Autoevaluación

Página 438

1 **Conocemos las siguientes probabilidades:**

$$P[A] = 0{,}33 \qquad P[A' \cap B'] = 0{,}41 \qquad P[B'] = 0{,}62$$

Calcula $P[B]$, $P[A \cup B]$ y $P[A \cap B]$.

$P[B] = 1 - P[B'] = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$

$P[A' \cap B'] = 0{,}41 = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] \;\to\; P[A \cup B] = 1 - 0{,}41 = 0{,}59$

$P[A \cap B] = P[A] + P[B] - P[A \cup B] = 0{,}33 + 0{,}38 - 0{,}59 = 0{,}12$

2 **En una clase, el 40 % aprueba filosofía y el 50% matemáticas. Además, la probabilidad de aprobar la filosofía habiendo aprobado las matemáticas es 0,8.**

a) ¿Qué proporción de la clase suspende ambas asignaturas?

b) Calcula el porcentaje de estudiantes que, teniendo aprobada la filosofía, aprueba también las matemáticas.

Sean los sucesos F = "aprobar filosofía" y M = "aprobar matemáticas".

$P[\text{F}] = \dfrac{40}{100} = 0{,}4$

$P[\text{M}] = \dfrac{50}{100} = 0{,}5$

$P[\text{F/M}] = 0{,}8$

a) $P[\text{F/M}] = 0{,}8 = \dfrac{P[\text{F} \cap \text{M}]}{P[\text{M}]} = \dfrac{P[\text{F} \cap \text{M}]}{0{,}5} \;\to\; P[\text{F} \cap \text{M}] = 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}4$

Los alumnos que suspenden ambas asignaturas constituyen el suceso F' ∩ M'.

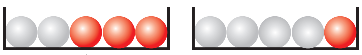
$P[\text{F} \cup \text{M}] = P[\text{F}] + P[\text{M}] - P[\text{F} \cap \text{M}] = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}5$

$P[\text{F}' \cap \text{M}'] = P[(\text{F} \cup \text{M})'] = 1 - P[\text{F} \cup \text{M}] = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

b) Nos piden:

$P[\text{M/F}] = \dfrac{P[\text{F} \cap \text{M}]}{P[\text{F}]} = \dfrac{0{,}4}{0{,}4} = 1$

Es decir, el 100 % de los alumnos que aprueban filosofía también han aprobado matemáticas.

3  

A B

Si en el dado sale 1, sacamos bola de B. Si sale otra puntuación, la sacamos de A. Calcula:

$P[\bullet/1]$ $\quad$ $P[1$ y $\bullet]$ $\quad$ $P[\bullet]$ $\quad$ $P[\circ]$ $\quad$ $P[1/\bullet]$

$P[\bullet/1] = \dfrac{3}{5}$

$P[1 \text{ y } \bullet] = P[\bullet/1] \cdot P[1] = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{10}$

$P[\bullet] = P[1 \text{ y } \bullet] + P[1' \text{ y } \bullet] = P[\bullet/1] \cdot P[1] + P[\bullet/1'] \cdot P[1'] = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{4}{15}$

$P[\circ] = 1 - P[\bullet] = 1 - \dfrac{4}{15} = \dfrac{11}{15}$

$P[1/\bullet] = \dfrac{P[1 \text{ y } \bullet]}{P[\bullet]} = \dfrac{1/10}{4/15} = \dfrac{3}{8}$

4 **Por cada 100 personas con gafas o lentillas de un cierto colectivo, hemos atendido al color de ojos (azul, verde, negro, marrón). Alguno de los resultados se refleja en la siguiente tabla:**

	AZUL	VERDE	NEGRO	MARRÓN	TOTAL
GAFAS	**11**	**5**		**25**	**55**
LENTILLAS					
TOTAL	**20**	**15**	**25**		**100**

a) Completa la tabla.

b) Calcula $P[\text{AZUL}]$, $P[\text{GAFAS}]$, $P[\text{AZUL y GAFAS}]$.

c) Calcula $P[\text{AZUL/GAFAS}]$, $P[\text{GAFAS/AZUL}]$.

d) Explica por qué los sucesos GAFAS y AZUL son independientes.

a)

	AZUL	VERDE	NEGRO	MARRÓN	TOTAL
GAFAS	**11**	**5**	14	**25**	**55**
LENTILLAS	9	10	11	15	45
TOTAL	**20**	**15**	**25**	40	**100**

b) $P[\text{AZUL}] = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$; $P[\text{GAFAS}] = \dfrac{55}{100} = \dfrac{11}{20}$; $P[\text{AZUL y GAFAS}] = \dfrac{11}{100}$

c) $P[\text{AZUL/GAFAS}] = \dfrac{P[\text{AZUL y GAFAS}]}{P[\text{GAFAS}]} = \dfrac{\frac{11}{100}}{\frac{11}{20}} = \dfrac{1}{5}$

$P[\text{GAFAS/AZUL}] = \dfrac{P[\text{AZUL y GAFAS}]}{P[\text{AZUL}]} = \dfrac{\frac{11}{100}}{\frac{20}{100}} = \dfrac{11}{20}$

d) Del apartado b) se deduce que $P[\text{AZUL y GAFAS}] = \dfrac{11}{100} = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{11}{20} = P[\text{AZUL}] \cdot P[\text{GAFAS}]$

Por tanto, los sucesos son independientes.

También, observando los apartados b) y c) vemos que el hecho de llevar gafas no influye en la probabilidad de tener ojos azules ya que $P[\text{AZUL}] = P[\text{AZUL/GAFAS}]$.

Esto justifica la independencia entre los sucesos.

5 **En una distribución $N(0, 1)$ calcula:**

a) $P[0{,}25 < z < 1{,}45]$

b) $P[-0{,}25 < z \le 1{,}45]$

c) El valor de k para que $P[-k < z < k] = 0{,}90$.

a) $P[0{,}25 < z < 1{,}45] = P[z < 1{,}45] - P[z \le 0{,}25] = 0{,}9265 - 0{,}5987 = 0{,}3278$

b) $P[-0{,}25 < z \le 1{,}45] = P[z \le 1{,}45] + P[z < 0{,}25] - 1 = 0{,}9265 + 0{,}5987 - 1 = 0{,}5252$

c) $P[-k < z < k] = 2P[0 < z < k] = 2(P[z < k] - 0{,}5) = 2P[z < k] - 1 = 0{,}9 \rightarrow$

$\rightarrow P[z < k] = \dfrac{1{,}9}{2} = 0{,}95 \rightarrow k = 1{,}645$

6 **En una distribución $N(20, 4)$ calcula:**

a) $P[x = 21]$

b) $P[x < 21]$

c) $P[19 \le x \le 21]$

a) $P[x = 21] = 0$

b) $P[x<21] = P\left[\frac{x-20}{4} < \frac{21-20}{4}\right] = P[z<0,25] = 0,5987$

c) $P[19 \le x \le 21] = P\left[\frac{19-20}{4} \le \frac{x-20}{4} \le \frac{21-20}{4}\right] = P[-0,25 \le z \le 0,25] =$

$= 2P[0 \le z \le 0,25] = 2P[z \le 0,25] - 1 = 2 \cdot 0,5987 - 1 = 0,1974$

7 **En una distribución $B(10; 0,4)$ calcula:**

a) $P[x = 0]$, $P[x = 1]$, $P[x > 1]$.

b) Los parámetros μ y σ.

Los datos de la distribución son $n = 10$; $p = 0,4$; $q = 0,6$

a) $P[x = 0] = 0,6^{10} = 0,00605$

$P[x=1] = \binom{10}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^9 = 0,04031$

$P[x>1] = 1 - P[x \le 1] = 1 - (P[x=0] + P[x=1]) = 1 - (0,00605 + 0,04031) = 0,95364$

b) $\mu = np = 10 \cdot 0,4 = 4$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 1,55$

8 **En una ciudad, la temperatura máxima durante el mes de junio está distribuida normalmente con una media de 26° y una desviación típica de 4°. Calcula el número de días que se espera tengan una temperatura máxima comprendida entre 22° y 28°.**

Llamamos X a la temperatura máxima durante el mes de junio:

$X = N(26, 4)$

$P[22 \le x \le 28] = P\left[\frac{22-26}{4} \le \frac{x-26}{4} \le \frac{28-26}{4}\right] = P[-1 \le z \le 0,5] =$

$= P[z \le 0,5] + P[z \le 1] - 1 = 0,6915 + 0,8413 - 1 = 0,5328$

Como el mes de junio tiene 30 días, el número esperado de días es:

$30 \cdot 0,5328 = 15,984 \approx 16$ días

9 **Un examen tipo test tiene cien preguntas y cada pregunta cuatro respuestas diferentes, de las que solo una es correcta.**

a) Calcula la probabilidad de que un estudiante que responde al azar acierte más de 20 preguntas.

b) Calcula la probabilidad de que de las 20 primeras preguntas acierte a lo sumo 4.

a) Llamamos X a la variable que cuenta el número de preguntas acertadas al azar entre las 100 del examen. X muestra una distribución binomial $\rightarrow X = B(100; 0,25)$.

Como $100 \cdot 0,25 = 25 \ge 5$, podemos ajustarla mediante una distribución normal X' de parámetros:

$\mu = 100 \cdot 0,25 = 25$

$\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,25 \cdot 0,75} = 4,33$

$P[x > 20] = P[x' \ge 20,5] = P\left[\frac{x-25}{4,33} \ge \frac{20,5-25}{4,33}\right] = P[z \ge -1,04] = P[z \le 1,04] = 0,8508$

b) Análogamente, ahora llamamos X a la variable que cuenta el número de preguntas acertadas al azar entre las 20 primeras del examen $\rightarrow X = B(20; 0{,}25)$.

Como $20 \cdot 0{,}25 = 5 \ge 5$, podemos ajustarla mediante una distribución normal X' de parámetros:

$$\mu = 20 \cdot 0{,}25 = 5$$

$$\sigma = \sqrt{20 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = 1{,}94$$

$$P[x \le 4] = P[x' \le 4{,}5] = P\left[\frac{x' - 5}{1{,}94} \le \frac{4{,}5 - 5}{1{,}94}\right] = P[z \le -0{,}26] = 1 - P[z < 0{,}26] =$$

$$= 1 - 0{,}6026 = 0{,}3974$$

10 **La proporción de personas nacidas un 29 de febrero es 1/1 461.**

a) Justifica por qué.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en una localidad de 20 000 habitantes haya menos de 8 personas nacidas un 29 de febrero?

a) El número de días que hay entre dos años bisiestos es $3 \cdot 365 + 366 = 1\,461$

Luego la proporción de personas nacidas el 29 de febrero es $\frac{1}{1\,461}$.

b) Llamamos X a la variable que cuenta el número de personas nacidas el 29 de febrero entre las 20 000 de la localidad $\rightarrow X = B\left(20\,000, \frac{1}{1\,461}\right)$.

Como $20\,000 \cdot \frac{1}{1\,461} = 13{,}69 \ge 5$, podemos ajustarla mediante una distribución normal X' de parámetros:

$$\mu = 13{,}69$$

$$\sigma = \sqrt{20\,000 \cdot \frac{1}{1\,461} \cdot \frac{1\,460}{1\,461}} = 3{,}7$$

$$P[x < 8] = P[x' \le 7{,}5] = P\left[\frac{x' - 13{,}69}{3{,}7} \le \frac{7{,}5 - 13{,}69}{3{,}7}\right] = P\left[z \le \frac{7{,}5 - 13{,}69}{3{,}7}\right] =$$

$$= P[z \le -1{,}67] = 1 - P[z < 1{,}67] = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$$

11 **a) Calcula k para que la siguiente tabla corresponda a una distribución de probabilidad:**

x_i	11	12	13	14	15	16
p_i	0,15	0,1	0,12	0,17	k	k

b) Halla $P[13 \le x_i \le 15]$.

c) Calcula los parámetros μ y σ.

a) Para que la tabla corresponda a una distribución de probabilidad, la suma de las probabilidades debe ser 1.

$$0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}12 + 0{,}17 + 2k = 1 \rightarrow k = 0{,}23$$

b) $P[13 \le x_i \le 15] = 0{,}12 + 0{,}17 + 0{,}23 = 0{,}52$

c)

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
11	0,15	1,65	18,15
12	0,1	1,2	14,4
13	0,12	1,56	20,28
14	0,17	2,38	33,32
15	0,23	3,45	51,75
16	0,23	3,68	58,88
	1	13,92	196,78

Por tanto:

$$\mu = 13{,}92$$

$$\sigma = \sqrt{196{,}78 - 13{,}92^2} = 1{,}74$$