(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3$ que cumplen:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=0\\ x_1+x_2-x_3=0\\ x_1-x_2-3x_3=0\end{cases}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $\begin{cases}x_1=2x_3\\ x_2=-x_3\end{cases}$

El núcleo es $Ker\,f=\{(2x_3,-x_3,x_3)\}=\{(2t,-t,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$

El vector $(2,-1,1)$ constituye una base del nucleo y su dimensión es 1.

c) La imagen de *f* esta formada por los vectores $(y_1, y_2, y_3)\in\mathbb{R}^3$ que cumplen:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}y_1=x_1+3x_2+x_3\\ y_2=x_1+x_2-x_3\\ y_3=x_1-x_2-3x_3\end{cases}$$

Eliminando x_1, x_2, x_3, obtenemos: $y_1-2y_2+y_3=0$.

La imagen es $\operatorname{Im} f=\{(2y_2-y_3, y_2, y_3)\}=\{(2t-s,t,s)\mid t,s\in\mathbb{R}\}$

Los vectores $\{(2,1,0),(-1,0,1)\}$ forman una base de la imagen de f y su dimensión es 2.

d) La imagen del vector $\vec{v}=(1,-2,4)$ es el vector:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ -5\\ -9\end{pmatrix}$$

21. Veamos que T es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Consideramos dos vectores cualesquiera de T y un numero real t cualquiera, es decir,

- $$\left.\begin{array}{l}(x, y, z) \in T \Leftrightarrow 2x - y - z = 0 \\ (x', y', z') \in T \Leftrightarrow 2x' - y' - z' = 0\end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

  $\Leftrightarrow (2x - y - z) + (2x' - y' - z') = 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow 2(x + x') - (y + y') - (z + z') = 0 \Leftrightarrow$

  $(x + x', y + y', z + z') \in T$

- Al ser $t(2x - y - z) = 0 \Leftrightarrow 2tx - 2ty - 2tz = 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow (tx, ty, tz) \in T$

El subespacio T lo podemos escribir en la forma:

$$T = \{(x, y, 2x - y)\} = \{(t, s, 2t - s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

Un vector cualquiera de T puede expresarse como sigue:

$$(t, s, 2t - s) = t(1, 0, 2) + s(0, 1, -1)$$

Los vectores $(1, 0, 2)$ y $(0, 1, -1)$ forman una base de T y su dimensión es 2.

22. Determinamos la ecuación matricial de la aplicación f que es de la forma:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Imponiendo las condiciones del enunciado, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} f(1,2) = (-2,1,0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \\ f(1,0) = (6,-1,2) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = 6, b = -4 \\ c = -1, d = 1 \\ e = 2, f = -1 \end{array}$$

Las ecuaciones de la aplicación *f* en forma matricial son:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Calculamos $f^{-1}(2,7,-7)$ y para ello resolvemos el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 - 4x_2 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 7 \\ 2x_1 - x_2 = -7 \end{cases}$$

El último sistema carece de solución, por tanto no existe ningún vector en $\Re^2$ cuya imagen mediante la aplicación f sea $(2,7,-7)$.

23. Consideramos la combinación lineal nula:

$$a\vec{u} + b(\vec{u} + \vec{v}) + c(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = 0$$

Operando obtenemos:

$$(a+b+c)\vec{u} + (b+c)\vec{v}\ c\vec{w} = 0$$

Al ser los vectores *u*, *v* y *w* linealmente independientes:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ \quad\ b + c = 0 \\ \qquad\ c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Como los escalares *a*, *b* y *c* son nulos, los vectores, $\vec{u}, \vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ son linealmente independientes.

24. Calculamos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{vmatrix} = 1 - a.$$

Para $a \neq 1$ los vectores del enunciado forman una base de $\mathbb{R}^3$.

25. Es fácil ver que el subconjunto dado es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ (véase la actividad 27). El subespacio puede expresarse en la forma:

$$\{(x_2 - x_3, x_2, x_3)\} = \{(t - s, t, s) \mid t, s \in \mathbb{R}\}$$

Cualquier vector puede escribirse como combinación lineal de los vectores (1, 1, 0) y $(-1, 0, 1)$:

$$(t - s, t, s) = t(1, 1, 0) + s(-1, 0, 1)$$

Una base del subespacio la forman los vectores (1, 1, 0) y $(-1, 0, 1)$, la dimensión es 2.

26. Veamos que los polinomios $P_1(x), P_2(x), P_3(x)$ y $P_4(x)$ son linealmente independientes.

Formamos la combinación lineal nula:

$$a(1 - x) + b(x^2 + x) + c(1 - x^2) + d(x + x^3) = 0$$

Operamos:

$$dx^3 + (b - c)\,x^2 + (b + d - a)\,x + (a + c) = 0$$

Por el principio de identidad de polinomios:

$$\begin{cases} d = 0 \\ b - c = 0 \\ -a + b + d = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Luego estos polinomios son linealmente independientes.

Veamos que forman sistema generador, es decir que cualquier polinomio de V de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d$ puede escribirse en combinación lineal de los polinomios dados:

$$\begin{cases} s = a \\ z - t = b \\ -y + z + s = c \\ y + t = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = a; \\ t = \dfrac{d - b + c - a}{2}; \end{cases}$$

$$y = \frac{b + d - c + a}{2}$$

$$z = \frac{b + d + c - a}{2}$$

Luego efectivamente los polinomios dados son base. El polinomio P(x) respecto a esta base es:

$$x^3 + x^2 + x + 1 = 1(1 - x) + 1(x^2 + x) + 0(1 - x^2) + 1(x + x^3)$$

Es decir las coordenadas (1, 1, 0, 1) respecto a la base $\{P_1, P_2, P_3, P_4\}$

27. La aplicación lineal f esta definida por $f(ax^2+bx+c)=2ax+b$. veamos que es lineal.

$$f[ax^2 + bx + c) + (a'x^2 + b'x + c')] =$$
$$= f[(a + a')\,x^2 + (b + b')\,x + (c + c')] =$$
$$= 2(a + a')x + (b + b') = (2ax + b) + (2a'x + b').$$
$$f(ax^2 + bx + c) + f(a'x^2 + b'x + c') = (2ax + b) + (2a'x + b').$$
$$t \cdot f(ax^2 + bx + c) = t \cdot (2ax + b) = 2atx + bt =$$
$$= f[t \cdot (ax^2 + bx + c)].$$

El núcleo de f estará formado por los polinomios (ax^2+bx+c) cuya derivada sea nula, es decir:

$$f(ax^2+bx+c)=0 \Leftrightarrow 2ax+b=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$$

Los polinomios del nucleo son los polinomios de grado cero.

28. Calculamos la imagen por g del vector $\vec{e}_3=(0,0,1)$. este vector puede expresarse:

$(0,0,1)=(1,0,0)+2(0,1,0)-(1,2,-1)$.

La imagen del vector $(0,0,1)$ por la aplicación lineal g es:

$g(0,0,1)=g(1,0,0)+2g(0,1,0)-g(1,2,-1)=(2,1,1)+2(3,0,-1)-(0,0,0)=(8,1,-1)$

La ecuación de la aplicación lineal g en forma matricial es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Los vectores (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ que coinciden con su imagen son los vectores que cumplen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Operando y resolviendo el sistema resulstante, obtenemos:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \\ x_2 = x_1 + x_3 \\ x_3 = x_1 - x_2 - x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Por tanto el único vector que coincide con su imagen en esta aplicación es el vector nulo $\vec{0}=(0,0,0)$