Unidad 2 – Determinantes

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula los determinantes de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & -5 \\ 5 & a \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} m^2 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 1-a^2 & a-1 \\ a+1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Calcula los determinantes de las matrices que siguen, utilizando la regla de Sarrus:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} m & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & m \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} m+1 & 1 & 0 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m+1 \end{pmatrix}$

3. Encuentra el número de inversiones que existen en las siguientes permutaciones de números naturales del orden que se indica:

a) orden 4: 1243, 3142 y 1324. b) orden 5: 13542, 53241 y 13254. c) orden 6: 213654, 341652 y 231645.

4. Halla el signo de los términos que siguen, pertenecientes al desarrollo de un determinante de orden 5:

a) $a_{25} \cdot a_{51} \cdot a_{44} \cdot a_{13} \cdot a_{32}$ b) $a_{51} \cdot a_{22} \cdot a_{35} \cdot a_{43} \cdot a_{14}$

5. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$, calcula, sin desarrollar, los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+3 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

6. Sea A una matriz cuyas filas son F_1, F_2, F_3, y su determinante vale 4. ¿Cuánto vale el determinante de la matriz B cuyas filas son F_3, $F_1 - 2F_2$, $-F_1$?

7. Prueba, sin desarrollar, que los determinantes de las siguientes matrices son nulos:

a) $\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} bc & \frac{2}{a} & a \\ ac & \frac{2}{b} & b \\ ab & \frac{2}{c} & c \end{pmatrix}$

8. Prueba, sin desarrollar, que los determinantes siguientes son múltiplos de 11:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

9. Comprueba que el determinante A_1 vale 0 y que el determinante A_2 es divisible por 5, sin calcularlos, a partir de las propiedades de los determinantes, siendo:

$$A_1 = \begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ \frac{2}{5} & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} \qquad A_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

SOLUCIONES

1. Las soluciones son:

a) –2
b) 22
c) $a^2 + 25$
d) 23
e) $a^2 + b^2$;
f) 0
g) $2 - 2a^2$

2. Aplicando la regla de Sarrus se obtiene:

a) –2
b) 2
c) 79
d) $a^3 - 3a + 2$
e) $-m^2 - 4m + 1$
f) $m^3 + 3m^2 + 3m + 2$

3. Queda del siguiente modo:

a) La permutación 1243 tiene una inversión.
La permutación 3142 tiene 3 inversiones.
La permutación 1324 tiene una inversión.

b) La permutación 13542 presenta 4 inversiones.
La permutación 53241 tiene 8 inversiones.
La permutación 13254 tiene 2 inversiones.

c) La permutación 213654 presenta 4 inversiones.
La permutación 341652 tiene 7 inversiones.
La permutación 231645 tiene 4 inversiones.

4. Decimos que:

a) El término $a_{25}\, a_{51}\, a_{44}\, a_{13}\, a_{32}$ es el mismo que $a_{13}\, a_{25}\, a_{32}\, a_{44}\, a_{51}$, que se corresponde con la permutación de orden 5: 35 241. Ésta tiene siete inversiones, por lo que es una permutación impar. El término anterior le corresponde un signo menos.

b) De forma análoga al caso anterior, la permutación es 42 531, que posee siete inversiones y también le corresponde un signo menos.

5. En cada caso:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ 3/2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2\cdot 3/2 & 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$\text{b)}\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a+3 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3a & 3b & 3c \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$\text{c)}\ \begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{F_2 - F_3 \to F_2}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

6. La solución queda:

$$\begin{vmatrix} F_3 \\ F_1 - 2F_2 \\ -F_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -F_1 \\ F_1 - 2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ F_1 - 2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_1 \\ -2F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = -2|A| = -8$$

7. Queda del siguiente modo:

a) Sumamos la segunda y la tercera columna y el resultado lo colocamos en la tercera columna. De la tercera columna sacamos factor común $a+b+c$. Quedaría:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

El último determinante tiene dos columnas iguales, por tanto es nulo.

b) Sumamos la segunda y la tercera columna y el resultado lo colocamos en la segunda columna. De la primera sacamos factor común a a y de la tercera a $d+b+c$. Quedaría:

$$\begin{vmatrix} a & c+d & b \\ a & b+d & c \\ a & b+c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+c+d & b \\ a & b+c+d & c \\ a & b+c+d & d \end{vmatrix} = a(d+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & c \\ 1 & 1 & d \end{vmatrix} = 0$$

El último determinante tiene dos columnas iguales, por tanto es nulo.

c) Multiplicamos (y dividimos) la primera fila por *a*, la segunda por *b* y la tercera por *c*. Sacamos factor común a *abc* de la primera columna y 2 de la segunda.

Obtenemos:

$$\begin{vmatrix} bc & 2/a & a \\ ac & 2/b & b \\ ab & 2/c & c \end{vmatrix} = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} abc & 2 & a^2 \\ abc & 2 & b^2 \\ abc & 2 & c^2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & b^2 \\ 1 & 1 & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

El último determinante tiene dos columnas iguales, por tanto es nulo.

8. En cada caso queda:

a) Puede observarse que los números 121, 198 y 506 son múltiplos de 11. Operando en cada fila, multiplicamos la primera columna por 100, la segunda por 10 y sumamos ambos resultados en la tercera columna. Quedaría:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 8 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 121 \\ 1 & 9 & 198 \\ 5 & 0 & 506 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 11\cdot 11 \\ 1 & 9 & 11\cdot 18 \\ 5 & 0 & 11\cdot 46 \end{vmatrix} = 11\begin{vmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 1 & 9 & 18 \\ 5 & 0 & 46 \end{vmatrix}$$

b) Procediendo de forma análoga:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1221 & 9625 & 1111 & 3839 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 11\cdot 111 & 11\cdot 875 & 11\cdot 101 & 11\cdot 349 \end{vmatrix} =$$

$$= 11\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 111 & 875 & 101 & 349 \end{vmatrix}$$

c) Procediendo de forma análoga:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 4 \\ 9 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 3014 \\ 9 & 7 & 2 & 9724 \\ 2 & 3 & 5 & 2354 \\ 4 & 0 & 5 & 4059 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 11\cdot 274 \\ 9 & 7 & 2 & 11\cdot 884 \\ 2 & 3 & 5 & 11\cdot 214 \\ 4 & 0 & 5 & 11\cdot 369 \end{vmatrix} = 11\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 274 \\ 9 & 7 & 2 & 884 \\ 2 & 3 & 5 & 214 \\ 4 & 0 & 5 & 369 \end{vmatrix}$$

9. En cada uno de los casos queda:

En el caso de A_1, multiplicamos y dividimos la primera columna por -5, después sacamos factor común a $1/5$ y obtenemos:

$$\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ \frac{2}{5} & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 \cdot \frac{(-5)}{(-5)} & 25 & 40 \\ \frac{2}{5} \cdot \frac{(-5)}{(-5)} & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-1}{5} \cdot \begin{vmatrix} 40 & 25 & 40 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

El último determinante es nulo al tener dos columnas iguales.

En el caso de A_2, multiplicamos la segunda columna por 2 y le sumamos la tercera colocando el resultado en la tercera columna. Podemos sacar factor común a 5.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 20 \\ 6 & 3 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 5 \cdot 1 \\ 4 & 7 & 5 \cdot 4 \\ 6 & 3 & 5 \cdot 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

PÁGINA 53

■ 10. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Halla los menores complementarios α_{11}, α_{23}, α_{32} y α_{21}, si existen.
b) Halla, si existen, los adjuntos de los elementos que ocupan los lugares 11, 23, 32 y 21.
c) Halla las matrices adjuntas de las matrices dadas.

■ 11. Calcula los siguientes determinantes: a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix}$

■ 12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = 0$

■ 13. Calcula las matrices inversas de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \\ 5 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

■ 14. Determina, según los valores de m, el rango de las siguientes matrices:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 1 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & m \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & m \end{pmatrix}$

■ 15. Si A es una matriz de orden 3 y tal que $\det(A) = 2$, calcula:

a) $\det(M\,A\,M^{-1})$ b) $\det(5A)$ c) $\det(2A^{-1})$ d) $\det(\mathrm{Adj}\,(A))$

■ 16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$: a) Calcula A^{-1}. b) Resuelve la ecuación $\det(A^{-1} - xI) = 0$.

■ 17. ¿Para qué valores del parámetro no es invertible la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ a & -2 & 5 \end{pmatrix}$?

■ 18. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) La matriz A verifica $A^2 = A$. Halla los posibles valores del determinante de A.
b) La matriz A verifica $AA^t = I$. Halla $\det(A)$.
c) Dos matrices A y B son inversas la una de la otra. Si $\det(A) = 3$, ¿cuánto vale $\det(B)$?

SOLUCIONES

10. La solución en cada caso es:

a) En la matriz A: $\alpha_{11} = 5$; α_{23} y α_{32} no existen ; $\alpha_{21} = 2$
En la matriz B : α_{11} = -20 ; α_{23} = -10 ; α_{32} = -8 ; α_{21} = 8
En la matriz C : α_{11} = 2 ; α_{23} = 2 ; α_{32} = 6 ; α_{21} = -6

b) En la matriz A : $A_{11} = 5$; A_{23} y A_{32} no existen ; $A_{21} = -2$
En la matriz B : $B_{11} = -20$; $B_{23} = 10$; $B_{32} = 8$; $B_{21} = -8$
En la matriz C : $C_{11} = 2$; $C_{23} = -2$; $C_{32} = -6$; $C_{21} = 6$

c) Las matrices adjuntas son:

$$A^d = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad B^d = \begin{pmatrix} -20 & -7 & 25 \\ -8 & -11 & 10 \\ 17 & 8 & -11 \end{pmatrix} \qquad C^d = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & -10 \\ 6 & -2 & -2 & -2 \\ -10 & -6 & -6 & 8 \\ 7 & 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}$$

11. Las soluciones son:

a) Haciendo ceros en la primera columna se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 5 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 15 & -13 & 24 \\ 0 & 1 & -10 & 7 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & -13 & 24 \\ 1 & -10 & 7 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -295$$

b) Haciendo ceros en la primera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+x & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1+x & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1+x & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)^4$$

12. las soluciones son las siguientes:

$$\text{a) } 0 = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1-x \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ 0 & x & 1-x \\ -1 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ x-1 & -2 & 1 \\ 0 & x & 1-x \end{vmatrix} = x^4 - x^3 + x - 1$$

$x^4 - x^3 + x - 1 = 0$. Las soluciones son $x = -1$ y $x = 1$.

b) $0 = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = x^4 - 1$

Las soluciones de la ecuación $x^4 - 1 = 0$ son los números complejos $1, -1, i, -i$.

c) $0 = \begin{vmatrix} -1 & x & x & x \\ x & -1 & x & x \\ x & x & -1 & x \\ x & x & x & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x-1 & x & x & x \\ 3x-1 & -1 & x & x \\ 3x-1 & x & -1 & x \\ 3x-1 & x & x & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x-1 & x & x & x \\ 0 & x+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = (3x-1)(x+1)^3$

Las soluciones de $(3x-1)(x+1)^3 = 0$ son $x = 1/3$ y $x = -1$.

d) $0 = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ x+a+b+c & x & c & b \\ x+a+b+c & c & x & a \\ x+a+b+c & b & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ 0 & a-x & b-c & c-b \\ 0 & a-c & b-x & c-a \\ 0 & a-b & b-a & c-x \end{vmatrix} =$

$= (x+a+b+c) \begin{vmatrix} a-x & b-c & c-b \\ a-c & b-x & c-a \\ a-b & b-a & c-x \end{vmatrix} = (x+a+b+c) \begin{vmatrix} a-x & a+b-c-x & a+c-b-x \\ a-c & a+b-c-x & 0 \\ a-b & 0 & a+c-b-x \end{vmatrix} =$

$= (x+a+b+c) \begin{vmatrix} c-x & 0 & a+c-b-x \\ a-c & a+b-c-x & 0 \\ a-b & 0 & a+c-b-x \end{vmatrix} =$

$= (x+a+b+c)(a+b-c-x)(a+c-b-x)(b+c-a-x)$

Las soluciones de la ecuación son:

$x = -a - b - c$

$x = a + b - c$

$x = a - b + c$

$x = -a + b + c$

13. Las matrices inversas son las siguientes:

a) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2/3 & -1 \\ -1/3 & 0 \end{pmatrix}$

c) La matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene inversa si $ad - bc$ es distinto de cero. En este caso la matriz buscada es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

d) $\begin{pmatrix} 10/130 & 20/130 & 6/130 \\ -10/130 & -20/130 & 20/130 \\ 25/130 & -15/130 & 2/130 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

14. El rango según el parámetro queda del siguiente modo:

a) Si $m = -6$ el rango es dos y si $m \neq -6$, el rango es tres.

b) Si $m = 1$, el rango es uno.
Si $m = -2$, el rango es dos.
Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$, el rango es tres.

c) Si $m = 3$, el rango es tres.
Si $m \neq 3$, el rango es cuatro.

d) Si $m = 10$, el rango es tres.
Si $m \neq 10$, el rango es cuatro.

15. Los determinantes pedidos son:

- $\det(MAM^{-1}) = \det M \cdot \det A \cdot \det(M^{-1}) = \det M \cdot \det A \cdot \frac{1}{\det M} = \det A = 2$
- $\det(5A) = 5^n \cdot \det(A) = 5^n \cdot 2.$
- $\det(2A^{-1}) = 2^n \det(A^{-1}) = 2^n \cdot \frac{1}{\det A} = 2^n \cdot \frac{1}{2} = 2^{n-1}$
- $\det(A^d) = [\det(A)]^2 = 4$

16. En cada caso queda:

a) El determinante de la matriz A es $\det(A)=-1$. La matriz in versa es: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) La ecuación es $\begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ -1 & -x & 1 \\ -1 & 1 & -x \end{vmatrix}=0$.

Desarrollando el determinante obtenemos $(1+x)(1+x^2)=0$.

Las soluciones de la ecuación son $x=-1$ y los números complejos i y $-i$.

17. Al ser $\det(A)=-19a+57$, este determinante se anula para $a=3$. Para este valor de a la matriz A no es invertible.

18. En cada caso queda del siguiente modo:

a) Utilizando la propiedad $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$, se tiene: $\det(A^2)=[\det(A)]^2$. Por tanto, $\det(A^2)-[\det(A)]^2=0 \Rightarrow \det(A)-[\det(A)]^2=0 \Rightarrow \det(A)(1-[\det(A)])=0$. Luego ocurre lo siguiente: $\det(A)=0$ ó $\det(A)=1$.

b) Teniendo en cuenta las propiedades $\det(A)=\det(A^t)$ y $\det(A\cdot B)=\det(A)\cdot\det(B)$, se obtiene: $\det(A\cdot A)^t=\det(I) \Rightarrow \det(A)^2=1 \Rightarrow \det(A)=\pm 1$.

c) $A\cdot B=I \Rightarrow \det(B)=\dfrac{1}{\det(A)}=\dfrac{1}{3}$

PÁGINA 54

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

19. Calcula el valor de los determinantes siguientes:

a) $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$

20. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & x & -4 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0$

21. El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para $a = 3$. Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques.

22. Halla el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & a^2-1 & a \\ 1 & 2a^2-2 & 2a-1 \\ 1 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$ según sea el valor del parámetro a. Halla, si existe, la matriz inversa de A en los casos en que $a = 0$ y $a = 1$.

23. Responde a las siguientes cuestiones:

a) Si A es una matriz cuadrada de orden n, A^t su traspuesta y A^{-1} su inversa, ¿qué relaciones tienen los determinantes $|A|$, $|A^t|$ y $|A^{-1}|$? ¿Por qué?

b) Si el determinante de una matriz cuadrada de orden n vale D, ¿cuál es el valor del determinante de la matriz que se obtiene multiplicando por 5 todos los elementos de la anterior?

c) Si X es una matriz cuadrada de orden 3 que verifica la igualdad $X^2 = 2X$, ¿cuánto vale el determinante de X?

24. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix}$, averigua para qué valores del parámetro m existe A^{-1}. Calcula A^{-1} para $m = 1$.

25. Resuelve la ecuación matricial $B(2A + I) = AXA + B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

26. Una matriz cuadrada A tiene la propiedad de que $A^2 = 2A + I$, donde I es la matriz unidad. Demuestra que A admite inversa y obtén esta inversa en función de A.

19. La solución en cada caso es:

a) $\begin{vmatrix} abc & -ab & a^2 \\ -b^2c & 2b^2 & -ab \\ b^2c^2 & -b^2c & 3abc \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} ab^2c \begin{vmatrix} a & -a & a \\ -b & 2b & -b \\ bc & -bc & 3bc \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} ab^2c \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ -b & b & 0 \\ bc & 0 & 2bc \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 2a^2b^4c^2$

(1) Hemos sacado factor común *a* de la tercera columna, *b* de la segunda y *bc* de la primera.
(2) La suma de la primera y segunda columna a la segunda. La diferencia de la primera y la tercera columna a la tercera.
(3) Desarrollando por la diagonal principal.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -2$

(1) La diferencia de las dos primeras filas a la segunda fila.
(2) Desarrollando por la primera columna.
(3) Utilizando la regla de Sarrus.

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, al tener dos columnas iguales.

d) $\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c & 0 \\ a+b+c & 0 & c & b \\ a+b+c & c & 0 & a \\ a+b+c & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & b & c & 0 \\ 0 & -b & 0 & b \\ 0 & c-b & -c & a \\ 0 & 0 & a-c & 0 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} -b & 0 & b \\ c-b & -c & a \\ 0 & a-c & 0 \end{vmatrix} =$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & b \\ a+c-b & -c & a \\ 0 & a-c & 0 \end{vmatrix} = b(a+b+c)\begin{vmatrix} a+b-c & -c \\ 0 & a-c \end{vmatrix} = b(a-c)(a+b+c)(a+b-c)$

e) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+a & 1 & 1 & 1 \\ 4+a & 1+a & 1 & 1 \\ 4+a & 1 & 1+a & 1 \\ 4+a & 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3(4+a)$

20. Las ecuaciones quedan:

a) Desarrollando el determinante obtenemos: $2x^2+16x-12=0$. Las soluciones son las siguientes: $x=-4\pm\sqrt{22}$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & x & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & -2x-2 & 1 & -3 \\ 0 & -3x+4 & 6 & -9 \\ 0 & 1 & x & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2x-2 & 1 & -3 \\ -3x+4 & 6 & -9 \\ 1 & x & -4 \end{vmatrix} = -9x^2-6x+73$

Las soluciones de $9x^2-6x-73=0$ son

$$x=\frac{1\pm\sqrt{74}}{3}$$

es decir, $x=3{,}20$ y $x=-2{,}53$.

c) $\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 3+3x & 3 & x & x \\ 3+3x & x & 3 & x \\ 3+3x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 0 & 3-x & x & x \\ 0 & 0 & 3-x & x \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} (3x+3)(3-x)^3$

(1) Sumando todas las columnas y el resultado a la primera.
(2) Restando de todas las filas la primera.
(3) Desarrollando.

21. La solución del ejercicio queda:

Sustituyendo $a=3$ obtenemos el determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & 13 \\ 8 & 27 & 35 \end{vmatrix}$

El valor del determinante es cero ya que la tercera columna es suma de la primera y la segunda.

22. El valor del determinante de la matriz es $\det(A)=(a-1)^2\cdot(a+1)^2$. Esta expresión nos permite realizar el siguiente estudio:

- Si $a\neq 1$ y $a\neq -1$, el rango de A es 3.
- Si $a=-1$, el rango de A es 2.
- Si $a=1$, el rango de A es 1.

Respecto a la matriz inversa de A, en el caso de $a=1$ no existe, y en el caso de $a=0$, la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ queda del siguiente modo: $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

23. Las respuestas son:

a) $|A^t|=|A|$, ya que según la definición de determinante, los términos del desarrollo del determinante pueden ordenarse de igual forma atendiendo a las filas o a las columnas. $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$ ya que al ser $A\cdot A^{-1}=I$, tomando determinantes se obtiene la relación anterior.

b) El valor es $5^n\cdot D$. De hecho es debido a la propiedad que dice: si los elementos de una fila (columna) de una matriz se multiplican por un número, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.

c) Podemos escribir la igualdad de la forma $X^2=2X$. Tomando determinantes en ambos miembros de la igualdad obtenemos: $\det(X^2)=\det(2X)$ y aplicando las propiedades de los determinantes tenemos que $[\det(X)]^2=4\cdot\det(X)$ de donde $\det(X)=0$ ó $\det(X)=4$.

24. La solución es:

El determinante de la matriz A es $\det(A)=m^2-m-2=(m+1)(m-2)$. La matriz inversa existe para todos los valores de m distintos de -1 y 2.

Para caso de $m=1$, la matriz es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y su inversa $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix}$

25. La solución es la siguiente:

Operando en la ecuación matricial aplicando las propiedades de la matriz inversa, de este modo obtenemos: $2BA+B=AXA+B \Rightarrow 2BA=AXA \Rightarrow 2B=AX \Rightarrow 2A^{-1}B=X$

Hallamos la matriz A^{-1} y calculamos la matriz X.

$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ y finalmente $X=2A^{-1}B=\begin{pmatrix} -2 & -8 & 14 \\ -6 & -18 & 32 \\ 4 & 14 & -26 \end{pmatrix}$

26. La solución dice así:

Podemos expresar la igualdad de la forma $A^2 - 2A = I \Rightarrow A(A-2I) = I$ de donde se deduce que la matriz inversa de A es $(A-2I)$.

Tomando determinantes en la igualdad anterior $\det[A(A-2I)] = \det(I)$ de donde se extrae que $\det(A) \cdot \det(A-2I) = 1$, por tanto $\det(A) \neq 0$, es decir, que existe la inversa de A que hemos hallado anteriormente.