Resuelve

Página 389

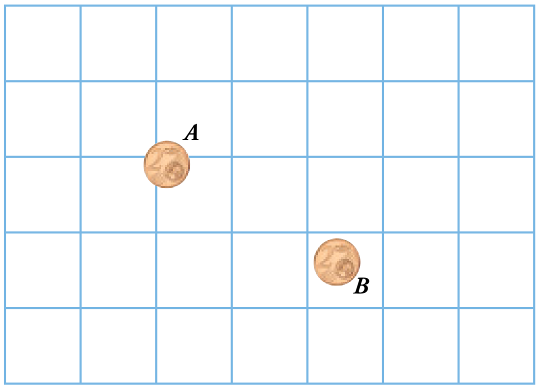
Obtención experimental de la probabilidad

Cuadriculamos un folio con cuadrados de 3 cm × 3 cm.

Si dejamos caer sobre él una moneda de 2 céntimos de euro (19 mm de diámetro), puede caer "tocando raya", como *A*, o "sin tocar raya", como *B*.

Vamos a estimar la probabilidad del suceso *S*:

S = "LA MONEDA CAE SIN TOCAR RAYA"



Para ello, se realiza la experiencia muchas veces y se calcula la frecuencia relativa del suceso *S*.

Supongamos que 30 personas (los alumnos de una clase) lo realizan 100 veces cada una (un total de 3 000 experiencias), y que se contabiliza que el suceso *S* ha ocurrido 385 veces.

La frecuencia relativa y la probabilidad serán:

$$fr(S) = \frac{385}{3\,000} = 0{,}128 \rightarrow P[S] \approx 0{,}13$$

- **Estima tú la probabilidad de *S* lanzando 100 veces una moneda de 2 céntimos sobre una cuadrícula como la que se acaba de describir.**

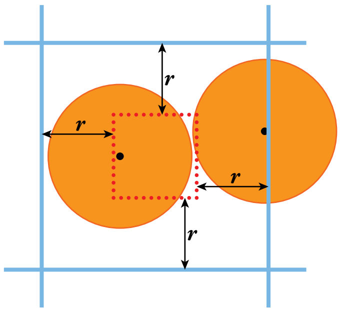
  Experiencia práctica para el alumno.

Cálculo matemático de la probabilidad

Resolvemos ahora el problema anterior de forma matemática.

La posición de la moneda queda determinada por su centro.

¿En qué puntos de la cuadrícula debe quedar el centro de la moneda para que esta no toque raya? Es claro que debe estar en el interior del cuadrado pequeño, es decir, su distancia a cada raya debe ser mayor que el radio de la moneda.



Área del cuadrado grande: $3^2 = 9$ cm²

Área del cuadrado pequeño: $(3 - 1{,}9)^2 = 1{,}21$ cm²

Probabilidad: $P[S] = \dfrac{1{,}21}{9} = 0{,}134$

La probabilidad obtenida por este método (0,134) ha sido sensiblemente igual a la obtenida por el método experimental (0,13).

- **Calcula matemáticamente cuál es la probabilidad de que un botón de 1 cm de diámetro "no toque raya" en la cuadrícula de 3 cm × 3 cm.**

  Área del cuadrado grande = $3^2 = 9$ cm²

  Área del cuadrado pequeño = $(3 - 1)^2 = 4$ cm²

  $$P = \frac{4}{9} \approx 0{,}44$$

1 Experiencias aleatorias. Sucesos

Página 390

1 **Numeramos con 1, 2, 3 y 4 las cuatro caras de un dado con forma de tetraedro. Lo dejamos caer y anotamos el número de la cara inferior.**

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) Escribe un suceso elemental y tres que sean no elementales.

c) ¿Cuántos sucesos tiene esta experiencia?

a) $E = \{1, 2, 3, 4\}$

b) Suceso elemental: $\{2\}$

Sucesos no elementales: $\{1, 2\}$; $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 2, 3, 4\}$

c) Esta experiencia tiene $2^4 = 16$ sucesos.

Página 391

2 **Consideramos la experiencia "lanzar un dado". A partir de los conjuntos:**

$$\boldsymbol{A = \{1, 2, 3, 4\},\ B = \{1, 3, 5\},\ C = \{2, 4\}}$$

a) Obtén los conjuntos $A \cup B$, $A \cup B$, A', B'.

b) Obtén los conjuntos $(A \cup B)'$, $(A \cup B)'$, $A' \cup B'$, $A' \cup B'$, y comprueba que se cumplen las leyes de Morgan.

c) Calcula $B \cup C$ y $B \cup C$, y razona los resultados.

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $A \cup B = \{1, 3\}$; $A' = \{5, 6\}$, $B' = \{2, 4, 6\}$

b) $(A \cup B)' = \{6\}$; $(A \cup B)' = \{2, 4, 5, 6\}$; $A' \cup B' = \{2, 4, 5, 6\}$, $A' \cup B' = \{6\}$

$(A \cup B)' = A' \cup B'$

$(A \cup B)' = A' \cup B'$

c) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B \cup C = \varnothing$

Al ser B y C conjuntos disjuntos, la intersección es vacía.

2 Frecuencia y probabilidad

Página 392

1 ¿Verdadero o falso?

a) Estoy jugando con un dado correcto y en las últimas 20 jugadas no he conseguido ningún “5”. Según la *ley de los grandes números*, en la siguiente jugada es muy muy probable que ya me salga “5”.

b) Aunque en las últimas 20 tiradas no haya salido ningún “5”, la probabilidad de que ahora salga “5” sigue siendo la misma que antes de la *racha*: 1/6 (el azar “no tiene memoria”).

a) Falso. La ley de los grandes números solo dice que la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a la probabilidad del mismo cuando se repite el experimento un número muy alto de veces. El resultado de la siguiente jugada apenas afecta a la correspondiente frecuencia relativa.

b) Verdadero. Los resultados de los diferentes lanzamientos del dado son independientes entre sí.

Página 393

2 Conocemos las siguientes probabilidades:

$$\boldsymbol{P[A] = 0{,}4 \qquad P[B] = 0{,}7 \qquad P[A' \cup B'] = 0{,}8}$$

Calcula $\boldsymbol{P[(A \cup B)']}$, $\boldsymbol{P[A \cup B]}$, $\boldsymbol{P[A \cup B]}$.

$P[A'] = 1 - P[A] = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$P[B'] = 1 - P[B] = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$P[(A \cup B)'] = P[A' \cup B']$; $P[A \cup B] = 1 - P[(A \cup B)'] = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cup B] = 0{,}4 + 0{,}7 - 0{,}2 = 0{,}9$

3 Sabemos que:

$$\boldsymbol{P[M \cup N] = 0{,}6 \quad P[M \cup N] = 0{,}1 \quad P[M'] = 0{,}7}$$

Calcula $\boldsymbol{P[M]}$, $\boldsymbol{P[N]}$, $\boldsymbol{P[N']}$, $\boldsymbol{P[M' \cup N']}$.

$P[M] = 1 - P[M'] = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$P[M \cup N] = P[M] + P[N] - P[M \cup N] \;\rightarrow\; P[N] = P[M \cup N] + P[M \cup N] - P[M] =$

$= 0{,}6 + 0{,}1 - 0{,}3 = 0{,}4$

$P[N'] = 1 - P[N] = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$P[M' \cup N'] = P[(M \cup N)'] = 1 - P[(M \cup N)] = 0{,}4$

3 Ley de Laplace

Página 394

Hazlo tú. Repite el problema con los datos siguientes:

P[COPA] = $\frac{1}{2}$, P[AS] = $\frac{1}{4}$, P[ni COPA ni AS] = $\frac{5}{16}$. Halla P[AS DE COPAS] y di cuántas cartas hay.

Llamamos A al suceso AS y C al suceso COPAS.

$$P[\text{AS DE COPAS}] = P[A \cup C] = P[A] + P[C] - P[A \cup C] = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - P[A \cup C] =$$

$$= \frac{3}{4} - P[A \cup C] = \frac{3}{4} - \left[1 - P[(A \cup C)']\right] = \frac{3}{4} - 1 + P[(A \cup C)'] =$$

$$= -\frac{1}{4} + P[A' \cap C'] = -\frac{1}{4} + \frac{5}{16} = \frac{1}{16}$$

Como el suceso AS DE COPAS es un suceso elemental y todas las demás cartas tienen la misma probabilidad de salir, en el mazo hay 16 cartas.

Página 395

1 Lanzamos un dado "chapucero" mil veces. Obtenemos:

$f(1) = 117$ $f(2) = 302$ $f(3) = 38$ $f(4) = 234$ $f(5) = 196$ $f(6) = 113$

Estima las probabilidades de las distintas caras y, basándote en ellas, calcula las probabilidades de estos sucesos: PAR, MENOR QUE 6, {1, 2}.

$P[1] = \frac{117}{1\,000} = 0,117$ $P[2] = 0,302$ $P[3] = 0,038$

$P[4] = 0,234$ $P[5] = 0,196$ $P[6] = 0,113$

P[PAR] = 0,302 + 0,234 + 0,113 = 0,649

P[MENOR QUE 6] = 1 – P[6] = 1 – 0,113 = 0,887

P[{1, 2}] = 0,117 + 0,302 = 0,419

2 ¿Cuál es la probabilidad de obtener 12 al multiplicar los resultados de dos dados correctos? ¿Y la de obtener 9? ¿Y la de obtener 4?

Los casos favorables al primer suceso son: (2, 6); (3, 4); (4, 3) y (6, 2). Luego, $P[12] = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

El segundo suceso solo tiene un caso favorable, (3, 3). Luego, $P[9] = \frac{1}{36}$.

Los casos favorables al tercer suceso son: (1, 4); (2, 2) y (4, 1). Luego, $P[4] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

3 ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados correctos la diferencia de sus puntuaciones sea 2? ¿Y la probabilidad de que la diferencia sea 1?

Si suponemos que el orden en el que se restan las puntuaciones de los dados es indiferente, al no ser los dados distinguibles, las probabilidades serán:

- Los casos para que la diferencia sea 2 son: (1, 3); (2, 4); (3, 5); (4, 6) y los casos "simétricos". Por tanto:

  $$P[2] = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

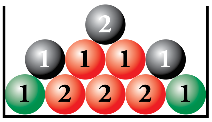
- Los casos en los que la diferencia es 1 son: (1, 2); (2, 3); (3, 4); (4, 5); (5, 6) y los casos "simétricos". Por tanto:

  $$P[1] = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

4 Probabilidad condicionada. Sucesos independientes

Página 397

1 Observa las bolas que hay en la urna.



a) Completa el cuadro de doble entrada en el que se reparten las bolas según el color (V, R, N) y el número (1, 2).

b) Calcula la probabilidad de ROJO, NEGRO, VERDE, 1 y 2, sin más que observar la composición de la urna.

	V	R	N	TOTAL
1		2		
2		3		
TOTAL		5		

c) Comprueba que las probabilidades obtenidas en b) se pueden obtener sumando filas o columnas del cuadro formado en a).

d) Calcula las probabilidades condicionadas: P[1/ROJO], P[1/VERDE], P[1/NEGRO], P[2/ROJO], P[2/VERDE], P[2/NEGRO], P[ROJO/1], P[VERDE/1].

e) Di si alguno de los caracteres ROJO, NEGRO, VERDE es independiente de 1 o de 2.

a)

	V	R	N	TOTAL
1	2	**2**	2	6
2	0	**3**	1	4
TOTAL	2	**5**	3	10

b) y c) $P[\text{R}] = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

$P[\text{N}] = \dfrac{3}{10} = 0,3$

$P[\text{V}] = \dfrac{2}{10} = \dfrac{1}{5} = 0,2$

$P[1] = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5} = 0,6$

$P[2] = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5} = 0,4$

d) $P[1/\text{R}] = \dfrac{2}{5}$; $P[1/\text{V}] = 1$; $P[1/\text{N}] = \dfrac{2}{3}$

$P[2/\text{R}] = \dfrac{3}{5}$; $P[2/\text{V}] = 0$; $P[2/\text{N}] = \dfrac{1}{3}$

$P[\text{R}/1] = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$; $P[\text{V}/1] = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

e) No son independientes.

5 Pruebas compuestas

Página 398

1 ¿Verdadero o falso?

a) En una bolsa tenemos 5 bolas verdes y 5 bolas rojas. Extraemos una bola y luego otra. Las dos extracciones son independientes.

Por tanto: $P[1.^a \text{ ROJA y } 2.^a \text{ VERDE}] = P[\text{ROJA en } 1.^a] \cdot P[\text{VERDE en } 2.^a] = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{4} = 0,25.$

b) Tenemos dos bolsas, cada una de ellas con 5 bolas verdes y 5 bolas rojas. Extraemos una bola de la primera bolsa y una bola de la segunda bolsa. Las dos extracciones son independientes. Por tanto: $P[1.^a \text{ ROJA y } 2.^a \text{ VERDE}] = P[\text{ROJA en } 1.^a] \cdot P[\text{VERDE en } 2.^a] = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{4} = 0,25.$

a) Falso, porque la composición de la bolsa, cuando se va a extraer la segunda bola, depende de la primera bola extraída. En este caso las pruebas compuestas no son independientes.

b) Verdadero. Al extraer de dos bolsas distintas, las pruebas son independientes.

2 Calcula la probabilidad de obtener TRES CUATROS al lanzar tres dados.

$$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} \approx 0,0046$$

3 Calcula la probabilidad de que no nos salga el número 6 (NINGÚN SEIS) al lanzar cuatro dados (cuatro veces NO SEIS).

$$P = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,48$$

4 Calcula la probabilidad de obtener ALGÚN SEIS al lanzar cuatro dados. (ALGÚN SEIS es el suceso contrario de NINGÚN SEIS).

$1 - P[\text{NINGÚN } 6] = 1 - 0,48 = 0,52$

5 Calcula la probabilidad de obtener ALGÚN SEIS al lanzar seis dados.

$$P[\text{NINGÚN } 6] = \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0,335$$

$P[\text{ALGÚN } 6] = 1 - P[\text{NINGÚN } 6] = 1 - 0,335 = 0,665$

Página 399

6 ¿Verdadero o falso?

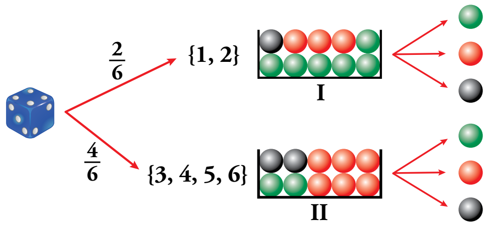
En una bolsa tenemos 5 bolas verdes y 5 bolas rojas. Extraemos una bola y luego otra. La segunda extracción depende del resultado de la primera. Por tanto:

P[1.ª  y 2.ª ] = P[ en 1.ª] · P[ en 2.ª/ en 1.ª] = = $\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{25}{90} = \frac{5}{18}$

Verdadero, porque cuando se va a extraer la segunda bola, queda una bola menos en la urna y todavía están todas las bolas verdes dentro de ella. Las dos experiencias son dependientes.

7 Tenemos un dado y las dos urnas descritas en el dibujo que aparece a continuación.

Lanzamos el dado. Si sale 1 o 2, vamos a la urna I. Si sale 3, 4, 5 o 6, acudimos a la urna II. Extraemos una bola de la urna correspondiente.

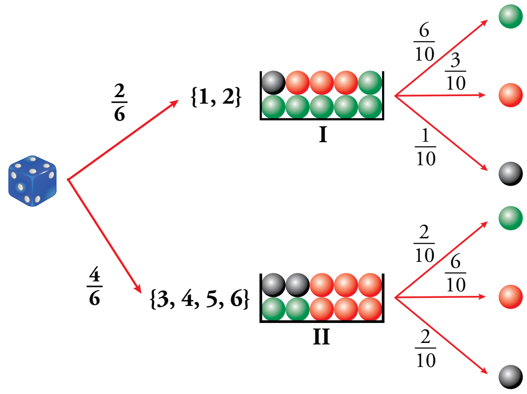


a) Completa las probabilidades en el diagrama en árbol.

b) Halla:

***P*[{3, 4, 5, 6} y]** **$\quad$ *P*[/1]** **$\quad$ *P*[/5]** **$\quad$ *P*[2 y]**

a)



b) $P[\{3, 4, 5, 6\}$ y $] = \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{2}{5}$

$P[/1] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$P[/5] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$P[2$ y $] = \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{1}{10}$

6 Probabilidad total

Página 401

Hazlo tú. **En el ejercicio anterior, calcula P[🟢] y P[⚫].**

Comprueba que la suma P[🔴] + P[🟢] + P[⚫] es igual a 1.

P[🟢] $= \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{3}$

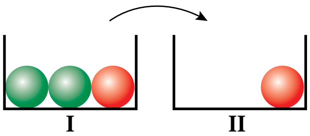
P[⚫] $= \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{6}$

P[🔴] + P[🟢] + P[⚫] $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$

Hazlo tú. **En el ejercicio anterior, si la probabilidad de que cace al ratón es 0,44, entonces la probabilidad de que escape ($\nearrow$) es 0,56 ($P[\nearrow] = 1 - P[+] = 1 - 0{,}44 = 0{,}56$). Calcula dicha probabilidad, $P[\nearrow]$, siguiendo todo el proceso.**

$P[\nearrow] = = 0{,}3 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}2 \cdot 0{,}9 = 0{,}56$

1 **¿Verdadero o falso?**



Primero extraemos una bola de I y la introducimos en II. Después extraemos una bola de II.

a) P[2.ª🔴/1.ª🟢] $= \frac{1}{2}$

b) P[2.ª🟢/1.ª🟢] $= \frac{1}{2}$

c) P[2.ª🔴/1.ª🔴] $= \frac{1}{3}$

d) P[1.ª🟢 y 2.ª🔴] $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

Solo debemos fijarnos en la composición de la segunda urna después de haber pasado cada bola.

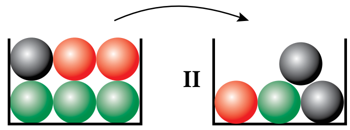
a) Verdadero.

b) Verdadero.

c) Falso. P[2.ª🔴/1.ª🔴] $= \frac{2}{2} = 1$

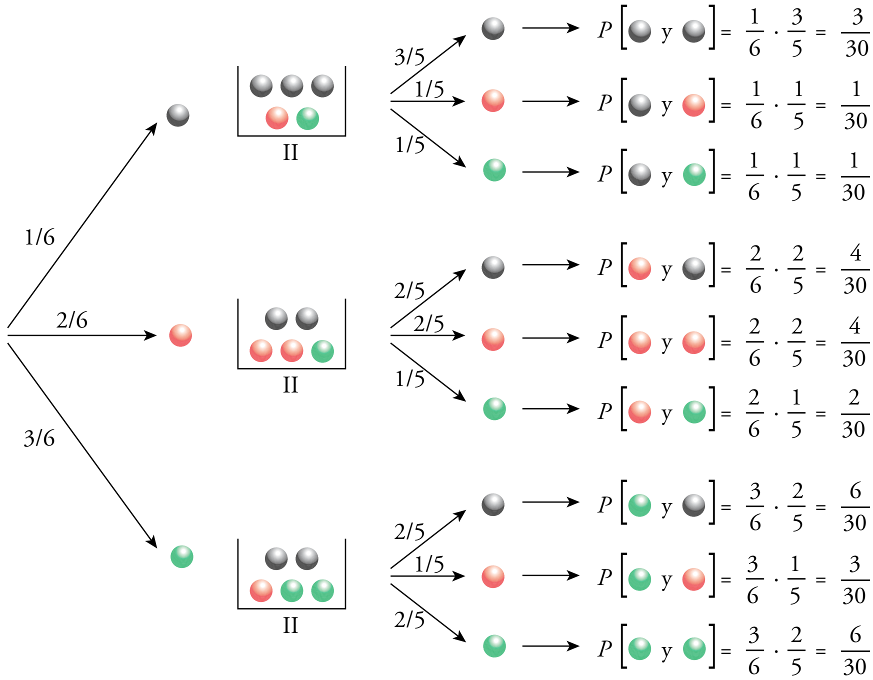
d) Falso. P[1.ª🟢 y 2.ª🔴] $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

2 Tenemos dos urnas:

I  II

La experiencia consiste en extraer una bola de I, introducirla en II, remover y extraer, finalmente, una bola de II. Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea:

a) roja **b) verde** **c) negra**



a) $P[2.^{a}\ ] = \dfrac{1}{30} + \dfrac{4}{30} + \dfrac{3}{30} = \dfrac{8}{30} = \dfrac{4}{15}$

b) $P[2.^{a}\ ] = \dfrac{1}{30} + \dfrac{2}{30} + \dfrac{6}{30} = \dfrac{9}{30} = \dfrac{3}{10}$

c) $P[2.^{a}\ ] = \dfrac{3}{30} + \dfrac{4}{30} + \dfrac{6}{30} = \dfrac{13}{30}$

7 Probabilidades "a posteriori". Fórmula de Bayes

Página 403

Hazlo tú. Si lo que se obtiene finalmente es bola roja, ¿qué probabilidad hay de que provenga de la URNA I? Es decir, calcula $P[\text{I}/🔴]$.

$$P[\text{I}/🔴] = \frac{P[\text{I y }🔴]}{P[🔴]} = \frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{10}}{\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{10}+\frac{4}{6}\cdot\frac{6}{10}} = \frac{1}{5}$$

1 ¿Verdadero o falso?

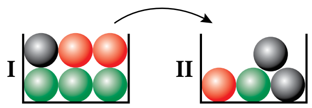
En el ejemplo de los teléfonos GUAY y PUAF visto anteriormente, sabemos de un teléfono que, pasado el tiempo prudencial, NO TIENE AVERÍAS. Ignoramos la marca pero podemos calcular sus probabilidades.

$$100 \begin{cases} \text{G, } 80 \xrightarrow{39/40} \text{G y NO AV, } 78 \\ \text{P, } 20 \xrightarrow{6/10} \text{P y NO AV, } 12 \end{cases} \rightarrow \text{NO AV, } 90$$

$$P[\text{GUAY}/\text{NO AV}] = \frac{78}{90} = 0{,}87$$

$$P[\text{PUAF}/\text{NO AV}] = \frac{12}{90} = 0{,}13$$

Verdadero. Este razonamiento es análogo al desarrollado en el ejemplo de la página anterior.

2 

Se extrae una bola de I y se introduce en II. Se remueve y se extrae una bola de II.

a) Sabiendo que la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera también lo fuera? $P[1.^a⚫/2.^a⚫]$

b) Sabiendo que la segunda bola ha sido roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido negra? $P[1.^a⚫/2.^a🔴]$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera fuera verde siendo verde la segunda? $P[1.^a🟢/2.^a🟢]$

a) $P[1.^a⚫/2.^a⚫] = \frac{P[⚫\text{ y }⚫]}{P[2.^a⚫]} = \frac{3/30}{13/30} = \frac{3}{13}$

b) $P[1.^a⚫/2.^a🔴] = \frac{P[⚫\text{ y }🔴]}{P[2.^a🔴]} = \frac{1/30}{8/30} = \frac{1}{8}$

c) $P[1.^a🟢/2.^a🟢] = \frac{P[🟢\text{ y }🟢]}{P[2.^a🟢]} = \frac{6/30}{9/30} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 404

2. Propiedades de las probabilidades

Hazlo tú. Si $P[A] = 0{,}3$; $P[B'] = 0{,}4$; $P[A' \cup B'] = 0{,}8$; calcula $P[A \cup B]$ y $P[A \cup B]$.

$P[B] = 1 - P[B'] = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$P[A \cup B] = 1 - P[(A \cup B)'] = 1 - P[A' \cup B'] = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cup B] = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}5$

3. Probabilidad condicionada. Sucesos independientes

Hazlo tú. Si $P[A] = 0{,}3$; $P[B] = 0{,}6$; $P[A' \cup B'] = 0{,}82$; ¿son independientes A y B?

$P[A \cup B] = 1 - P[(A \cup B)'] = 1 - P[A' \cup B'] = 1 - 0{,}82 = 0{,}18$

$P[A] \cdot P[B] = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18$

Son independientes.

Página 405

5. Probabilidades en tablas de contingencia

Hazlo tú. Calcula P[VID/MAY].

P[VID/MAY] $= \dfrac{13}{120}$ (De los 120 mayores, 13 practican videojuegos).

Página 406

6. Experiencias compuestas. Probabilidad total y probabilidad "a posteriori"

Hazlo tú. Calcula P[🟢 en II] sin utilizar la probabilidad del suceso contrario y halla también P[🔴 en I/🟢 en II].

P[🟢 en II] = P[🔴 en I] · P[🟢 en II/🔴 en I] + P[🟢 en I] · P[🟢 en II/🟢 en I] =

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{10} = \frac{9}{25}$$

P[🔴 en I/🟢 en II] = $\dfrac{P[🔴 \text{ en I y } 🟢 \text{ en II}]}{P[🟢 \text{ en II}]} = \dfrac{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{10}}{\frac{9}{25}} = \dfrac{1}{3}$

7. Experiencias compuestas. Probabilidad total y probabilidad "a posteriori"

Hazlo tú. Calcula P[NO PREMIO] sin utilizar la probabilidad del suceso contrario. Halla también P[A/NO PREMIO].

P[NO PREMIO] $= \dfrac{10}{36} + \dfrac{6}{36} + \dfrac{9}{36} = \dfrac{25}{36}$

P[A/NO PREMIO] = P[A y NO PREMIO] : P[NO PREMIO] $= \dfrac{10}{36} : \dfrac{25}{36} = \dfrac{2}{5}$

Ejercicios y problemas guiados

Página 407

1. Conjuntos y tablas de contingencia

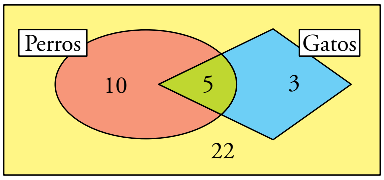
En una comunidad de 40 vecinos, 15 de ellos tienen perros, 8 tienen gatos y 5 tienen perros y gatos.

Se elige al azar un vecino de esta comunidad. Calcular las siguientes probabilidades:

a) P[PERRO o GATO]

b) P[ni PERRO ni GATO]

c) P[PERRO/GATO]



	PERROS	NO PERROS	TOTAL
GATOS	5	3	8
NO GATOS	10	22	32
TOTAL	15	25	40

a) $P[\text{PERRO o GATO}] = \dfrac{10+5+3}{40} = \dfrac{18}{40} = 0{,}45$

b) $P[\text{ni PERRO ni GATO}] = \dfrac{22}{40} = 0{,}55$

c) $P[\text{PERRO/GATO}] = \dfrac{5}{8} = 0{,}625$ (de los 8 que tienen gato, 5 también tienen perro).

2. Probabilidades en experiencias compuestas

Un dado está trucado de manera que son iguales las probabilidades de obtener 2, 4 o 6; también son iguales las probabilidades de sacar 1, 3 o 5, y la probabilidad de obtener 2 es el doble que la de sacar 1.

Deducir razonadamente cuál es la probabilidad de que, al lanzar el dado dos veces, se obtenga una suma de puntos igual a 7.

Llamamos:

$$p = P[1] = P[3] = P[5].$$

Entonces:

$$P[2] = P[4] = P[6] = 2p$$

Ahora bien:

$$1 = P[E] = P[1] + P[3] + P[5] + P[2] + P[4] + P[6] = p + p + p + 2p + 2p + 2p = 9p$$

Por tanto:

$$1 = 9p \rightarrow p = \frac{1}{9}$$

Las parejas cuya suma es 7 son: (1, 6); (2, 5), (3, 4) y sus "simétricas".

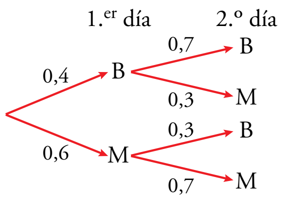
Cada pareja está formada por un número par y uno impar. Como los lanzamientos son independientes entre sí, la probabilidad de cada pareja es $\dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{2}{81}$.

Por tanto:

$$P[\text{SUMA } 7] = 6 \cdot \frac{2}{81} = \frac{12}{81} = 0{,}15$$

3. Probabilidad total

Suponemos que el tiempo (climatológico) solo se puede clasificar como bueno o malo y que, en cierta zona, la probabilidad de que se produzca, de un día para otro, un cambio de tiempo es de 0,3. Si la probabilidad de que haga buen tiempo (en esa zona) el 20 de junio es de 0,4; ¿qué probabilidad hay de que el 21 de junio haga buen tiempo?



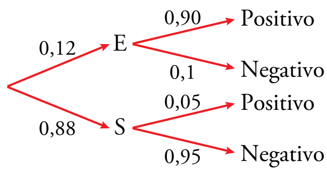
$P[2.° \text{ B}] = P[1.° \text{ B y } 2.° \text{ B}] + P[1.° \text{ M y } 2.° \text{ B}] = 0{,}4 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}46$

4. Probabilidad "a posteriori"

El 12 % de la población de un país padece cierta enfermedad. Se dispone de una prueba para detectarla, pero no es fiable.

- ***Da positivo en el 90 % de los casos de personas realmente enfermas.***
- ***Da positivo en el 5 % de personas sanas.***

¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que la prueba le ha dado positivo?



$P[\text{POSITIVO}] = 0{,}12 \cdot 0{,}9 + 0{,}88 \cdot 0{,}05 = 0{,}152$

$$P[\text{SANAS/POSITIVO}] = \frac{P[\text{SANAS y POSITIVO}]}{P[\text{POSITIVO}]} = \frac{0{,}88 \cdot 0{,}05}{0{,}152} = 0{,}29$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 408

Para practicar

Espacio muestral. Sucesos

1 Di cuál es el espacio muestral correspondiente a cada experiencia aleatoria:

a) Lanzar dos monedas y decir lo que sale en cada una.

b) Lanzar dos monedas y anotar el número de caras.

c) Lanzar una moneda y un dado.

d) Extraer una carta de una baraja y anotar el palo.

e) Lanzar una pelota a canasta (encestar o no).

f) Preguntar a una persona por el día de la semana en el que cae su cumpleaños este año.

a) E = {(C, C), (C, +), (+, C), (+, +)}

b) E = {0, 1, 2}

c) E = {(C, 1), (C, 2), (C, 3), (C, 4), (C, 5), (C, 6), (+, 1), (+, 2), (+, 3), (+, 4), (+, 5), (+, 6)}

d) E = {OROS, COPAS, ESPADAS, BASTOS}

e) E = {ENCESTAR, NO ENCESTAR}

f) E = {LUNES, MARTES, MIÉRCOLES, JUEVES, VIERNES, SÁBADO, DOMINGO}

2 Se extrae una carta de una baraja española. Consideramos los sucesos A, FIGURA; B, BASTOS, y C, MENOR QUE 4.

a) Expresa en función de A, B y C estos sucesos:

- **Se realiza alguno de los tres.**
- **No se realiza ninguno de los tres.**
- **Se realizan los tres.**
- **Alguno no se realiza.**
- **Se realiza el A o el B, pero no el C.**

b) Describe los elementos correspondientes a cada uno de los sucesos del apartado a).

a) • $A \cup B \cup C$

• $A' \cup B' \cup C'$

• $A \cup B \cup C$

• $A' \cup B' \cup C'$

• $(A \cup B) \cup C'$

b) • Cualquier figura o basto o cualquier carta menor que 4.

• Oros, copas o espadas mayores o iguales que 4 que no sean figuras.

• Este suceso es imposible porque no hay figuras con numeración menor que 4.

• Este suceso es seguro porque entre las cartas que no son figuras y las que tienen numeración mayor o igual que 4 reunimos toda la baraja.

• Cualquier figura o cualquier basto con numeración mayor o igual que 4.

Lanzamos tres monedas y anotamos el resultado, C y +, de cada una. Consideramos los sucesos A = "Sacar más caras que cruces" y B = "Sacar una o dos cruces". Halla todos los casos que integran los sucesos $A \cup B$ y $A \cup B$.

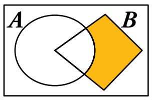
A = {(C, C, +), (C, + , C), (+, C, C), (C, C, C)}

B = {(C, C, +), (C, +, C), (+ C, C), (+, +, C), (+, C, +), (C, +, +)}

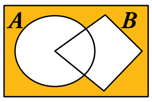
$A \cup B$ = {(C, C, +), (C, +, C), (+ C, C), (+, +, C), (+, C, +), (C, +, +), (C, C, C)}

$A \cup B$ = {(C, C, +), (C, + , C), (+, C, C)}

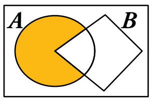
3 **Relaciona cada diagrama con un suceso.**

a) 

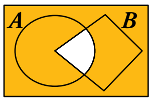
I. $A \cup B'$

b) 

II. $A' - B'$

c) 

III. $A' \cup B'$

d) 

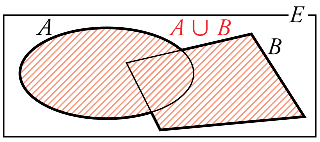
IV. $A' \cup B'$

a) $\to$ II b) $\to$ IV c) $\to$ I d) $\to$ III

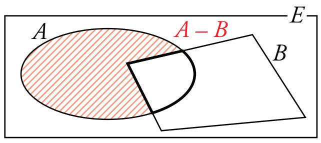
4 **Ayúdate de diagramas para resolver cada apartado.**

a) Expresa $A \cup B$ como unión de tres sucesos incompatibles. Puedes utilizar alguno de los siguientes: A', B', $A - B$, $B - A$, $A \cup B$.

b) El suceso $A - B$ es igual a algunos de los siguientes sucesos; di a cuáles: $A \cup B$, $A \cup B'$, $A' \cup B$, $A - (A \cup B)$

a) 

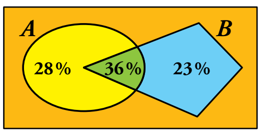
$A \cup B = (A - B) \cup (A \cup B) \cup (B - A)$

b) 

$A - B = A \cup B' = A - (A \cup B)$

Propiedades de la probabilidad

5 **Observa los siguientes conjuntos:**



Calcula $P[A \cup B]$, $P[A'/B]$, $P[A/B']$ y $P[A \cup B']$.

$$P[A \cup B] = \frac{28}{100} + \frac{36}{100} + \frac{23}{100} = \frac{87}{100}$$

$$P[A'/B] = \frac{\dfrac{23}{100}}{\dfrac{36}{100} + \dfrac{23}{100}} = \frac{23}{51}$$

$$P[A/B'] = \frac{\dfrac{28}{100}}{1 - \left(\dfrac{36}{100} + \dfrac{23}{100}\right)} = \frac{28}{41}$$

$$P[A \cup B'] = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$$

6 **De los sucesos A y B se sabe lo siguiente:**

$$P[A] = \frac{2}{5} \qquad P[B] = \frac{1}{3} \qquad P[A' \cup B'] = \frac{1}{3}$$

Calcula $P[A \cup B]$ y $P[A \cup B]$.

- $P[A' \cup B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B]$

$$\frac{1}{3} = 1 - P[A \cup B] \rightarrow P[A \cup B] = \frac{2}{3}$$

- $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - P[A \cap B]$$

$$P[A \cap B] = \frac{1}{15}$$

7 **Sean A y B dos sucesos tales que:**

$$P[A \cup B] = \frac{3}{4} \qquad P[B'] = \frac{2}{3} \qquad P[A \cup B] = \frac{1}{4}$$

Calcula $P[A]$, $P[B]$ y $P[A' \cup B]$.

$P[B] = 1 - P[B'] = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

$\frac{3}{4} = P[A] + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \rightarrow P[A] = \frac{2}{3}$

$P[A' \cup B] = P[B] - P[A \cup B] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

8 **Sean A y B dos sucesos de manera que $P[A] = 0{,}4$; $P[B] = 0{,}3$ y $P[A \cup B] = 0{,}1$. Halla razonadamente:**

a) $P[A \cup B]$ **b) $P[A' \cup B']$** **c) $P[A \cup B']$** **d) $P[A' \cup B']$**

a) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cup B] = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}6$

b) $P[A' \cup B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

c) $P[A \cup B'] = P[A] - P[A \cup B] = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3$

d) $P[A' \cup B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

9 **Se sabe que $P[A] = \frac{1}{4}$, $P[B] = \frac{1}{2}$ y $P[A \cup B] = \frac{2}{3}$. Determina si los sucesos A y B son compatibles o incompatibles.**

Dos sucesos A y B son incompatibles cuando $P[A \cup B] = 0$.

Como:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - P[A \cap B] \rightarrow P[A \cap B] = \frac{1}{12} \neq 0$$

Los sucesos A y B son compatibles.

10 **Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral con $P[A] = 0{,}7$; $P[B] = 0{,}6$ y $P[A \cup B] = 0{,}9$.**

a) Justifica si A y B son independientes.

b) Calcula $P[A/B']$ y $P[B/A']$.

a) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cup B] = 0{,}7 + 0{,}6 - 0{,}9 = 0{,}4$

$P[A] \cdot P[B] = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42$

Por no ser los resultados iguales, los sucesos no son independientes.

b) $P[A/B'] = \dfrac{P[A \cap B']}{P[B']} = \dfrac{0{,}7 - 0{,}4}{1 - 0{,}6} = 0{,}75$

$P[B/A'] = \dfrac{P[B \cap A']}{P[A']} = \dfrac{0{,}6 - 0{,}4}{1 - 0{,}7} = 0{,}67$

Probabilidades en experiencias compuestas

11 **Lanzamos cuatro monedas. Calcula la probabilidad de obtener:**

a) Ninguna cara.

b) Alguna cara.

a) $P[\text{NINGUNA CARA}] = P[\text{CUATRO CRUCES}] = P[+] \cdot P[+] \cdot P[+] \cdot P[+] = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{16}$

b) $P[\text{ALGUNA CARA}] = 1 - P[\text{NINGUNA CARA}] = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$

12 **De una baraja se extraen dos cartas. Calcula la probabilidad de que:**

a) Dos sean copas.

b) Al menos una sea copas.

c) Una sea copas y la otra espadas.

Considera dos procesos distintos:

I. Después de extraer una se devuelve al mazo.

II. Se extraen las dos a la vez.

I. Se devuelve la primera al mazo

a) $P[1.^{\text{a}} \text{ COPA y } 2.^{\text{a}} \text{ COPA}] = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{16}$

b) $P[1.^{\text{a}} \text{ COPA o } 2.^{\text{a}} \text{ COPA}] = P[(\text{NINGUNA COPA})'] = 1 - \dfrac{30}{40} \cdot \dfrac{30}{40} = \dfrac{7}{16}$

c) $P[1.^{\text{a}} \text{ COPA y } 2.^{\text{a}} \text{ ESPADA}] + P[1.^{\text{a}} \text{ ESPADA y } 2.^{\text{a}} \text{ COPA}] = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{40} + \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{40} = \dfrac{1}{8}$

II. Se extraen las dos a la vez.

a) $P[1.^{\text{a}} \text{ COPA y } 2.^{\text{a}} \text{ COPA}] = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{9}{39} = \dfrac{3}{52}$

b) $P[1.^{\text{a}} \text{ COPA o } 2.^{\text{a}} \text{ COPA}] = P[(\text{NINGUNA COPA})'] = 1 - \dfrac{30}{40} \cdot \dfrac{29}{39} = \dfrac{23}{52}$

c) $P[1.^{\text{a}} \text{ COPA y } 2.^{\text{a}} \text{ ESPADA}] + P[1.^{\text{a}} \text{ ESPADA y } 2.^{\text{a}} \text{ COPA}] = \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{39} + \dfrac{10}{40} \cdot \dfrac{10}{39} = \dfrac{5}{39}$

13 **Se extraen dos cartas de una baraja española y se tira un dado. ¿Cuál es la probabilidad de que las cartas sean sotas y el número del dado sea par?**

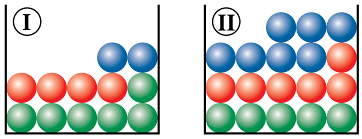
$P[\text{DOS SOTAS y PAR}] = \dfrac{4}{40} \cdot \dfrac{3}{39} \cdot \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{260}$

Ya que hay independencia entre las extracciones de las cartas y el lanzamiento del dado.

Página 409

Probabilidades total y "a posteriori"

14 **Extraemos una bola de cada una de estas urnas:**



¿Cuál es la probabilidad de que sean del mismo color? ¿Y de distinto color?

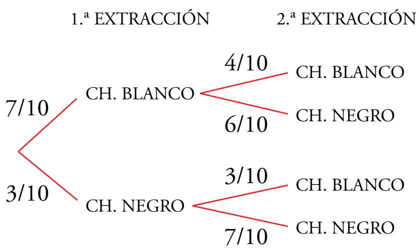
$$P[\text{mismo color}] = \frac{6}{12}\cdot\frac{5}{18}+\frac{4}{12}\cdot\frac{6}{18}+\frac{2}{12}\cdot\frac{7}{18}=\frac{30}{216}+\frac{24}{216}+\frac{14}{216}=\frac{68}{216}=\frac{17}{54}$$

$$P[\text{distinto color}] = 1 - P[\text{mismo color}] = 1-\frac{17}{54}=\frac{37}{54}$$

15 **Hay dos cajas de bombones; la primera tiene 7 bombones de chocolate blanco y 3 de chocolate negro y la segunda, 3 de chocolate blanco y 6 de chocolate negro.**

Se extrae sin mirar un bombón de la primera caja y se pone en la segunda. ¿Qué probabilidad hay de que al coger un bombón de la segunda caja sea de chocolate blanco?

Para resolver el ejercicio construimos el siguiente diagrama en árbol:



$$P[2.^{a}\text{ chocolate blanco}] = \frac{7}{10}\cdot\frac{4}{10}+\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{37}{100}$$

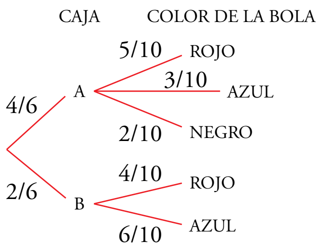
16 **Observa estas cajas con bolas de colores:**

Tenemos un dado que tiene cuatro caras marcadas con la letra A y las otras dos, con la letra B. Tiramos el dado, elegimos la caja que indica y sacamos, al azar, una bola.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja? ¿Y negra?

b) La bola extraída ha resultado ser roja. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la caja B?

Describimos el experimento en el siguiente diagrama en árbol:



a) $P[\text{ROJA}] = \frac{4}{6}\cdot\frac{5}{10}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{10}=\frac{7}{15}$

$P[\text{NEGRA}] = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{10}=\frac{2}{15}$

b) $P[\text{CAJA B}/\text{ROJA}] = \dfrac{P[\text{CAJA B y ROJA}]}{P[\text{ROJA}]}=\dfrac{\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{10}}{\frac{7}{15}}=\frac{2}{7}$

17 **Un bote A contiene 6 clips blancos y 4 negros. Otro bote B tiene 5 clips blancos y 9 negros. Elegimos al azar un bote, extraemos dos clips y resultan ser blancos. Halla la probabilidad de que el bote elegido haya sido el A.**

La probabilidad de elegir cualquiera de los dos botes es $\frac{1}{2}$.

Como las extracciones se realizan simultáneamente, tenemos:

$$P[\text{dos blancos}] = P[\text{caja A y dos blancos}] + P[\text{caja B y dos blancos}] =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{4}{13} = \frac{121}{546}$$

$$P[\text{caja A/dos blancos}] = \frac{P[\text{caja A y dos blancos}]}{P[\text{dos blancos}]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9}}{\frac{121}{546}} = \frac{91}{121}$$

Para resolver

18 **Un estuche contiene 2 lápices azules y 3 rojos. Se extraen dos lápices del estuche.**

a) Escribe los resultados elementales que definen los sucesos M = "Solo ha salido un lápiz rojo" y N = "El segundo lápiz extraído es azul".

b) Halla las probabilidades de M, N y $M \cup N$.

c) ¿Son los sucesos M y N independientes?

a) M = {(rojo, azul), (azul, rojo)}

N = {(rojo, azul), (azul, azul)}

b) $P[M] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P[N] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$P[M \cup N] = \frac{1}{4}$

c) Sí lo son porque verifican la relación: $P[M \cup N] = P[M] \cdot P[N]$

19 **A unas elecciones se presentan seis candidatos: A, B, C, D, E y F. Se estima que B, C y D tienen la misma probabilidad de ganar, que es la mitad de la probabilidad de que gane A. Además, E y F tienen la misma probabilidad de ganar, que es el triple de la probabilidad de que gane A. Calcula:**

a) La probabilidad que tiene de ganar cada candidato.

b) La probabilidad de que gane A o F.

a) Llamemos $p = P[\text{A}]$. Entonces:

$$P[\text{B}] = P[\text{C}] = P[\text{D}] = \frac{p}{2} \qquad P[\text{E}] = P[\text{F}] = 3p$$

Como los sucesos A, B, C, D y E forman el espacio muestral, se tiene que:

$$p + 3 \cdot \frac{p}{2} + 2 \cdot 3p = 1 \ \rightarrow\ \frac{17}{2}p = 1 \ \rightarrow\ p = \frac{2}{17}$$

Por tanto:

$$P[\text{A}] = \frac{2}{17}$$

$$P[\text{B}] = P[\text{C}] = P[\text{D}] = \frac{1}{17}$$

$$P[\text{E}] = P[\text{F}] = \frac{6}{17}$$

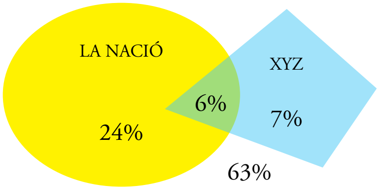
b) $P[\text{A} \cup \text{F}] = \frac{2}{17} + \frac{6}{17} = \frac{8}{17}$

20 **El 30 % de los habitantes de una ciudad lee el diario *La Nació*; el 13 %, el diario *XYZ* y el 6 % lee los dos.**

a) ¿Qué porcentaje de habitantes de esa ciudad no lee ninguno de los dos diarios?

b) De entre los habitantes de esta ciudad que no leen el diario *XYZ*, se elige uno al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que lea el diario *La Nació*?

Organizamos los datos en un gráfico:



a) P[NO LEE NINGÚN PERIÓDICO] = 63 %

b) $P[\text{LEE LA NACIÓ}/\text{NO LEE } XYZ] = \dfrac{24/100}{87/100} = \dfrac{8}{29} = 27{,}6\,\%$

21 **En una encuesta a pie de calle, el 80 % de los entrevistados dice que ve la televisión o lee; el 35 % realiza ambas cosas y el 60 %, no lee. Calcula la probabilidad de que una persona elegida al azar:**

a) Vea la televisión y no lea.

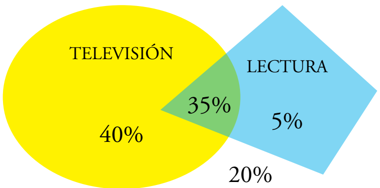
b) Lea y no vea la televisión.

c) Haga solamente una de las dos cosas.

d) No haga ninguna de las dos cosas.

e) ¿Son independientes los sucesos "ver la tele" y "leer"?

Como el 60 % no lee, sí lo hace el 40 %. Así, podemos construir el gráfico:



a) $P[\text{VER TELEVISIÓN Y NO LEER}] = \dfrac{40}{100} = 40\,\%$

b) $P[\text{LEER Y NO VER TELEVISIÓN}] = \dfrac{5}{100} = 5\,\%$

c) $P[\text{HACER SOLO UNA DE LAS DOS}] = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{20} = \dfrac{9}{20} = 45\,\%$

d) $P[\text{NO HACER NINGUNA DE LAS DOS}] = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5} = 20\,\%$

e) Por una parte:

$$P[\text{VER TELEVISIÓN Y LEER}] = \frac{35}{100} = \frac{7}{20} = 35\,\%$$

Por otra:

$$P[\text{VER TELEVISIÓN}] \cdot P[\text{LEER}] = \frac{75}{100} \cdot \frac{40}{100} = \frac{3}{10} = 30\,\%$$

Luego los sucesos no son independientes.

22 **En una ciudad, el 40 % de la población es rubia, el 25 % tiene ojos azules y el 15 % es rubia de ojos azules. Se escoge una persona al azar:**

a) Si es rubia, ¿cuál es la probabilidad de que también tenga ojos azules?

b) Si tiene ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que sea rubia?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea rubia ni tenga los ojos azules?

Construimos la tabla:

	OJOS AZULES	OJOS NO AZULES	TOTAL
CABELLO RUBIO	**15**	25	**40**
CABELLO NO RUBIO	10	50	60
TOTAL	**25**	75	**100**

a) $P[\text{OJOS AZULES}/\text{RUBIO}] = \dfrac{15}{40} = \dfrac{3}{8}$

b) $P[\text{RUBIO}/\text{OJOS AZULES}] = \dfrac{15}{25} = \dfrac{3}{5}$

c) $P[\text{NI RUBIO NI OJOS AZULES}] = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}$

23 **Un 20 % de los estudiantes de una universidad no utiliza el transporte público para ir a clase y un 65 % de los que sí lo utilizan, también hacen uso del comedor universitario.**

Halla la probabilidad de que, seleccionado al azar un estudiante de esa universidad, resulte ser usuario de los transportes públicos y del comedor universitario.

El 80 % de los estudiantes sí usan el transporte público. Por tanto:

$P[\text{TRANSPORTE PÚBLICO Y COMEDOR UNIVERSITARIO}] =$

$= P[\text{TRANSPORTE PÚBLICO}] \cdot P[\text{COMEDOR UNIVERSITARIO/TRANSPORTE PÚBLICO}] = \dfrac{80}{100} \cdot \dfrac{65}{100} = \dfrac{13}{25}$

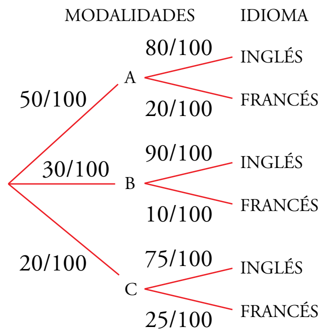
24 **En un centro se ofertan tres modalidades excluyentes, A, B y C, y dos idiomas excluyentes, inglés y francés. La modalidad A es elegida por un 50 % de los alumnos; la B, por un 30 % y la C, por un 20 %.**

Se sabe que ha elegido inglés el 80 % de los alumnos de la modalidad A, el 90 % de la B y el 75 % de la C, habiendo elegido francés el resto.

a) ¿Qué porcentaje de los alumnos ha elegido francés?

b) Si se elige al azar un estudiante de francés, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la modalidad A?

El siguiente diagrama en árbol describe la situación:



a) $P[\text{FRANCÉS}] = \dfrac{50}{100} \cdot \dfrac{20}{100} + \dfrac{30}{100} \cdot \dfrac{10}{100} + \dfrac{20}{100} \cdot \dfrac{25}{100} = \dfrac{18}{100}$

El 18 % de los estudiantes ha elegido francés.

b) $P[\text{MODALIDAD A/FRANCÉS}] = \dfrac{P[\text{MODALIDAD A y FRANCÉS}]}{P[\text{FRANCÉS}]} = \dfrac{\dfrac{50}{100} \cdot \dfrac{20}{100}}{\dfrac{18}{100}} = \dfrac{5}{9}$

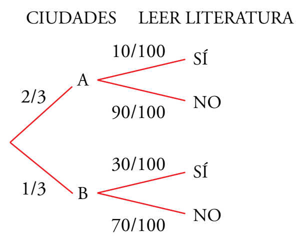
Página 410

25 **La ciudad A tiene el doble de habitantes que la B. Un 30 % de ciudadanos de B lee literatura, y solo un 10 % de ciudadanos de A lee literatura.**

a) Si sabemos que un ciudadano vive en la ciudad A o en la B, ¿qué probabilidad hay de que lea literatura?

b) Si nos presentan a un ciudadano de alguna de las dos ciudades que lee literatura, ¿qué probabilidad hay de que sea de la ciudad B?

Como la ciudad A tiene el doble de habitantes que la B, un ciudadano elegido al azar entre las ciudades A o B tiene doble probabilidad de pertenecer a A que a B. Por tanto:



a) $P[\text{LEER LITERATURA}] = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{10}{100} + \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{30}{100} = \dfrac{1}{6}$

b) $P[\text{B/LEER LITERATURA}] = \dfrac{P[\text{B y LEER LITERATURA}]}{P[\text{LEER LITERATURA}]} = \dfrac{\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{30}{100}}{\dfrac{1}{6}} = \dfrac{3}{5}$

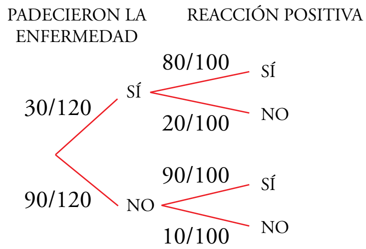
26 **Se ha hecho un estudio de un nuevo tratamiento sobre 120 personas con cierta enfermedad. Se sabe que 30 de ellas ya habían padecido esta enfermedad con anterioridad. Entre las que la habían padecido, el 80 % ha reaccionado positivamente al nuevo tratamiento. Entre aquellas que no la habían padecido, ha sido el 90 % el que reaccionó positivamente.**

a) Si elegimos dos pacientes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que los dos hayan padecido la enfermedad?

b) Determina la probabilidad de que al elegir un paciente al azar, no reaccione positivamente al nuevo tratamiento.

c) Si un paciente ha reaccionado positivamente, ¿cuál es la probabilidad de que no haya padecido la enfermedad con anterioridad?

Nos basamos en el siguiente diagrama en árbol:



a) $P[\text{LOS DOS PADECIERON LA ENFERMEDAD}] = \dfrac{30}{120} \cdot \dfrac{29}{119} = \dfrac{29}{476}$

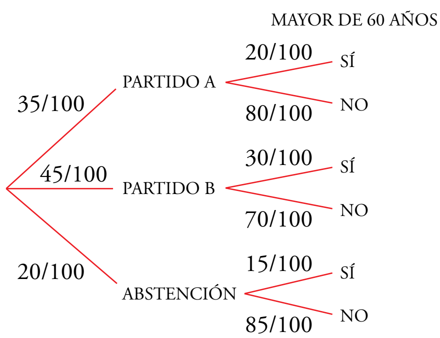
b) $P[\text{NO REACCIONAR POSITIVAMENTE}] = \dfrac{30}{120} \cdot \dfrac{20}{120} + \dfrac{90}{120} \cdot \dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{8}$

c) $P[\text{NO HABER PADECIDO LA ENFERMEDAD/NO REACCIONAR POSITIVAMENTE}] = \dfrac{\dfrac{90}{120} \cdot \dfrac{10}{100}}{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{3}{5}$

27 **En una ciudad, el 35 % de los censados vota al partido A; el 45 %, al partido B y el 20 % se abstiene. Se sabe, además, que el 20 % de los votantes de A, el 30 % de los de B y el 15 % de los que se abstienen, son mayores de 60 años. Elegimos una persona al azar:**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea mayor de 60 años?

b) Si es menor de 60 años, ¿qué probabilidad hay de que haya votado al partido B?



a) $P[\text{MAYOR DE } 60] = \dfrac{35}{100} \cdot \dfrac{20}{100} + \dfrac{45}{100} \cdot \dfrac{30}{100} + \dfrac{20}{100} \cdot \dfrac{15}{100} = \dfrac{47}{200}$

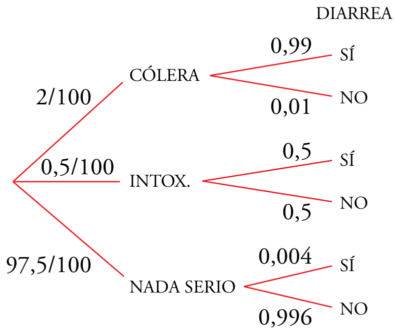
b) $P[\text{MENOR DE } 60] = 1 - \dfrac{47}{200} = \dfrac{153}{200}$

$P[\text{B/MENOR DE } 60] = \dfrac{P[\text{B y MENOR DE } 60]}{P[\text{MENOR DE } 60]} = \dfrac{\dfrac{45}{100} \cdot \dfrac{70}{100}}{\dfrac{153}{200}} = \dfrac{7}{17}$

28 **Hay una epidemia de cólera (C). Se considera como uno de los síntomas la diarrea (D), pero el síntoma se presenta también en personas con intoxicación (I), e incluso en algunas que no tienen nada serio (N). Las probabilidades son:**

$$P[D/C] = 0{,}99 \qquad P[D/I] = 0{,}5 \qquad P[D/N] = 0{,}004$$

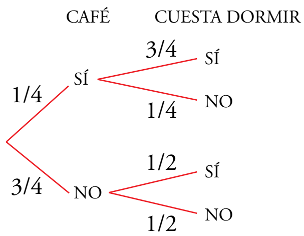
Se dan los siguientes porcentajes: el 2 % de la población tiene cólera; el 0,5 %, intoxicación, y el resto, 97,5 %, nada serio. Si una persona tiene diarrea, ¿cuál es la probabilidad de que tenga cólera?



$$P[D] = \frac{2}{100} \cdot 0{,}99 + \frac{0{,}5}{100} \cdot 0{,}5 + \frac{97{,}5}{100} \cdot 0{,}004 = 0{,}0262$$

$$P[C/D] = \frac{P[C \cap D]}{P[D]} = \frac{(2/100) \cdot 0{,}99}{0{,}0262} = 0{,}76$$

29 **Una de cada cuatro veces me tomo un café después de comer. Por la noche me cuesta dormir las tres cuartas partes de los días que he tomado café y la mitad de los que no tomé nada. No me acuerdo bien si me tomé un café al mediodía, pero si hoy tengo mucho sueño, ¿cuánto más probable es no haberme tomado café que habérmelo tomado?**



$$P[\text{NO CUESTA DORMIR}] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{16}$$

$$P[\text{TOMAR CAFÉ/NO CUERTA DORMIR}] = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{1}{7}$$

$$P[\text{NO TOMAR CAFÉ/NO CUESTA DORMIR}] = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

Por tanto, es 6 veces más probable no haber tomado café que haberlo hecho.

30 **En una ciudad, los ascensos de barrendero a jefe de grupo son muy disputados. Se puede acceder por tres conductos: por oposición, por concurso de méritos o por enchufe. La probabilidad de que un barrendero alcance la plaza si oposita es de 0,2; si concursa, es de 0,8 y si tiene enchufe, seguro que la consigue. Los aspirantes a jefes de grupo se reparten de este modo:**

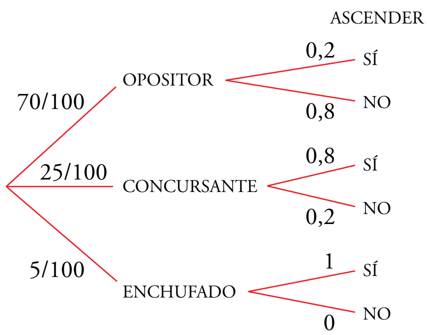
- **70 % son opositores**
- **25 % concursan**
- **5% tienen enchufe**

Calcula:

a) ¿Cuántos de los 120 jefes de grupo consiguieron el ascenso por enchufe?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un cierto jefe de grupo haya alcanzado la plaza por concurso?

c) ¿Qué probabilidad tiene un jefe de grupo escogido al azar, de haber obtenido la plaza opositando?



a) $P[\text{ASCENDER POR ENCHUFE}] = \frac{5}{100} \cdot 1 = \frac{1}{20} = 0{,}05$

El número de jefes que ascendieron por enchufe fue:

$120 \cdot 0{,}05 = 6$

b) $P[\text{HABER CONCURSADO Y ASCENDER}] = \frac{25}{100} \cdot 0{,}2 = 0{,}05$

c) $P[\text{ASCENDER}] = \frac{70}{100} \cdot 0{,}2 + \frac{25}{100} \cdot 0{,}8 + \frac{5}{100} \cdot 1 = 0{,}39$

$P[\text{HABER OPOSITADO/ASCENDER}] = \frac{0{,}14}{0{,}39} = 0{,}39$

Cuestiones teóricas

31 **¿Se puede asegurar que $P[\{1, 2\}] < P[\{1, 2, 7\}]$?**

Como $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 7\}$, podemos afirmar que $P[\{1, 2\}] \le P[\{1, 2, 7\}]$ pero no tiene por qué darse la desigualdad estricta.

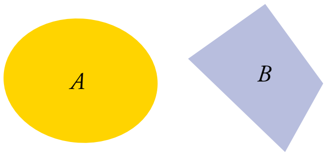
32 **Sírvete de un diagrama para verificar estas afirmaciones y, si no fueran ciertas, pon un ejemplo:**

a) Si $A \cup B = \varnothing$, entonces $A' \cup B = B$.

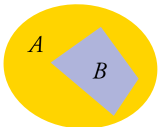
b) Si $A \cup B' = E$, entonces $P[B] = 0$.

c) Si A y B son incompatibles, entonces A' y B' son incompatibles.

a) Verdadero. Podemos comprobarlo en el siguiente diagrama:



b) Falso. Si B es un suceso no vacío contenido en A, se cumple la hipótesis y $P[B]$ no es 0.

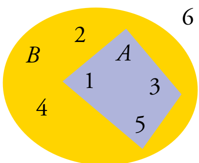


c) Falso. Usando el primer diagrama, en el que los sucesos son incompatibles, vemos que:

$A' \cup B' = (A \cup B)'$ puede ser no vacío.

33 **El siguiente enunciado es falso: "Si A' y B son compatibles, entonces A y B' son compatibles". Pon un ejemplo de un experimento y dos sucesos A y B de forma que A' y B sean compatibles, pero A y B' sean incompatibles.**

Consideramos el experimento que consiste en el lanzamiento de un dado y los sucesos del siguiente diagrama:



$A = \{1, 3, 5\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Entonces: $A' = \{2, 4, 6\}$ $\quad B' = \{6\}$ $\quad A' \cup B = \{2, 4\}$ $\quad A \cup B' = \varnothing$

34 **Si la probabilidad de que ocurran dos sucesos a la vez es p, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno de los dos no ocurra? Razónalo.**

Si $P[A \cup B] = p$, entonces:

$$P[A' \cup B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] = 1 - p$$

35 **Al tirar tres dados podemos obtener SUMA 9 de seis formas distintas:**

1-2-6, 1-3-5, 1-4-4, 2-2-5, 2-3-4, 3-3-3

Y hay otras seis de obtener SUMA 10:

1-3-6, 1-4-5, 2-2-6, 2-3-5, 2-4-4, 3-3-4

Sin embargo, la experiencia nos dice que es más fácil obtener SUMA 10 que SUMA 9. ¿Por qué?

1, 2, 6; 1, 3, 5; 2, 3, 4 $\rightarrow$ cada uno da lugar a 3! formas distintas. Es decir: $3 \cdot 3! = 3 \cdot 6 = 18$

1, 4, 4; 2, 2, 5 $\rightarrow$ cada uno da lugar a 3 formas distintas. Es decir: $2 \cdot 3 = 6$

$18 + 6 + 1 = 25$ formas distintas de obtener suma 9.

$$P[\text{suma } 9] = \frac{25}{6^3} = \frac{25}{216}$$

1, 3, 6; 1, 4, 5; 2, 3, 5 $\rightarrow$ $6 \cdot 3 = 18$ formas

2, 2, 6; 2, 4, 4; 3, 3, 4 $\rightarrow$ $3 \cdot 3 = 9$ formas

$18 + 9 = 27$ formas distintas de obtener suma 10

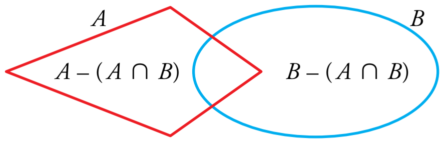
$$P[\text{suma } 10] = \frac{27}{216}$$

Está claro, así, que $P[\text{suma } 10] > P[\text{suma } 9]$.

36 Demuestra la siguiente propiedad:

$$\boldsymbol{P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cup B]}$$

descomponiendo $A \cup B$ en tres sucesos distintos.



$P[A \cup B] = P[A - (A \cup B)] + P[A \cup B] + P[B - (A \cup B)] =$

$= P[A] - P[A \cup B] + P[A \cup B] + P[B] - P[A \cup B] =$

$= P[A] + P[B] - P[A \cup B]$

Página 411

Para profundizar

37 Tenemos una urna con tres bolas blancas y tres negras. Tiramos un dado y extraemos de la urna tantas bolas como indica el dado. ¿Cuál es la probabilidad de que sean todas blancas?

$P[$TODAS LAS BOLAS SON BLANCAS$] = P[1$ y UNA BLANCA$] + P[2$ y DOS BLANCAS$] + P[3$ y TRES BLANCAS$] =$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

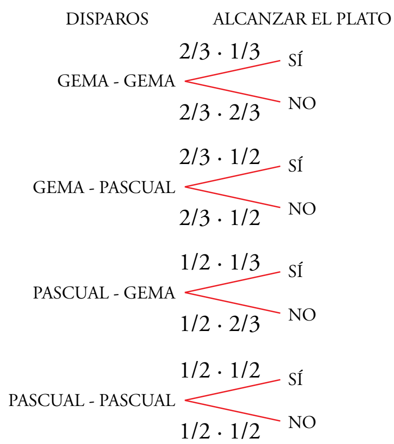
38 Gema y Pascual juegan al tiro al plato. Gema acierta 1 de cada 3 disparos y Pascual, 1 de cada 2. Al lanzar un plato al aire, se oyen dos disparos consecutivos; que de forma equiprobable fueron hechos ambos por Gema, ambos por Pascual, o uno por cada uno. Observamos que el plato no ha sido alcanzado.

a) ¿Qué probabilidad hay de que haya sido Gema la que hizo los dos disparos? ¿Y de que fuera Pascual?

b) ¿Y de que haya hecho un disparo cada uno de los dos?

Puesto que se oyen dos disparos consecutivos, podemos suponer que el primer disparo no acierta en el plato. Hay 4 secuencias posibles de disparos y cada una tiene probabilidad $\frac{1}{4}$.

El siguiente diagrama en árbol recoge las probabilidades:



$$P[\text{no alcanzar el plato}] = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{49}{144}$$

a) $$P[\text{gema 2 disparos/no alcanzar el plato}] = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{49}{144}}=\frac{16}{49}$$

$$P[\text{pascual 2 disparos/no alcanzar el plato}] = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{49}{144}}=\frac{9}{49}$$

b) $$P[\text{1 disparo cada uno/no alcanzar el plato}] = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{49}{144}}=\frac{24}{49}$$

39 **Una moneda se arroja repetidamente. Calcula la probabilidad de que salga dos veces consecutivas el mismo lado si el experimento consta:**

a) Exactamente de 4 lanzamientos.

b) Exactamente de n lanzamientos, $n \geq 2$.

c) Como máximo, de 10 lanzamientos.

a) Consta de cuatro lanzamientos si ocure:

C + C C o bien + C + +

Por tanto:

$$P[\text{cuatro lanzamientos}] = \left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

b) $P[n \text{ lanzamientos}] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $P[10 \text{ o menos lanzamientos}] = P[2 \text{ lanzamientos}] + P[3 \text{ lanzamientos}] +$

$+ P[4 \text{ lanzamientos}] + \ldots + P[10 \text{ lanzamientos}] = \left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^9$

Nos queda la suma de 9 términos de una progresión geométrica con:

$a_1 = \frac{1}{2}$ y $r = \frac{1}{2}$

Por tanto:

$$P[10 \text{ o menos lanzamientos}] = \left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^9=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right]}{\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^9=1-\frac{1}{512}=\frac{511}{512}=0{,}998$$

40 **De una urna en la que hay 2 bolas blancas, 3 rojas y 4 negras, se extraen 3 bolas simultáneamente. Halla la probabilidad de que dos de ellas (y solo dos) sean del mismo color.**

Calculamos:

$$P[\text{2 blancas y 1 de otro color}] = 3\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{7}=\frac{1}{36}$$

teniendo en cuenta que la bola de otro color puede salir en primer, segundo o tercer lugar.

$$P[\text{2 rojas y 1 de otro color}] = 3 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{14}$$

$$P[\text{2 negras y 1 de otro color}] = 3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{42}$$

Por tanto:

$$P[\text{SOLO 2 BOLAS DEL MISMO COLOR}] = \frac{1}{36} + \frac{1}{14} + \frac{5}{42} = \frac{55}{252}$$

41 Lanzamos 3 dados. ¿Cuál es la probabilidad de que el valor intermedio sea 5? ¿Y 2? ¿Y 1?

** **Ten en cuenta que, por ejemplo, el valor intermedio del resultado 5-1-4 es 4; el de 2-1-2 es 2 y el de 4-4-4 es 4.***

Para que el valor intermedio sea 5, los resultados pueden ser:

- (5, 5, 5)
- Desde (5, 5, 1) hasta (5, 5, 4), (5, 5, 6) y sus reordenaciones: 5 · 3 = 15 casos.
- (c, 5, 6) y sus reordenaciones, donde c puede ser 1, 2, 3, 4: 4 · 6 = 24 casos.

Luego:

$$P[\text{VALOR INTERMEDIO } 5] = \frac{1+15+24}{216} = \frac{5}{27}$$

Para que el valor intermedio sea 2, los resultados pueden ser:

- (2, 2, 2)
- (2, 2, 1), desde (2, 2, 3) hasta (2, 2, 6) y sus reordenaciones: 5 · 3 = 15 casos.
- (1, 2, c) y sus reordenaciones, donde c puede ser 3, 4, 5, 6: 4 · 6 = 24 casos.

Luego:

$$P[\text{VALOR INTERMEDIO } 2] = \frac{1+15+24}{216} = \frac{5}{27}$$

Para que el valor intermedio sea 1, los resultados pueden ser:

- (1, 1, 1)
- Desde (1, 1, 2) hasta (1, 1, 6) y sus reordenaciones: 5 · 3 = 15 casos.

Luego:

$$P[\text{VALOR INTERMEDIO } 1] = \frac{1+15}{216} = \frac{2}{27}$$

Autoevaluación

Página 411

1 En el experimento aleatorio de lanzar una moneda tres veces se consideran los siguientes sucesos:

A = "Sacar al menos una cara y una cruz"

B = "Sacar a lo sumo una cara"

a) Determina el espacio muestral asociado a ese experimento y los sucesos A y B.

b) ¿Son independientes ambos sucesos?

a) E = {(C, C, C), (C, C, +), (C, +, C), (+, C, C), (C, +, +), (+, C, +), (+, +, C), (+, +, +)}

A = {(C, C, +), (C, +, C), (+, C, C), (C, +, +), (+, C, +), (+, +, C)}

B = {(C, +, +), (+, C, +), (+, +, C), (+, +, +)}

b) $A \cup B$ = {(C, +, +), (+, C, +), (+, +, C)}

$P[A] = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$P[B] = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$P[A \cup B] = \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = P[A] \cdot P[B]$, luego son independientes.

2 Dados dos sucesos R y S de un mismo experimento aleatorio tales que:

$$P[R] = 0{,}27 \qquad P[S'] = 0{,}82 \qquad P[R \cup S] = 0{,}4$$

Calcula las siguientes probabilidades:

$$P[S],\ P[R \cup S],\ P[(R \cup S)'] \text{ y } P[R' \cup S']$$

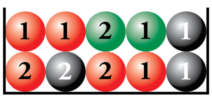
$P[S] = 1 - P[S'] = 1 - 0{,}82 = 0{,}18$

$P[R \cup S] = P[R] + P[S] - P[R \cup S] = 0{,}27 + 0{,}18 - 0{,}4 = 0{,}05$

$P[(R \cup S)'] = 1 - P[R \cup S] = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

$P[R' \cup S'] = P[(R \cup S)'] = 1 - P[R \cup S] = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$

3 Dadas esta urna y la siguiente tabla, copia en tu cuaderno y completa la tabla:



	🔴	🟢	⚫	TOTAL
1				
2				
TOTAL				

Calcula:

a) P[🔴], P[🟢], P[⚫], $P[1]$, $P[2]$

b) P[🔴 ∪ 1], P[🔴/1], P[1/🔴]. Explica el significado de estas probabilidades.

c) P[🟢/1], P[⚫/1]

d) El suceso "1" es independiente con uno de los sucesos 🔴, 🟢 o ⚫. ¿Con cuál? Explica por qué.

	🔴	🟢	⚫	TOTAL
1	3	1	2	6
2	2	1	1	4
TOTAL	5	2	3	10

a) P[🔴] $= \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, P[🟢] $= \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, P[⚫] $= \frac{3}{10}$, $P[1] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $P[2] = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

b) • $P[$🔴 $\cup 1] = \frac{3}{10}$. Significa P[bola roja con el número 1].

• $P[$🔴$/1] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Sabemos que la bola tiene un 1. ¿Cuál es la probabilidad de que sea roja?

• $P[1/$🔴$] = \frac{3}{5}$. Sabemos que la bola es roja. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga un 1?

c) $P[$🟢$/1] = \frac{1}{6}$, $P[$⚫$/1] = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

d) El suceso “1” es independiente respecto a 🔴 porque $P[$🔴$/1] = P[$🔴$] = \frac{1}{2}$.

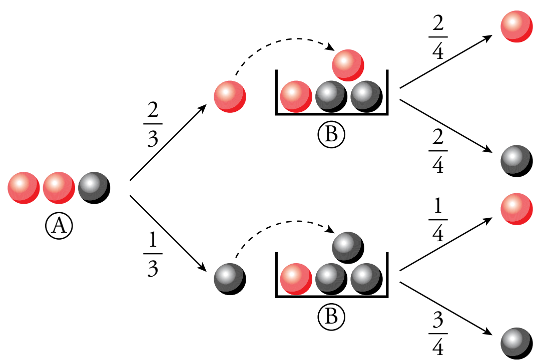
No es independiente respecto a 🟢 porque $P[$🟢$/1) \neq P[$🟢$]$, ni es independiente respecto a ⚫ porque $P[$⚫$/1) \neq P[$⚫$]$.

4 **Extraemos al azar una bola de la urna A y la metemos en B. Removemos y volvemos a extraer al azar una bola, pero esta vez de la urna B. Calcula las siguientes probabilidades:**

a) $P[1.^a$🔴 y $2.^a$🔴$]$, $P[2.^a$🔴$/1.^a$🔴$]$

b) $P[1.^a$⚫ y $2.^a$🔴$]$, $P[2.^a$🔴$/1.^a$⚫$]$, $P[2.^a$🔴$]$

c) $P[2.^a$⚫$]$, $P[1.^a$⚫$/2.^a$🔴$]$



$P[1.^a$🔴 y $2.^a$🔴$] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{12}$

$P[1.^a$🔴 y $2.^a$⚫$] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{12}$

$P[1.^a$⚫ y $2.^a$🔴$] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$P[1.^a$⚫ y $2.^a$⚫$] = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{12}$

a) $P[1.^a$🔴 y $2.^a$🔴$] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$P[2.^a$🔴$/1.^a$🔴$] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b) $P[1.^a$⚫ y $2.^a$🔴$] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$P[2.^a$🔴$/1.^a$⚫$] = \frac{1}{4}$

$P[2.^a$🔴$] = P[1.^a$🔴 y $2.^a$🔴$] + P[1.^a$⚫ y $2.^a$🔴$] = \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$

c) $P[2.^a$⚫$] = P[1.^a$🔴 y $2.^a$⚫$] + P[1.^a$⚫ y $2.^a$⚫$] = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$

$P[1.^a$⚫$/2.^a$🔴$] = \dfrac{P[1.^a \text{⚫ y } 2.^a \text{🔴}]}{P[2.^a \text{🔴}]} = \frac{1/12}{5/12} = \frac{1}{5}$

5 **Un grupo de 15 personas van a ver una película, 9 de las cuales quieren ver una de miedo, y 10, una de acción. Hay tres parejas que no soportan las películas de miedo; entre ellas, Marcos y Lidia, que tampoco les gustan las de acción. Al final han comprado entradas para la de acción.**

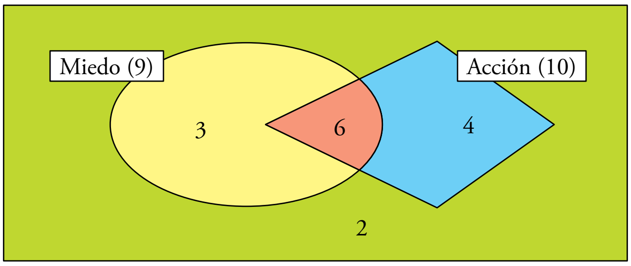
a) Si se pregunta a uno del grupo al azar, ¿qué probabilidad hay de que le haya gustado la elección?

b) Y si le ha gustado, ¿qué probabilidad hay de que no le hubiera importado ir a la de miedo?

c) Si se pregunta a uno de los que les gustan las películas de miedo, ¿qué probabilidad hay de que esté conforme con la elección?

Como hay 2 personas que no soportan ni un tipo ni otro de películas, en total son 13 las personas que quieren ver películas de miedo o de acción. Por tanto, hay 6 personas a las que les gustan ambos tipos de películas.

Teniendo en cuenta el resto de los datos, tenemos:

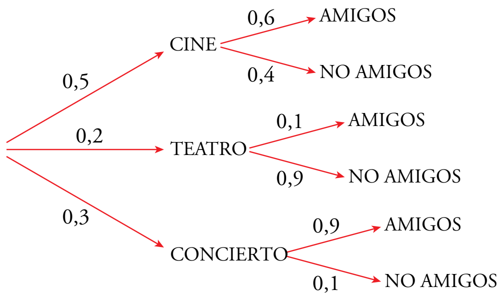


a) $P[\text{ACCIÓN}] = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$ b) $P[\text{MIEDO/ACCIÓN}] = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$ c) $P[\text{ACCIÓN/MIEDO}] = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

6 **Berta ha ido al cine, al teatro o de concierto con probabilidades 0,5; 0,2 y 0,3, respectivamente. El 60 % de las veces que va al cine se encuentra con amigos y se va de marcha con ellos. Lo mismo le ocurre el 10 % de las veces que va al teatro y el 90 % de las que va de concierto.**

a) ¿Qué probabilidad hay de que se quede de marcha?

b) Si después del espectáculo ha vuelto a casa, ¿qué probabilidad hay de que haya ido al teatro?



$P[\text{CINE y AM}] = 0,5 \cdot 0,6 = 0,30$

$P[\text{CINE y no AM}] = 0,5 \cdot 0,4 = 0,20$

$P[\text{TEATRO y AM}] = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02$

$P[\text{TEATRO y no AM}] = 0,2 \cdot 0,9 = 0,18$

$P[\text{CONCIERTO y AM}] = 0,3 \cdot 0,9 = 0,27$

$P[\text{CONCIERTO y no AM}] = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03$

a) $P[\text{AM}] = P[\text{CINE y AM}] + P[\text{TEATRO y AM}] + P[\text{CONCIERTO y AM}] = 0,30 + 0,02 + 0,27 = 0,59$

b) $P[\text{TEATRO/no AM}] = \dfrac{P[\text{TEATRO y no AM}]}{P[\text{no AM}]}$. Calculemos:

$P[\text{TEATRO/no AM}] = 0,18$

$P[\text{no AM}] = 1 - P[\text{AM}] = 1 - 0,59 = 0,41$

(También se podría haber calculado sumando $P[\text{CINE y no AM}] + P[\text{TEATRO y no AM}] + P[\text{CONCIERTO y no AM}]$).

$P[\text{TEATRO/no AM}] = \dfrac{0,18}{0,41} \approx 0,44$

Esto significa, dicho de forma ingenua, que de cada 100 veces que vuelva a casa pronto, en 44 de ellas ha ido al TEATRO.

Autoevaluación

Página 438

1 **Conocemos las siguientes probabilidades:**

$$P[A] = 0{,}33 \qquad P[A' \cup B'] = 0{,}41 \qquad P[B'] = 0{,}62$$

Calcula $P[B]$, $P[A \cup B]$ y $P[A \cup B]$.

$P[B] = 1 - P[B'] = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$

$P[A' \cup B'] = 0{,}41 = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] \ \rightarrow\ P[A \cup B] = 1 - 0{,}41 = 0{,}59$

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cup B] = 0{,}33 + 0{,}38 - 0{,}59 = 0{,}12$

2 **En una clase, el 40 % aprueba filosofía y el 50% matemáticas. Además, la probabilidad de aprobar la filosofía habiendo aprobado las matemáticas es 0,8.**

a) ¿Qué proporción de la clase suspende ambas asignaturas?

b) Calcula el porcentaje de estudiantes que, teniendo aprobada la filosofía, aprueba también las matemáticas.

Sean los sucesos F = "aprobar filosofía" y M = "aprobar matemáticas".

$P[\mathrm{F}] = \dfrac{40}{100} = 0{,}4$

$P[\mathrm{M}] = \dfrac{50}{100} = 0{,}5$

$P[\mathrm{F/M}] = 0{,}8$

a) $P[\mathrm{F/M}] = 0{,}8 = \dfrac{P[\mathrm{F} \cap \mathrm{M}]}{P[\mathrm{M}]} = \dfrac{P[\mathrm{F} \cap \mathrm{M}]}{0{,}5} \ \rightarrow\ P[\mathrm{F} \cup \mathrm{M}] = 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}4$

Los alumnos que suspenden ambas asignaturas constituyen el suceso $\mathrm{F}' \cup \mathrm{M}'$.

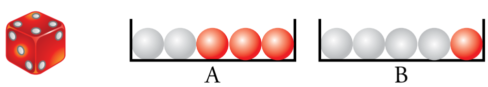
$P[\mathrm{F} \cup \mathrm{M}] = P[\mathrm{F}] + P[\mathrm{M}] - P[\mathrm{F} \cup \mathrm{M}] = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}5$

$P[\mathrm{F}' \cup \mathrm{M}'] = P[(\mathrm{F} \cup \mathrm{M})'] = 1 - P[\mathrm{F} \cup \mathrm{M}] = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

b) Nos piden:

$P[\mathrm{M/F}] = \dfrac{P[\mathrm{F} \cap \mathrm{M}]}{P[\mathrm{F}]} = \dfrac{0{,}4}{0{,}4} = 1$

Es decir, el 100 % de los alumnos que aprueban filosofía también han aprobado matemáticas.

3 

Si en el dado sale 1, sacamos bola de B. Si sale otra puntuación, la sacamos de A. Calcula:

P[●/1] **P[1 y ●]** **P[●]** **P[○]** **P[1/●]**

P[●/1] $= \dfrac{3}{5}$

P[1 y ●] = P[●/1] · P[1] $= \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{10}$

P[●] = P[1 y ●] + P[1' y ●] = P[●/1] · P[1] + P[●/1'] · P[1'] $= \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{4}{15}$

P[○] = 1 – P[●] $= 1 - \dfrac{4}{15} = \dfrac{11}{15}$

P[1/●] = $\dfrac{P[\text{1 y ●}]}{P[\text{●}]} = \dfrac{1/10}{4/15} = \dfrac{3}{8}$

4 **Por cada 100 personas con gafas o lentillas de un cierto colectivo, hemos atendido al color de ojos (azul, verde, negro, marrón). Alguno de los resultados se refleja en la siguiente tabla:**

	AZUL	VERDE	NEGRO	MARRÓN	TOTAL
GAFAS	**11**	**5**		**25**	**55**
LENTILLAS					
TOTAL	**20**	**15**	**25**		**100**

a) Completa la tabla.

b) Calcula $P[\text{AZUL}]$, $P[\text{GAFAS}]$, $P[\text{AZUL y GAFAS}]$.

c) Calcula $P[\text{AZUL/GAFAS}]$, $P[\text{GAFAS/AZUL}]$.

d) Explica por qué los sucesos GAFAS y AZUL son independientes.

a)

	AZUL	VERDE	NEGRO	MARRÓN	TOTAL
GAFAS	**11**	**5**	14	**25**	**55**
LENTILLAS	9	10	11	15	45
TOTAL	**20**	**15**	**25**	40	**100**

b) $P[\text{AZUL}] = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$; $P[\text{GAFAS}] = \dfrac{55}{100} = \dfrac{11}{20}$; $P[\text{AZUL y GAFAS}] = \dfrac{11}{100}$

c) $P[\text{AZUL/GAFAS}] = \dfrac{P[\text{AZUL y GAFAS}]}{P[\text{GAFAS}]} = \dfrac{\frac{11}{100}}{\frac{11}{20}} = \dfrac{1}{5}$

$P[\text{GAFAS/AZUL}] = \dfrac{P[\text{AZUL y GAFAS}]}{P[\text{AZUL}]} = \dfrac{\frac{11}{100}}{\frac{20}{100}} = \dfrac{11}{20}$

d) Del apartado b) se deduce que $P[\text{AZUL y GAFAS}] = \dfrac{11}{100} = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{11}{20} = P[\text{AZUL}] \cdot P[\text{GAFAS}]$

Por tanto, los sucesos son independientes.

También, observando los apartados b) y c) vemos que el hecho de llevar gafas no influye en la probabilidad de tener ojos azules ya que $P[\text{AZUL}] = P[\text{AZUL/GAFAS}]$.

Esto justifica la independencia entre los sucesos.

5 **En una distribución $N(0, 1)$ calcula:**

a) $P[0{,}25 < z < 1{,}45]$

b) $P[-0{,}25 < z \le 1{,}45]$

c) El valor de k para que $P[-k < z < k] = 0{,}90$.

a) $P[0,25 < z < 1,45] = P[z < 1,45] - P[z \le 0,25] = 0,9265 - 0,5987 = 0,3278$

b) $P[-0,25 < z \le 1,45] = P[z \le 1,45] + P[z < 0,25] - 1 = 0,9265 + 0,5987 - 1 = 0,5252$

c) $P[-k < z < k] = 2P[0 < z < k] = 2\,(P[z < k] - 0,5) = 2P[z < k] - 1 = 0,9 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; P[z < k] = \dfrac{1,9}{2} = 0,95 \;\rightarrow\; k = 1,645$

6 **En una distribución $N(20, 4)$ calcula:**

a) $P[x = 21]$

b) $P[x < 21]$

c) $P[19 \le x \le 21]$

a) $P[x = 21] = 0$

b) $P[x < 21] = P\left[\dfrac{x-20}{4} < \dfrac{21-20}{4}\right] = P[z < 0,25] = 0,5987$

c) $P[19 \le x \le 21] = P\left[\dfrac{19-20}{4} \le \dfrac{x-20}{4} \le \dfrac{21-20}{4}\right] = P[-0,25 \le z \le 0,25] =$

$= 2P[0 \le z \le 0,25] = 2P[z \le 0,25] - 1 = 2 \cdot 0,5987 - 1 = 0,1974$

7 **En una distribución $B(10; 0{,}4)$ calcula:**

a) $P[x = 0]$, $P[x = 1]$, $P[x > 1]$.

b) Los parámetros μ y σ.

Los datos de la distribución son $n = 10$; $p = 0{,}4$; $q = 0{,}6$

a) $P[x = 0] = 0{,}6^{10} = 0{,}00605$

$P[x = 1] = \binom{10}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^9 = 0,04031$

$P[x > 1] = 1 - P[x \le 1] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1]) = 1 - (0,00605 + 0,04031) = 0,95364$

b) $\mu = np = 10 \cdot 0{,}4 = 4$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 1,55$

8 **En una ciudad, la temperatura máxima durante el mes de junio está distribuida normalmente con una media de 26° y una desviación típica de 4°. Calcula el número de días que se espera tengan una temperatura máxima comprendida entre 22° y 28°.**

Llamamos X a la temperatura máxima durante el mes de junio:

$X = N(26, 4)$

$P[22 \le x \le 28] = P\left[\dfrac{22-26}{4} \le \dfrac{x-26}{4} \le \dfrac{28-26}{4}\right] = P[-1 \le z \le 0,5] =$

$= P[z \le 0,5] + P[z \le 1] - 1 = 0,6915 + 0,8413 - 1 = 0,5328$

Como el mes de junio tiene 30 días, el número esperado de días es:

$30 \cdot 0{,}5328 = 15{,}984 \approx 16$ días

9 **Un examen tipo test tiene cien preguntas y cada pregunta cuatro respuestas diferentes, de las que solo una es correcta.**

a) Calcula la probabilidad de que un estudiante que responde al azar acierte más de 20 preguntas.

b) Calcula la probabilidad de que de las 20 primeras preguntas acierte a lo sumo 4.

a) Llamamos X a la variable que cuenta el número de preguntas acertadas al azar entre las 100 del examen. X muestra una distribución binomial $\rightarrow X = B(100; 0{,}25)$.

Como $100 \cdot 0{,}25 = 25 \ge 5$, podemos ajustarla mediante una distribución normal X' de parámetros:

$\mu = 100 \cdot 0{,}25 = 25$

$\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,25 \cdot 0,75} = 4,33$

$P[x > 20] = P[x' \ge 20,5] = P\left[\dfrac{x-25}{4,33} \ge \dfrac{20,5-25}{4,33}\right] = P[z \ge -1,04] = P[z \le 1,04] = 0,8508$

b) Análogamente, ahora llamamos X a la variable que cuenta el número de preguntas acertadas al azar entre las 20 primeras del examen $\to X = B(20;\ 0{,}25)$.

Como $20 \cdot 0{,}25 = 5 \geq 5$, podemos ajustarla mediante una distribución normal X' de parámetros:

$\mu = 20 \cdot 0{,}25 = 5$

$\sigma = \sqrt{20 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = 1{,}94$

$$P[x \leq 4] = P[x' \leq 4{,}5] = P\left[\frac{x'-5}{1{,}94} \leq \frac{4{,}5-5}{1{,}94}\right] = P[z \leq -0{,}26] = 1 - P[z < 0{,}26] =$$

$$= 1 - 0{,}6026 = 0{,}3974$$

10 La proporción de personas nacidas un 29 de febrero es 1/1 461.

a) Justifica por qué.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en una localidad de 20 000 habitantes haya menos de 8 personas nacidas un 29 de febrero?

a) El número de días que hay entre dos años bisiestos es $3 \cdot 365 + 366 = 1\,461$

Luego la proporción de personas nacidas el 29 de febrero es $\frac{1}{1\,461}$.

b) Llamamos X a la variable que cuenta el número de personas nacidas el 29 de febrero entre las 20 000 de la localidad $\to X = B\left(20\,000, \frac{1}{1\,461}\right)$.

Como $20\,000 \cdot \frac{1}{1\,461} = 13{,}69 \geq 5$, podemos ajustarla mediante una distribución normal X' de parámetros:

$\mu = 13{,}69$

$\sigma = \sqrt{20\,000 \cdot \frac{1}{1\,461} \cdot \frac{1\,460}{1\,461}} = 3{,}7$

$$P[x < 8] = P[x' \leq 7{,}5] = P\left[\frac{x'-13{,}69}{3{,}7} \leq \frac{7{,}5-13{,}69}{3{,}7}\right] = P\left[z \leq \frac{7{,}5-13{,}69}{3{,}7}\right] =$$

$$= P[z \leq -1{,}67] = 1 - P[z < 1{,}67] = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$$

11 a) Calcula k para que la siguiente tabla corresponda a una distribución de probabilidad:

x_i	11	12	13	14	15	16
p_i	0,15	0,1	0,12	0,17	k	k

b) Halla $P[13 \leq x_i \leq 15]$.

c) Calcula los parámetros μ y σ.

a) Para que la tabla corresponda a una distribución de probabilidad, la suma de las probabilidades debe ser 1.

$0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}12 + 0{,}17 + 2k = 1 \to k = 0{,}23$

b) $P[13 \leq x_i \leq 15] = 0{,}12 + 0{,}17 + 0{,}23 = 0{,}52$

c)

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
11	0,15	1,65	18,15
12	0,1	1,2	14,4
13	0,12	1,56	20,28
14	0,17	2,38	33,32
15	0,23	3,45	51,75
16	0,23	3,68	58,88
	1	13,92	196,78

Por tanto:

$\mu = 13{,}92$

$\sigma = \sqrt{196{,}78 - 13{,}92^2} = 1{,}74$

Resuelve

Página 413

El aparato de Galton

a) Imita el recorrido de un perdigón lanzando una moneda 7 veces y haciendo la asignación CARA → derecha, CRUZ → izquierda. Por ejemplo, si obtienes:

Ⓒ Ⓒ Ⓒ ⊕ Ⓒ ⊕ Ⓒ

¿cuál sería el itinerario correspondiente? Dibújalo.

Repite la experiencia y obtén otros recorridos distintos.

b) Intenta encontrar una ley que asocie el número de caras de la serie, cualquiera que sea el orden en que salen al lanzar la moneda, con el casillero en el que cae el perdigón.

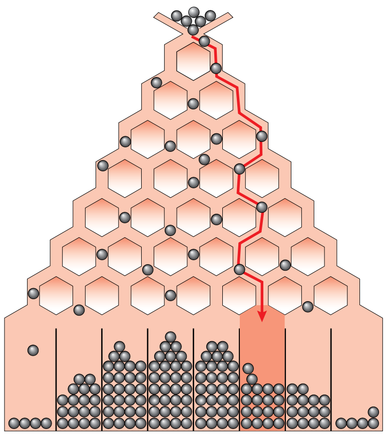
c) ¿Se podría repetir la experiencia tirando 7 monedas simultáneamente y anotando solo el número de caras obtenido?

Intenta ahora explicar por qué hay más perdigones en las casillas centrales que en las extremas.

a) Caería en el sexto intervalo empezando por la izquierda. Si la secuencia tuviera distinto orden ocurriría lo mismo porque lo importante es el número total de desplazamientos que se hacen hacia la izquierda y hacia la derecha. Por ejemplo, la secuencia C, C, +, +, C, +, C coloca el perdigón en el quinto intervalo empezando por la izquierda. Si no sale ninguna cara, el perdigón cae en la primera casilla.

b) El número del intervalo es igual al número de caras más uno.

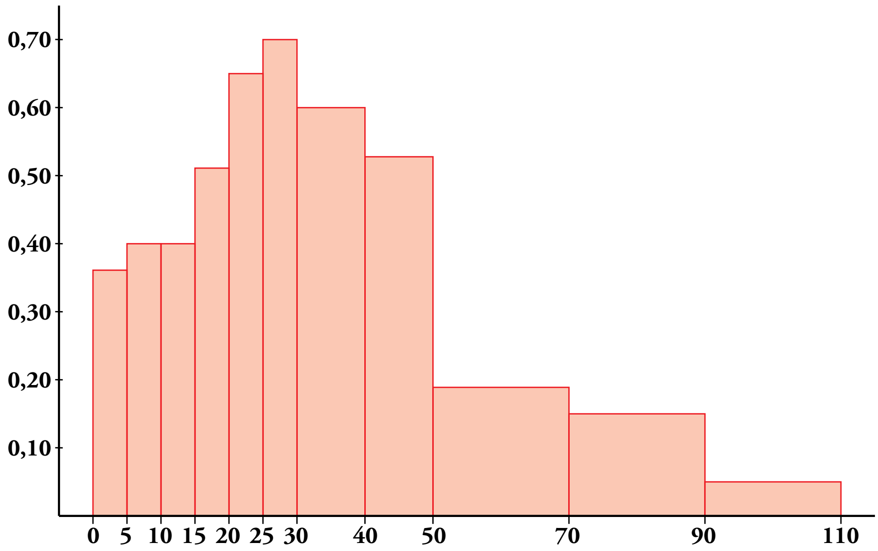
c) Sí, por lo comentado en la respuesta anterior. Hay más perdigones en las casillas centrales que en las extremas porque el número de formas de reordenar las secuencias es mucho mayor. Por ejemplo, a la casilla de la izquierda se puede llegar de una sola forma: +, +, +, +, +, +, +, y a la segunda, de 7 formas diferentes, que son C, +, +, +, +, +, + y sus reordenaciones. A la casilla de la derecha solo se puede llegar con la secuencia C, C, C, C, C, C, C.



1 Distribuciones estadísticas

Página 414

Hazlo tú. Halla las alturas de los demás rectángulos en el diagrama anterior.



2.° rectángulo:

Base = 10 – 5 = 5

Área = 2

Altura = 2 : 5 = 0,4

3.^{er} rectángulo:

Base = 15 – 10 = 5

Área = 2

Altura = 2 : 5 = 0,4

4.° rectángulo:

Base = 20 – 15 = 5

Área = 2,6

Altura = 2,6 : 5 = 0,52

5.° rectángulo:

Base = 25 – 20

Área = 3,2

Altura = 3,2 : 5 = 0,64

6.° rectángulo:

Base = 30 – 25 = 5

Área = 3,5

Altura = 3,5 : 5 = 0,7

8.° rectángulo:

Base = 50 – 40 = 10

Área = 5,3

Altura = 5,3 : 10 = 0,53

10.° rectángulo:

Base = 90 – 70 = 20

Área = 3

Altura = 3 : 20 = 0,15

11.° rectángulo:

Base = 110 – 90 = 20

Área = 1

Altura = 1 : 20 = 0,05

Página 415

1 **Calcula $\bar{x}$ y σ en esta distribución: tiempo que emplean en ir de su casa al colegio un grupo de alumnos. (Recuerda: al intervalo (0, 5] le corresponde su marca de clase 2,5; …).**

TIEMPO (min)	(0, 5]	(5, 10]	(10, 15]	(15, 20]	(20, 25]	(25, 30]
N.° DE ALUMNOS	2	11	13	6	3	1

	x_i	f_i	$f_i \cdot x_i$	$f_i \cdot x_i^2$
(0, 5]	2,5	2	5	12,5
(5, 10]	7,5	11	82,5	618,75
(10, 15]	12,5	13	162,5	2 031,25
(15, 20]	17,5	6	105	1 837,5
(20, 25]	22,5	3	67,5	1 518,75
(25, 30]	27,5	1	27,5	756,25
		36	450	6 775

$$\bar{x} = \frac{450}{36} = 12{,}5 \text{ min}$$

$$\sigma^2 = \frac{6\,775}{36} - 12{,}5^2 = 31{,}944$$

$$\sigma = \sqrt{31{,}944} = 5{,}65 \text{ min}$$

2 Distribuciones de probabilidad de variable discreta

Página 416

1 ¿Verdadero o falso?

Ninguna de las siguientes distribuciones de probabilidad está definida correctamente:

a)

x_i	*a*	*b*	*c*
p_i	0,3	0,4	0,2

Porque $\sum p_i \neq 1$.

b)

x_i	*a*	*b*	*c*	*d*
p_i	0,3	0,4	0,5	–0,2

Porque una de las probabilidades es negativa.

a) Verdadero.

b) Verdadero.

Página 417

2 Calcula la media y la desviación típica de la distribución de probabilidad correspondiente a la puntuación obtenida en el lanzamiento de un dado.

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{4}{6}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{9}{6}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{16}{6}$
5	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{25}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	1	6
	1	$\frac{21}{6}$	$\frac{91}{6}$

$$\mu = \frac{21}{6} = 3,5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{91}{6} - 3,5^2} = 1,71$$

3 Si se tiran dos monedas, podemos obtener 0, 1 o 2 caras. Calcula la media y la desviación típica de la distribución de probabilidad correspondiente.

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
0	$\frac{1}{4}$	0	0
1	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	1
	1	1	$\frac{6}{4}$

$$\mu = 1$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{6}{4} - 1^2} = 0,71$$

4 En una bolsa tenemos un cierto número de bolas numeradas:

9 bolas con un *uno*, 5 con un *dos* y 6 con un *tres*

Sacamos una bola al azar y vemos qué número tiene.

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?

b) Calcula la media y la desviación típica.

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
1	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$
2	$\frac{5}{20}$	$\frac{10}{20}$	1
3	$\frac{6}{20}$	$\frac{18}{20}$	$\frac{54}{20}$
	1	$\frac{37}{20}$	$\frac{83}{20}$

$$\mu = \frac{37}{20} = 1,85$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{83}{20} - 1,85^2} = 0,85$$

3 La distribución binomial

Página 419

1 En una distribución binomial $B(10; 0{,}4)$, halla $P[x = 0]$, $P[x = 3]$, $P[x = 5]$, $P[x = 10]$ y el valor de μ y σ.

$P[x = 0] = 0{,}6^{10} = 0{,}00605$

$$P[x = 3] = \binom{10}{3} \cdot 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 = 0{,}215$$

$$P[x = 5] = \binom{10}{5} \cdot 0{,}4^5 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}2007$$

$P[x = 10] = 0{,}4^{10} = 0{,}000105$

$\mu = 10 \cdot 0{,}4 = 4$

$\sigma = \sqrt{10 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = 1{,}55$

2 Lanzamos 7 monedas. Calcula las probabilidades de 3 caras, 5 caras y 6 caras. Halla los valores de μ y σ.

La distribución que cuenta el número de caras obtenidas es una $B(7; 0{,}5)$ porque el experimento equivale a repetir 7 veces el lanzamiento de una moneda y la probabilidad de obtener cara es $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

$$P[x = 3] = \binom{7}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}2734$$

$$P[x = 5] = \binom{7}{5} \cdot 0{,}5^5 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}1641$$

$$P[x = 6] = \binom{7}{6} \cdot 0{,}5^6 \cdot 0{,}5 = 0{,}0547$$

$\mu = 7 \cdot 0{,}5 = 3{,}5$

$\sigma = \sqrt{7 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = 1{,}32$

3 ¿Verdadero o falso?

"El resultado de uno de los equipos en un partido de fútbol puede ser GANA o NO GANA. Por tanto, es una experiencia dicotómica."

Verdadero. La experiencia sí es dicotómica, puesto que la clave está en prestar atención a un suceso (ganar) o a su contrario (empatar o perder) independientemente de que alguno de ellos tenga varias posibilidades.

4 Distribuciones de probabilidad de variable continua

Página 421

Hazlo tú. Calcula:

a) $P[2 \le x \le 5]$

b) $P[2 \le x \le 2{,}5]$

a) $P[2 \le x \le 5] = (5-2) \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

b) $P[2 \le x \le 2{,}5] = (2{,}5-2) \cdot \frac{1}{4} = 0{,}125$

1 **Calcula k para que $f(x) = \begin{cases} k, & x \in [3, 8] \\ 0, & x \notin [3, 8] \end{cases}$ sea una función de densidad. Halla las probabilidades:**

a) $P[4 < x < 6]$

b) $P[2 < x \le 5]$

c) $P[x = 6]$

d) $P[5 < x \le 10]$

$P[-\infty < x < +\infty] = P[3 \le x \le 8] = 5 \cdot k = 1 \;\to\; k = \frac{1}{5}$

a) $P[4 < x < 6] = 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

b) $P[2 < x \le 5] = P[2 < x \le 3] + P[3 < x \le 5] = 0 + 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

c) $P[x = 6] = 0$

d) $P[5 < x \le 10] = P[5 < x \le 8] = 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

2 **Calcula m para que $f(x) = \begin{cases} mx, & x \in [3, 7] \\ 0, & x \notin [3, 7] \end{cases}$ sea una función de densidad. Halla las probabilidades:**

a) $P[3 < x < 5]$

b) $P[5 \le x < 7]$

c) $P[4 \le x \le 6]$

d) $P[6 \le x < 11]$

$P[-\infty < x < +\infty] = P[3 \le x \le 7] = \frac{3m + 7m}{2} \cdot 4 = 20m = 1 \;\to\; m = \frac{1}{20}$

a) $P[3 < x < 5] = \dfrac{\frac{3}{20} + \frac{5}{20}}{2} \cdot 2 = \frac{2}{5}$

b) $P[5 \le x < 7] = \dfrac{\frac{5}{20} + \frac{7}{20}}{2} \cdot 2 = \frac{3}{5}$

c) $P[4 \le x \le 6] = \dfrac{\frac{4}{20} + \frac{6}{20}}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}$

d) $P[6 \le x < 11] = P[6 \le x \le 7] = \dfrac{\frac{6}{20} + \frac{7}{20}}{2} \cdot 2 = \frac{13}{20}$

5 La distribución normal

Página 424

1 Halla las siguientes probabilidades:

a) $P[z \le 0{,}84]$ **b)** $P[z < 1{,}5]$ **c)** $P[z < 2]$ **d)** $P[z < 1{,}87]$

e) $P[z < 2{,}35]$ **f)** $P[z \le 0]$ **g)** $P[z < 4]$ **h)** $P[z = 1]$

a) $P[z \le 0{,}84] = 0{,}7996$

b) $P[z < 1{,}5] = 0{,}9332$

c) $P[z < 2] = 0{,}9772$

d) $P[z < 1{,}87] = 0{,}9693$

e) $P[z < 2{,}35] = 0{,}9906$

f) $P[z \le 0] = 0{,}5$

g) $P[z < 4] = 1$

h) $P[z = 1] = 0$

2 Di el valor de k en cada caso:

a) $P[z \le k] = 0{,}7019$ **b)** $P[z < k] = 0{,}8997$

c) $P[z \le k] = 0{,}5040$ **d)** $P[z < k] = 0{,}7054$

a) $k = 0{,}53$

b) $k = 1{,}28$

c) $k = 0{,}01$

d) $k = 0{,}54$

3 Di el valor aproximado de k en cada caso:

a) $P[z < k] = 0{,}9533$ **b)** $P[z \le k] = 0{,}62$

a) $k = 1{,}68$

b) $k = 0{,}31$

Página 425

4 Halla:

a) $P[z > 1{,}3]$

b) $P[z < -1{,}3]$

c) $P[z > -1{,}3]$

d) $P[1{,}3 < z < 1{,}96]$

e) $P[-1{,}96 < z < -1{,}3]$

f) $P[-1{,}3 < z < 1{,}96]$

g) $P[-1{,}96 < z < 1{,}96]$

a) $P[z > 1{,}3] = 1 - P[z \le 1{,}3] = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$

b) $P[z < -1{,}3] = P[z > 1{,}3] = 1 - P[z \le 1{,}3] = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$

c) $P[z > -1{,}3] = P[z < 1{,}3] = 0{,}9032$

d) $P[1{,}3 < z < 1{,}96] = 0{,}9750 - 0{,}9032 = 0{,}0718$

e) $P[-1{,}96 < z < -1{,}3] = P[1{,}3 < z < 1{,}96] = 0{,}9750 - 0{,}9032 = 0{,}0718$

f) $P[-1{,}3 < z < 1{,}96] = 0{,}9750 + 0{,}9032 - 1 = 0{,}8782$

g) $P[-1{,}96 < z < 1{,}96] = 0{,}9750 + 0{,}9750 - 1 = 0{,}95$

5 **Halla, a partir de la tabla, las siguientes probabilidades:**

a) $P[-1 \le z \le 1]$ **b)** $P[-2 \le z \le 2]$ **c)** $P[-3 \le z \le 3]$

d) $P[-4 \le z \le 4]$ **e)** $P[0 \le z \le 1]$ **f)** $P[0 \le z \le 4]$

a) $P[-1 \le z \le 1] = 2 \cdot P[0 \le z \le 1] = 2 \cdot (0,8413 - 0,5) = 0,6826$

b) $P[-2 \le z \le 2] = 2 \cdot P[0 \le z \le 2] = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544$

c) $P[-3 \le z \le 3] = 2 \cdot P[0 \le z \le 3] = 2 \cdot 0,4987 = 0,9974$

d) $P[-4 \le z \le 4] = 2 \cdot P[0 \le z \le 4] = 2 \cdot 0,5 = 1,0$

e) $P[0 \le z \le 1] = 0,8413 - 0,5 = 0,3413$

f) $P[0 \le z \le 4] = 1 - 0,5 = 0,5$

Página 426

6 **En una distribución $N(173, 6)$, halla las siguientes probabilidades:**

a) $P[x \le 173]$ **b)** $P[x \ge 180,5]$

c) $P[174 \le x \le 180,5]$ **d)** $P[161 \le x \le 180,5]$

e) $P[161 \le x \le 170]$ **f)** $P[x = 174]$

g) $P[x > 191]$ **h)** $P[x < 155]$

a) $P[x \le 173] = P\left[z \le \frac{173-173}{6}\right] = P[z \le 0] = 0,5$

b) $P[x \ge 180,5] = P\left[z \ge \frac{180,5-173}{6}\right] = P[z \ge 1,25] = 1 - P[z < 1,25] = 1 - 0,8944 = 0,1056$

c) $P[174 \le x \le 180,5] = P\left[\frac{174-173}{6} \le z \le \frac{180,5-173}{6}\right] = P[0,17 \le z \le 1,25] =$

$= 0,8944 - 0,5675 = 0,3269$

d) $P[161 \le x \le 180,5] = P\left[\frac{161-173}{6} \le z \le \frac{180,5-173}{6}\right] = P[-2 \le z \le 1,25] =$

$= 0,8944 + 0,9772 - 1 = 0,8716$

e) $P[161 \le x \le 170] = P\left[\frac{161-173}{6} \le z \le \frac{170-173}{6}\right] = P[-2 \le z \le -0,5] =$

$= P[0,5 \le z \le 2] = 0,9772 - 0,6915 = 0,2857$

f) $P[x = 174] = 0$

g) $P[x > 191] = P\left[z > \frac{191-173}{6}\right] = P[z > 3] = 1 - P[z \le 3] = 1 - 0,9987 = 0,0013$

h) $P[x < 155] = P\left[z < \frac{155-173}{6}\right] = P[z < -3] = P[z > 3] = 1 - P[z \le 3] = 1 - 0,9987 = 0,0013$

6 La distribución binomial se aproxima a la normal

Página 428

1 Calcula las probabilidades de las siguientes distribuciones binomiales mediante su correspondiente aproximación a la normal. En todas ellas, ten en cuenta el ajuste de media unidad que hay que hacer al pasar de una variable discreta a una continua.

a) x es $B(100;\ 0{,}1)$. Calcula $P[x = 10]$, $P[x < 2]$ y $P[5 < x < 15]$.

b) x es $B(1\,000;\ 0{,}02)$. Calcula $P[x > 30]$ y $P[x < 80]$.

c) x es $B(50;\ 0{,}9)$. Calcula $P[x > 45]$ y $P[x \le 30]$.

a) $n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10$

Es mayor que 5, luego la aproximación por la distribución normal será de parámetros:

$\mu = n \cdot p = 10$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 3$

$x = B(100;\ 0{,}1) \approx x' = N(10;\ 3)$

$P[x = 10] = 0$

$$P[x < 2] = P[x' < 1{,}5] = P\left[z < \frac{1{,}5 - 10}{3}\right] = P[z < -2{,}83] = P[z > 2{,}83] = 1 - P[z < 2{,}83] = 0{,}0023$$

$$P[5 < x < 15] = P[5{,}5 < x' < 14{,}5] = P\left[\frac{5{,}5 - 10}{3} < z < \frac{14{,}5 - 10}{3}\right] = P[-1{,}5 < z < 1{,}5] =$$

$$= 0{,}9332 \cdot 2 - 1 = 0{,}8664$$

b) $n \cdot p = 1\,000 \cdot 0{,}02 = 20$

Es mayor que 5, luego la aproximación por la distribución normal será de parámetros:

$\mu = n \cdot p = 20$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{1\,000 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}98} = 4{,}43$

$x = B(1\,000;\ 0{,}02) \approx x' = N(20;\ 4{,}43)$

$$P[x > 30] = P[x' > 30{,}5] = P\left[z > \frac{30{,}5 - 20}{4{,}43}\right] = P[z > 2{,}37] = 1 - P[z < 2{,}37] = 1 - 0{,}9911 = 0{,}0089$$

$$P[x < 80] = P[x' < 79{,}5] = P\left[z < \frac{79{,}5 - 20}{4{,}43}\right] = P[z < 13{,}43] = 1$$

c) $n \cdot q = 50 \cdot 0{,}1 = 5$

Es mayor que 3, luego la aproximación por la distribución normal será de parámetros:

$\mu = n \cdot p = 45$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{50 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 2{,}12$

$x = B(50;\ 0{,}9) \approx x' = N(45;\ 2{,}12)$

$$P[x > 45] = P[x' > 44{,}5] = P\left[z > \frac{44{,}5 - 45}{2{,}12}\right] = P[z > -0{,}24] = P[z < 0{,}24] = 0{,}5948$$

$$P[x \le 30] = P[x' \le 30{,}5] = P\left[z \le \frac{30{,}5 - 45}{2{,}12}\right] = P[z \le -6{,}84] = P[z \ge 6{,}84] = 1 - P[z \le 6{,}84] = 0$$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 429

1. Distribución de probabilidad de variable discreta

Hazlo tú. **Lanzamos dos dados y nos quedamos con la mayor de las puntuaciones: 3 y 5 → 5; 4 y 4 → 4. Calcula μ y σ de esta distribución de probabilidad.**

Si, por ejemplo, la mayor puntuación es 4, las parejas con las que se consigue son (1, 4), (4, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 4) y (4, 4). Por tanto la probabilidad de obtener 4 es $\frac{7}{36}$. Razonando análogamente con los demás casos obtenemos:

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{12}{36}$
3	$\frac{5}{36}$	$\frac{15}{36}$	$\frac{45}{36}$
4	$\frac{7}{36}$	$\frac{28}{36}$	$\frac{112}{36}$
5	$\frac{9}{36}$	$\frac{45}{36}$	$\frac{225}{36}$
6	$\frac{11}{36}$	$\frac{66}{36}$	$\frac{396}{36}$
	1	$\frac{161}{36}$	$\frac{791}{36}$

$$\mu = \frac{161}{36} = 4,47$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{791}{36} - 4,47^2} = 1,41$$

2. Distribución de probabilidad de variable discreta

Hazlo tú. **En un dado irregular las probabilidades de sus caras son:**

$$P[1] = P[2] = P[3] = 0,1 \quad \text{y} \quad P[4] = P[5] = 0,2$$

Averigua $P[6]$ y el valor de los parámetros μ y σ.

$P[E] = 0,1 + 0,1 + 0,1 + 0,2 + 0,2 + P[6] = 1 \;\rightarrow\; P[6] = 1 - 0,7 = 0,3$

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
1	0,1	0,1	0,1
2	0,1	0,2	0,4
3	0,1	0,3	0,9
4	0,2	0,8	3,2
5	0,2	1	5
6	0,3	1,8	10,8
	1	4,2	20,4

$$\mu = 4,2$$

$$\sigma = \sqrt{20,4 - 4,2^2} = 1,66$$

Página 430

3. Distribución binomial

Hazlo tú. Halla la probabilidad de que haya exactamente 2 parejas que conciban. Calcula también la probabilidad de que todas las parejas tengan éxito en el tratamiento y la de que alguna pareja no lo tenga.

$P[x = 2] = \binom{10}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^8 = 0{,}233$

$P[x = 10] = 0{,}3^{10} = 0{,}000006$

El suceso “alguna pareja no tenga éxito” es el contrario de que “todas las parejas tengan éxito”.

$P[\text{ALGUNA PAREJA NO TENGA ÉXITO}] = 1 - P[x = 10] = 1 - 0{,}000006 = 0{,}999994$

4. Distribución binomial

Hazlo tú. ¿Qué probabilidad tiene Ana de igualar o mejorar la marca de Raquel?

La probabilidad de que Ana iguale o mejore la marca de Raquel es:

$P[x \geq 13] = P[x = 13] + P[x = 14] + P[x = 15]$

$P[x = 13] = \binom{15}{13} \cdot 0{,}72^{13} \cdot 0{,}28^2 = 0{,}1150$

Por tanto $P[x \geq 13] = 0{,}1150 + 0{,}0426 + 0{,}0072 = 0{,}1648$

5. Función de densidad

Hazlo tú. Halla el valor de k para que $f(x) = 0{,}4 + kx$, si $x \in [0, 4]$ y 0 en el resto, sea función de densidad. Calcula $P[x \geq 3]$, $P[x \leq 1]$ y $P[1 \leq x \leq 3]$.

La función dada, en el intervalo [0, 4], es un segmento de extremos:

$f(0) = 0{,}4 \rightarrow (0; 0{,}4)$

$f(4) = 0{,}4 + 4k \rightarrow (4; 0{,}4 + 4k)$

El área limitada por esta función y el eje horizontal es $\frac{0{,}4 + 0{,}4 + 4k}{2} \cdot 4 = 1{,}6 + 8k$ ya que fuera del intervalo [0, 4] vale 0.

Ahora $1{,}6 + 8k = 1 \rightarrow k = -0{,}075$

Por tanto, si $x \in [0, 4] \rightarrow f(x) = 0{,}4 - 0{,}075x$

$$P[x \geq 3] = P[3 \leq x \leq 4] = \frac{0{,}4 - 0{,}075 \cdot 3 + 0{,}4 - 0{,}075 \cdot 4}{2} \cdot 1 = 0{,}1375$$

$$P[x \leq 1] = P[0 \leq x \leq 1] = \frac{0{,}4 - 0{,}075 \cdot 0 + 0{,}4 - 0{,}075 \cdot 1}{2} \cdot 1 = 0{,}3625$$

$$P[1 \leq x \leq 3] = \frac{0{,}4 - 0{,}075 \cdot 1 + 0{,}4 - 0{,}075 \cdot 3}{2} \cdot 2 = 0{,}5$$

Página 431

6. Manejo de la tabla de la $N(0, 1)$

Hazlo tú. **Calcula $P[-0{,}83 < z < 0{,}83]$.**

$P[-0{,}83 < z < 0{,}83] = P[z < 0{,}83] + P[z < 0{,}83] - 1 = 2 \cdot 0{,}7969 - 1 = 0{,}5934$

7. Distribución normal $N(\mu, \sigma)$

Hazlo tú. **En esta misma distribución, halla la proporción de árboles cuyas alturas están comprendidas entre 10 m y 11 m.**

$P[10 \le x \le 11] = P\left[\frac{10-9}{1{,}5} \le z \le \frac{11-9}{1{,}5}\right] = P[0{,}67 \le z \le 1{,}33] = P[z \le 1{,}33] - P[z < 0{,}67] = 0{,}1596$

Página 432

9. Aproximación de la binomial a la normal

Hazlo tú. **a) En el primer apartado hemos tomado diciembre como 1/12 del año. Halla la misma probabilidad tomando diciembre como 31 días de los 365 días del año.**

b) ¿Qué probabilidad hay de que al menos 5 alumnos hayan nacido un domingo?

a) Se trata de una distribución binomial $B(30; 31/365) = B(30; 0{,}085)$.

$P[x \ge 1] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0{,}915^{30} = 0{,}9304$

b) En este caso tenemos una distribución binomial $B(30; 1/7) = B(30; 0{,}143)$.

Como $n \cdot p = 30 \cdot 0{,}143 = 4{,}3 > 3$ podemos aproximar usando la normal de parámetros:

$\mu = 4{,}3$

$\sigma = \sqrt{30 \cdot 0{,}143 \cdot 0{,}857} = 1{,}92$

$x = B(30; 0{,}143) \approx x' = N(4{,}3; 1{,}92)$

$P[x \ge 5] = P[x' \ge 4{,}5] = P\left[z \ge \frac{4{,}5 - 4{,}3}{1{,}92}\right] = P[z \ge 0{,}10] = 1 - P[z < 0{,}10] = 1 - 0{,}5398 = 0{,}4602$

Ejercicios y problemas guiados

Página 433

1. Distribuciones de probabilidad

Sacamos dos cartas de una baraja y anotamos el número de ases (0, 1 o 2).

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?

b) Calcular la media y la desviación típica.

Como se extraen las dos cartas a la vez:

$$P[0 \text{ ases}] = \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} = \frac{21}{26}$$

$$P[2 \text{ ases}] = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = \frac{1}{130}$$

$$P[1 \text{ as}] = 1 - \frac{21}{26} - \frac{1}{130} = \frac{12}{65}$$

Con estos datos construimos la tabla:

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
0	$\frac{21}{26}$	0	0
1	$\frac{12}{65}$	$\frac{12}{65}$	$\frac{12}{65}$
2	$\frac{1}{130}$	$\frac{2}{130}$	$\frac{4}{130}$
	1	$\frac{26}{130}$	$\frac{28}{130}$

$$\mu = \frac{26}{130} = 0{,}2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{28}{130} - 0{,}2^2} = 0{,}42$$

2. Tipificación

En una cierta prueba, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0,8 y –0,4 y sus notas reales fueron 88 y 64 puntos, respectivamente. ¿Cuál es la media y cuál la desviación típica de las puntuaciones del examen?

$$\left.\begin{array}{l} 0{,}8 = \dfrac{88-\mu}{\sigma} \\[2ex] -0{,}4 = \dfrac{64-\mu}{\sigma} \end{array}\right\} \to 0{,}8\sigma = 88-\mu - 0{,}4\sigma = 64-\mu \} \to \left.\begin{array}{l} \mu + 0{,}8\sigma = 88 \\ \mu - 0{,}4\sigma = 64 \end{array}\right\} \to \mu = 72,\ \sigma = 20$$

3. Binomial

Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con cuatro respuestas, de las cuales solo una es correcta. Si un alumno contesta al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste correctamente 4 preguntas?

b) ¿Y la de que conteste bien más de 2 preguntas?

c) Calcular la probabilidad de que conteste mal alguna pregunta.

Tenemos una experiencia dicotómica en la que el éxito es acertar la respuesta con probabilidad $p = \frac{1}{4}$.

La experiencia se repite $n = 10$ veces. Por tanto el número de respuestas correctas sigue una distribución $B(10; 1/4)$.

a) $P[x = 4] = \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 0{,}146$

b) $P[x > 2] = 1 - P[x \le 2] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2])$

$P[x = 0] = \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 0{,}056$

$P[x = 1] = \binom{10}{1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^9 = 0{,}188$

$P[x = 2] = \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^8 = 0{,}282$

$P[x > 2] = 1 - (0{,}056 + 0{,}188 + 0{,}282) = 0{,}474$

c) $P[x \le 9] = 1 - P[x = 10] = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10} = 0{,}999999046$

4. Binomial

En una familia con 6 hijos, ¿qué es más probable?

- ***Que haya tantas chicas como chicos.***
- ***Que haya más chicas que chicos.***

La distribución del número de chicas es $B(6; 1/2)$

Para que haya tantas chicas como chicos tiene que haber 3 de cada sexo, por tanto nos piden:

$P[x = 3] = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$

La probabilidad de que haya más chicas que chicos es:

$P[x > 3] = P[x = 4] + P[x = 5] + P[x = 6]$

$P[x = 4] = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{15}{64}$

$P[x = 5] = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{32}$

$P[x = 6] = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$

$P[x > 3] = \frac{15}{64} + \frac{3}{32} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32}$

Por lo que $P[x > 3] > P[x = 3]$.

Ejercicios y problemas propuestos

Página 434

Para practicar

Distribuciones de probabilidad

1 Completa la siguiente tabla de probabilidades y calcula sus parámetros μ y σ:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,1	0,3	…	0,1

La suma de todas las p_i es 1. Por tanto:

$0{,}1 + 0{,}3 + P[2] + 0{,}1 = 1 \rightarrow P[2] = 0{,}5$

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
0	0,1	0	0
1	0,3	0,3	0,3
2	0,5	1	2
3	0,1	0,3	0,9
	1	1,6	3,2

$\mu = 1{,}6$

$\sigma = \sqrt{3{,}2 - 1{,}6^2} = 0{,}8$

2 En una urna hay diez bolas con los números 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 10. Sacamos una bola y anotamos el resultado. Elabora la distribución de probabilidad y calcula μ y σ.

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
1	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{27}{10}$
4	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{16}{10}$
5	$\frac{2}{10}$	1	5
6	$\frac{1}{10}$	1	10
	1	$\frac{37}{10}$	$\frac{199}{10}$

$\mu = \frac{37}{10} = 3{,}7$

$\sigma = \sqrt{\frac{199}{10} - \left(\frac{37}{10}\right)^2} = 2{,}49$

3 **Una caja contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 verdes. Se hacen dos extracciones sin reemplazamiento y se anota el número de bolas rojas extraídas.**

a) Haz la tabla de la distribución de probabilidad.

b) Haz otra tabla suponiendo que hay reemplazamiento.

a) Al no haber reemplazamiento, las diferentes probabilidades son:

$$P[0 \text{ rojas}] = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{7}{15}$$

$$P[2 \text{ rojas}] = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

$$P[1 \text{ roja}] = 1 - \frac{7}{15} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$$

x_i	p_i
0	$\frac{7}{15}$
1	$\frac{7}{15}$
2	$\frac{1}{15}$
	1

b) Cuando hay reemplazamiento, la bola se devuelve a la urna y se obtienen las mismas probabilidades en las dos extracciones.

$$P[0 \text{ rojas}] = \frac{7}{10} \cdot \frac{7}{10} = \frac{49}{100}$$

$$P[2 \text{ rojas}] = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$$

$$P[1 \text{ roja}] = 1 - \frac{49}{100} - \frac{9}{100} = \frac{21}{50}$$

x_i	p_i
0	$\frac{49}{100}$
1	$\frac{21}{50}$
2	$\frac{9}{100}$
	1

NOTA: En este caso tenemos una experiencia dicotómica en la que el éxito es extraer una bola roja con probabilidad $p = \frac{3}{10}$ y se realizan $n = 2$ repeticiones del exprimento. Por tanto, el número de bolas rojas extraídas sigue una distribución $B\left(2, \frac{3}{10}\right)$.

Distribución binomial

4 **Reconoce en cada uno de los siguientes casos una distribución binomial y di los valores de** n, p, q, μ **y** σ.

- **Un examen tipo test consta de 50 preguntas, cada una con tres respuestas, de las que solo una es correcta. Se responde al azar. ¿Cuál es el número de preguntas acertadas?**
- **En el examen descrito en el apartado anterior, un alumno conoce las respuestas de 20 preguntas y responde las restantes al azar. Nos preguntamos cuántas de ellas acertará.**
- **Una moneda se lanza 400 veces. Número de caras.**
- **El 1 % de ciertas soldaduras son defectuosas y revisamos mil de ellas. Número de soldaduras defectuosas que habrá.**

- Es una binomial $B\left(50, \frac{1}{3}\right)$.

$$n = 50;\ p = \frac{1}{3};\ q = \frac{2}{3};\ \mu = 50 \cdot \frac{1}{3} = 16{,}67;\ \sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 3{,}33$$

- Si $x = B\left(30, \frac{1}{3}\right)$, la distribución del número de preguntas acertadas es $20 + x$ ya que el alumno conoce las respuestas de 20 preguntas.

$$n = 30;\ p = \frac{1}{3};\ q = \frac{2}{3};\ \mu = 20 + 30 \cdot \frac{1}{3} = 30;\ \sigma = \sqrt{50 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 3{,}33$$

- Es una binomial $B\left(400, \dfrac{1}{2}\right)$.

  $n = 400;\ p = \dfrac{1}{2};\ q = \dfrac{1}{2};\ \mu = 400 \cdot \dfrac{1}{2} = 200;\ \sigma = \sqrt{400 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}} = 10$

- Se trata de una binomial $B\left(1000, \dfrac{1}{100}\right)$.

  $n = 1\,000;\ p = \dfrac{1}{100};\ q = \dfrac{99}{100};\ \mu = 1\,000 \cdot \dfrac{1}{100} = 10;\ \sigma = \sqrt{1000 \cdot \dfrac{1}{100} \cdot \dfrac{99}{100}} = 3,15$

5 En una distribución binomial $B(9;\ 0{,}2)$, calcula:

a) $P[x < 3]$ **b)** $P[x \ge 7]$ **c)** $P[x \ne 0]$ **d)** $P[x \le 9]$

a) $P[x < 3] = P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2]$

$P[x = 0] = 0{,}8^9 = 0{,}1342$

$P[x = 1] = \binom{9}{1} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^8 = 0{,}302$

$P[x = 2] = \binom{9}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^7 = 0{,}302$

$P[x < 3] = 0{,}1342 + 0{,}302 + 0{,}302 = 0{,}7382$

b) $P[x \ge 7] = P[x = 7] + P[x = 8] + P[x = 9]$

$P[x = 7] = \binom{9}{7} \cdot 0{,}2^7 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}0003$

$P[x = 8] = \binom{9}{8} \cdot 0{,}2^8 \cdot 0{,}8 = 0{,}00002$

$P[x = 9] = 0{,}2^9 = 0{,}0000005$

$P[x \ge 7] = 0{,}0003 + 0{,}00002 + 0{,}0000005 = 0{,}0003205$

c) $P[x \ne 0] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0{,}1342 = 0{,}8658$

d) $P[x \le 9] = 1$

Función de densidad

6 Justifica si pueden ser funciones de densidad las siguientes:

a) $f(x) = 0{,}5 + 0{,}5x$ **con** $x \in [0, 2]$

b) $f(x) = 0{,}5 - x$ **con** $x \in [0, 2]$

c) $f(x) = 1 - 0{,}5x$ **con** $x \in [0, 2]$

Veamos si cada una cumple las condiciones.

a) $f(x)$ es no negativa en el intervalo $[0, 2]$.

El área bajo la curva es $\dfrac{0{,}5 + 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 2}{2} \cdot 2 = 2$

Por tanto, no lo es por no cumplir la 2.ª condición de las funciones de densidad.

b) $f(x)$ toma valores negativos en el intervalo $[0, 2]$. Por ejemplo, $f(1) = 0{,}5 - 1 = -0{,}5$.

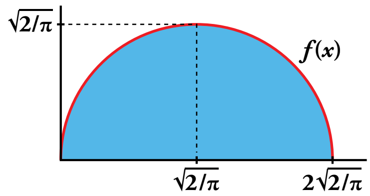
Luego no puede ser una función de densidad.

c) $f(x)$ es no negativa en el intervalo [0, 2].

El área bajo la curva es $\dfrac{1+1-0,5\cdot 2}{2}\cdot 2 = 1$.

Esta función sí cumple las dos condiciones y, en consecuencia, sí es una función de densidad.

7 **Comprueba que la función $f(x)$, representada a la derecha, es de densidad. Calcula $P[x > \sqrt{2/\pi}]$.**



Observamos que la función es no negativa.

El área bajo la curva es el área de un semicírculo de radio $\sqrt{2/\pi}$.

Luego es: $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\sqrt{2/\pi}^{\,2} = 1$

La probabilidad pedida es el área de la mitad de este semicírculo. Por tanto: $P\left[x > \sqrt{2/\pi}\right] = \frac{1}{2}$

Manejo de la tabla *N*(0, 1)

8 **En una distribución $N(0, 1)$, calcula estas probabilidades:**

a) $P[z = 2]$ **b) $P[z \le 2]$** **c) $P[z \ge 2]$**

d) $P[z \le -2]$ **e) $P[z \ge -2]$** **f) $P[-2 \le z \le 2]$**

a) $P[z = 2] = 0$

b) $P[z \le 2] = 0,9772$

c) $P[z \ge 2] = 1 - P[z < 2] = 1 - 0,9772 = 0,0228$

d) $P[z \le -2] = P[z \ge 2] = 0,0228$

e) $P[z \ge -2] = P[z \le 2] = 0,9772$

f) $P[-2 \le z \le 2] = 2\cdot(0,9772 - 0,5) = 0,9544$

9 **En una distribución $N(0, 1)$, calcula:**

a) $P[z \le 1,83]$ **b) $P[z \ge 0,27]$**

c) $P[z \le -0,87]$ **d) $P[z \ge 2,5]$**

a) $P[z \le 1,83] = 0,9664$

b) $P[z \ge 0,27] = 1 - P[z < 0,27] = 1 - 0,6065 = 0,3935$

c) $P[z \le -0,87] = P[z \ge 0,87] = 1 - P[z < 0,87] = 1 - 0,8078 = 0,1922$

d) $P[z \ge 2,5] = 1 - P[z < 2,5] = 1 - 0,9938 = 0,00620$

10 **En una distribución $N(0, 1)$, calcula estas probabilidades:**

a) $P[z = 1,6]$ **b) $P[-2,71 \le z \le -1,83]$**

c) $P[1,5 \le z \le 2,5]$ **d) $P[-1,87 \le z \le 1,25]$**

a) $P[z = 1,6] = 0$

b) $P[-2,71 \le z \le -1,83] = P[1,83 \le z \le 2,71] = P[z \le 2,71] - P[z \le 1,83] = 0,9966 - 0,9664 = 0,0302$

c) $P[1,5 \le z \le 2,5] = P[z \le 2,5] - P[z \le 1,5] = 0,9938 - 0,9332 = 0,0606$

d) $P[-1,87 \le z \le 1,25] = P[z \le 1,25] - P[z \le -1,87] = P[z \le 1,25] - P[\ \ge 1,87] =$

$= P[z \le 1,25] - (1 - P[z < 1,87]) = 0,8944 + 0,9693 - 1 = 0,8637$

11 Calcula k en cada uno de los siguientes casos:

a) $P[z < k] = 0{,}8365$ **b) $P[z > k] = 0{,}8365$**

c) $P[z < k] = 0{,}1894$ **d) $P[-k < z < k] = 0{,}95$**

a) $k = 0{,}98$

b) $P[z > k] = 0{,}8365 \to P[z < -k] = 0{,}8365 \to -k = 0{,}98 \to k = -0{,}98$

c) $P[z < k] = 0{,}1894 \to P[z > -k] = 0{,}1894 \to 1 - P[z \le -k] = 0{,}1894 \to$

$\to P[z \le -k] = 1 - 0{,}1894 = 0{,}8106 \to -k = 0{,}88 \to k = -0{,}88$

d) $P[-k < z < k] = 2 \cdot P[z < k] - 1 \to 2 \cdot P[z < k] - 1 = 0{,}95 \to P[z < k] = 0{,}975 \to k = 1{,}96$

Tipificación

12 En un examen tipo test, la media fue 28 puntos y la desviación típica, 10 puntos. Calcula la puntuación tipificada en los alumnos que obtuvieron:

a) 38 puntos **b) 14 puntos**

c) 45 puntos **d) 10 puntos**

a) $\dfrac{38-28}{10} = 1$ b) $\dfrac{14-28}{10} = -1{,}4$

c) $\dfrac{45-28}{10} = 1{,}7$ d) $\dfrac{10-28}{10} = -1{,}8$

13 Si en el examen del problema anterior la puntuación tipificada de un alumno fue 0,8, ¿cuántos puntos obtuvo? ¿Cuántos puntos corresponden al valor tipificado de –0,2?

a) $\dfrac{x-28}{10} = 0{,}8 \to x = 36$ fue la puntuación obtenida.

b) $\dfrac{x-28}{10} = -0{,}2 \to x = 26$ son los puntos que le corresponden.

Cálculo de probabilidades en $N(\mu, \sigma)$

14 En una distribución $N(43, 10)$, calcula cada una de estas probabilidades:

a) $P[x \ge 43]$ **b) $P[x \le 30]$**

c) $P[40 \le x \le 55]$ **d) $P[30 \le x \le 40]$**

a) $P[x \ge 43] = P\left[z \ge \dfrac{43-43}{10}\right] = P[z \ge 0] = 0{,}5$

b) $P[x \le 30] = P\left[z \le \dfrac{30-43}{10}\right] = P[z \le -1{,}3] = P[z \ge 1{,}3] = 1 - P[z < 1{,}3] = 1 - 0{,}9032 = 0{,}0968$

c) $P[40 \le x \le 55] = P\left[\dfrac{40-43}{10} \le z \le \dfrac{55-43}{10}\right] = P[-0{,}3 \le z \le 1{,}2] = P[z \le 1{,}2] + P[z \le 0{,}3] - 1 =$

$= 0{,}8849 + 0{,}6179 - 1 = 0{,}5028$

d) $P[30 \le x \le 40] = P\left[\dfrac{30-43}{10} \le z \le \dfrac{40-43}{10}\right] = P[-1{,}3 \le z \le -0{,}3] = P[0{,}3 \le z \le 1{,}3] =$

$= P[z \le 1{,}3] - P[z \le 0{,}3] = 0{,}9032 - 0{,}6179 = 0{,}2853$

15 **En una distribución $N(151, 15)$, calcula:**

a) $P[x \le 136]$ **b)** $P[120 \le x \le 155]$

c) $P[x \ge 185]$ **d)** $P[140 \le x \le 160]$

a) $P[x \le 136] = P\left[z \le \dfrac{136-151}{15}\right] = P[z \le -1] = P[z \ge 1] = 1 - P[z < 1] = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$

b) $P[120 \le x \le 155] = P\left[\dfrac{120-151}{15} \le z \le \dfrac{155-151}{15}\right] = P[-2{,}07 \le z \le 0{,}27] =$

$= P[z \le 0{,}27] - P[z \le -2{,}07] = 0{,}6065 + 0{,}9808 - 1 = 0{,}5873$

c) $P[x \ge 185] = P\left[z \ge \dfrac{185-155}{15}\right] = P[z \ge 2] = 1 - P[z < 2] = 1 - 0{,}9772 = 0{,}0228$

d) $P[140 \le x \le 160] = P\left[\dfrac{140-151}{15} \le z \le \dfrac{160-151}{15}\right] = P[-0{,}73 \le z \le 0{,}6] =$

$= P[z \le 0{,}6] + P[z \le 0{,}73] - 1 = 0{,}7258 + 0{,}7673 - 1 = 0{,}4931$

Binomial → Normal

16 **Si lanzamos un dado mil veces, ¿cuál es la probabilidad de que el número de cincos obtenidos sea menor que 100?**

El número de cincos obtenidos al lanzar 1 000 veces un dado sigue una distribución $B\left(1000, \dfrac{1}{6}\right)$.

Como $n \cdot p = 1\,000 \cdot \dfrac{1}{6} = 166{,}67$ es mayor que 5, podemos aproximar esta binomial mediante una normal de parámetros $\mu = 166{,}67$ y $\sigma = \sqrt{1000 \cdot \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{5}{6}} = 11{,}79$.

Por tanto $x = B\left(1000, \dfrac{1}{6}\right) \approx x' = N(166{,}67; 11{,}79)$

$P[x < 100] = P[x' \le 99{,}5] = P\left[z \le \dfrac{99{,}5 - 166{,}67}{11{,}79}\right] = P[z \le -5{,}7] = P[z \ge 5{,}7] = 1 - P[z < 5{,}7] \approx 0$

La probabilidad obtenida es casi nula y podemos afirmar que es prácticamente imposible que eso ocurra.

17 **Una moneda se lanza 400 veces. Calcula la probabilidad de que el número de caras:**

a) sea mayor que 200. **b) esté entre 180 y 220.**

El número de caras obtenidas al lanzar 400 veces una moneda sigue una distribución $B\left(400, \dfrac{1}{2}\right)$.

Como $n \cdot p = 400 \cdot \dfrac{1}{2} = 200$ es mayor que 5, podemos aproximar esta binomial mediante una normal de parámetros $\mu = 200$ y $\sigma = \sqrt{400 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2}} = 10$.

Por tanto $x = B\left(400, \dfrac{1}{2}\right) \approx x' = N(200, 10)$

a) $P[x > 200] = P[x' \ge 200{,}5] = P\left[z \ge \dfrac{200{,}5 - 200}{10}\right] = P[z \ge 0{,}05] = 1 - P[z < 0{,}05] =$

$= 1 - 0{,}5199 = 0{,}4801$

b) $P[180 < x < 220] = P[180{,}5 \le x' < 219{,}5] = P\left[\dfrac{180{,}5 - 200}{10} < z < \dfrac{219{,}5 - 200}{10}\right] =$

$= P[-1{,}95 \le z \le 1] = 2 \cdot P[z \le 1{,}95] - 1 = 2 \cdot 0{,}9744 - 1 = 0{,}9488$

Página 435

Para resolver

18 **La distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta viene dada por esta tabla:**

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1	a	b	c	0,2

Sabemos que $P[x \le 2] = 0{,}7$ y que $P[x \ge 2] = 0{,}75$.

Halla los valores de a, b y c y calcula μ y σ.

$P[x \le 2] = 0{,}1 + a + b = 0{,}7$; $P[x \ge 2] = b + c + 0{,}2 = 0{,}75$

Además $0{,}1 + a + b + c + 0{,}2 = 1$

Resolvemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} a+b=0{,}6 \\ b+c=0{,}55 \\ a+b+c=0{,}7 \end{array}\right\} \to a = 0{,}15,\ b = 0{,}45,\ c = 0{,}1$$

Finalmente:

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
0	0,1	0	0
1	0,15	0,15	0,15
2	0,45	0,9	1,8
3	0,1	0,3	0,9
4	0,2	0,8	3,2
	1	2,15	6,05

$\mu = 2{,}15$

$\sigma = \sqrt{6{,}05 - 2{,}15^2} = 1{,}19$

19 **Recuerda cuáles son las puntuaciones de las 28 fichas de un dominó. Si en cada una de ellas sumamos los puntos de sus dos mitades, obtenemos las posibles sumas 0, 1, 2, …, 10, 11 y 12 con probabilidades distintas. Haz la tabla con la distribución de probabilidades y calcula μ y σ.**

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
0	$\frac{1}{28}$	0	0
1	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{28}$
2	$\frac{2}{28}$	$\frac{4}{28}$	$\frac{8}{28}$
3	$\frac{2}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{18}{28}$
4	$\frac{3}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{48}{28}$
5	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{75}{28}$
6	$\frac{4}{28}$	$\frac{24}{28}$	$\frac{144}{28}$
7	$\frac{3}{28}$	$\frac{21}{28}$	$\frac{147}{28}$
8	$\frac{3}{28}$	$\frac{24}{28}$	$\frac{192}{28}$
9	$\frac{2}{28}$	$\frac{18}{28}$	$\frac{162}{28}$
10	$\frac{2}{28}$	$\frac{20}{28}$	$\frac{200}{28}$
11	$\frac{1}{28}$	$\frac{11}{28}$	$\frac{121}{28}$
12	$\frac{1}{28}$	$\frac{12}{28}$	$\frac{144}{28}$
	1	6	45

$\mu = \dfrac{168}{28} = 6$

$\sigma = \sqrt{45 - 6^2} = 3$

20 **Un alumno ha estudiado 12 temas de los 30 que entran en el examen. Se eligen 2 temas al azar. El alumno puede haber estudiado los dos, uno o ninguno. Haz la tabla con la distribución de probabilidad y represéntala gráficamente. Halla μ y σ.**

Calculamos primero las distintas probabilidades:

$P[\text{ESTUDIAR } 2] = \frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} = \frac{22}{145} = 0,15$

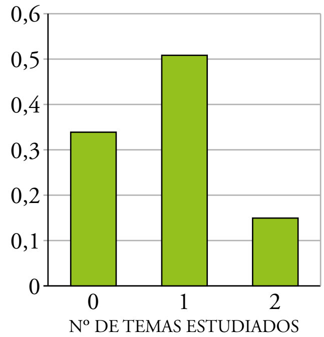
$P[\text{ESTUDIAR } 0] = \frac{18}{30} \cdot \frac{17}{30} = \frac{17}{50} = 0,34$

$P[\text{ESTUDIAR } 1] = 1 - 0,15 - 0,34 = 0,51$

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
0	0,34	0	0
1	0,51	0,51	0,51
2	0,15	0,3	0,6
	1	0,81	1,51

$\mu = 0,81$

$\sigma = \sqrt{1,51 - 0,81^2} = 0,92$



21 **Tenemos una moneda defectuosa para la cual la probabilidad de obtener cruz en un lanzamiento es 0,4. La lanzamos cinco veces y anotamos el número de cruces. Haz una tabla con la distribución de probabilidad, represéntala gráficamente y calcula su media y su desviación típica.**

Se trata de una experiencia dicotómica en la que el éxito es obtener cruz con probabilidad $p = 0,4$. El número de cruces obtenidas sigue una distribución $B(5; 0,4)$.

$P[x = 0] = 0,6^5 = 0,08$

$P[x = 1] = \binom{5}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^4 = 0,26$

$P[x = 2] = \binom{5}{2} \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^3 = 0,34$

$P[x = 3] = \binom{5}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^2 = 0,23$

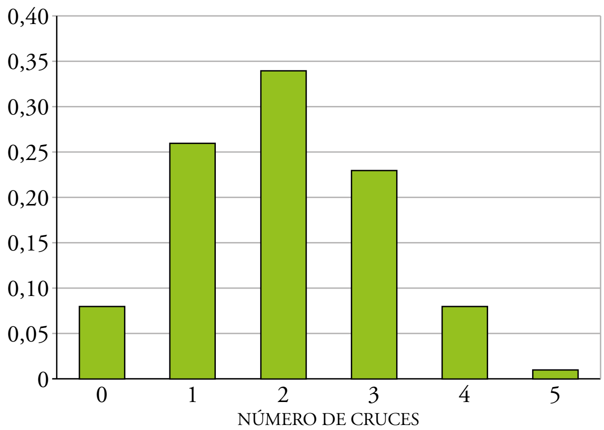
$P[x = 4] = \binom{5}{4} \cdot 0,4^4 \cdot 0,6 = 0,08$

$P[x = 5] = 0,4^5 = 0,01$

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
0	0,08	0	0
1	0,26	0,26	0,26
2	0,34	0,68	1,36
3	0,23	0,69	2,07
4	0,08	0,32	1,28
5	0,01	0,05	0,25
	1	2	5,22

$\mu = 2$

$\sigma = \sqrt{5,22 - 2^2} = 1,1$



NOTA: Observa que los parámetros así obtenidos coinciden con los calculados a partir de la fórmula de la media y de la desviación típica de una distribución binomial.

22 **La probabilidad de que una flecha lanzada por un arquero dé en la diana es 0,4. Si se lanzan 6 flechas, halla la probabilidad de que:**

a) solo una dé en la diana.

b) al menos una dé en la diana.

Se trata de una experiencia dicotómica en la que el éxito es dar en la diana con probabilidad $p = 0{,}4$. El número de aciertos sigue una distribución $x = B(6;\ 0{,}4)$.

a) $P[x = 1] = \binom{6}{1} \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}19$

b) $P[x \geq 1] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0{,}6^6 = 0{,}95$

23 **En un proceso de fabricación de tornillos se sabe que el 2 % son defectuosos. Los empaquetamos en cajas de 50 tornillos.**

Halla la probabilidad de que en una caja haya este número de tornillos defectuosos:

a) Ninguno.

b) Uno.

c) Más de dos.

El número de tornillos defectuosos de cada caja sigue una distribución $x = B\left(50, \dfrac{2}{100}\right)$

a) $P[x = 0] = 0{,}98^{50} = 0{,}36$

b) $P[x = 1] = \binom{50}{1} \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98^{49} = 0{,}37$

c) $P[x > 2] = 1 - P[x \leq 2] = 1 - P[x = 0] - P[x = 1] - P[x = 2]$

$P[x = 2] = \binom{50}{2} \cdot 0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{48} = 0{,}19$

$P[x > 2] = 1 - 0{,}36 - 0{,}37 - 0{,}19 = 0{,}08$

24 **Un tratamiento contra una enfermedad produce mejoría en 8 de cada 10 enfermos a los que se les aplica. Si se suministra el tratamiento a 5 enfermos, calcula la probabilidad:**

a) De que los cinco pacientes mejoren.

b) De que, al menos, tres no experimenten mejoría.

Se trata de una distribución binomial con probabilidad de éxito $\dfrac{8}{10} \to B(5;\ 0{,}8)$.

a) $P[x = 5] = 0{,}8^5 = 0{,}3277$

b) $P[x \leq 2] = P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2]$

$P[x = 0] = 0{,}2^5 = 0{,}00032$

$P[x = 1] = \binom{5}{1} \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}0064$

$P[x = 2] = \binom{5}{2} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0512$

$P[x \leq 2] = 0{,}05792$

25 Dos ajedrecistas de igual maestría juegan al ajedrez. ¿Qué es más probable: que cada uno gane dos partidas de cuatro o tres partidas de seis? (Los empates no se consideran.)

Se pide comparar el número de éxitos en binomiales con valores de n distintos, en la primera $n = 4$ y en la segunda $n = 6$.

$$B(4;\ 0{,}5) \to P[x = 2] = \binom{4}{2} \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}5^2 = 0{,}375$$

$$B(6;\ 0{,}5) \to P[x = 3] = \binom{6}{3} \cdot 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}3125$$

Es decir, cuantas más partidas se jueguen, más difícil resulta que ganen el mismo número de veces.

26 Para controlar la calidad de un producto envasado, se eligen al azar, de una caja que contiene 50 envases, tres de ellos. Sabemos que, por término medio, en cada caja hay 5 cuya calidad es deficiente.

a) Halla la probabilidad de que, de los tres, no haya ninguno, uno o dos deficientes.

b) Si el primero resulta deficiente, ¿cuál es la probabilidad de que, de los tres, haya uno o dos deficientes?

a) En un envase la probabilidad de que un producto elegido al azar sea deficiente es $\dfrac{5}{50}$.

$$P[\text{NINGUNO ES DEFICIENTE}] = \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{43}{48} = 0{,}724$$

El producto deficiente puede ser elegido en primer, segundo o tercer lugar. Luego:

$$P[\text{UNO ES DEFICIENTE}] = \frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{48} + \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49} \cdot \frac{44}{48} + \frac{45}{50} \cdot \frac{44}{49} \cdot \frac{5}{48} = 0{,}253$$

Para que haya dos deficientes, uno no debe serlo y puede ser elegido en primer, segundo o tercer lugar. Luego:

$$P[\text{DOS SON DEFICIENTES}] = \frac{45}{50} \cdot \frac{5}{49} \cdot \frac{4}{48} + \frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{4}{48} + \frac{5}{50} \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{45}{48} = 0{,}023$$

b) $$P[\text{UNO ES DEFICIENTE/PRIMERO DEFICIENTE}] = \frac{P[\text{UNO ES DEFICIENTE Y PRIMERO DEFICIENTE}]}{P[\text{PRIMERO DEFICIENTE}]} =$$

$$= \frac{\frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{44}{48}}{\frac{5}{50}} = 0{,}84$$

$$P[\text{DOS SON DEFICIENTES/PRIMERO DEFICIENTE}] = \frac{P[\text{DOS SON DEFICIENTES Y PRIMERO DEFICIENTE}]}{P[\text{PRIMERO DEFICIENTE}]} =$$

$$= \frac{\frac{5}{50} \cdot \frac{45}{49} \cdot \frac{4}{48} + \frac{5}{50} \cdot \frac{4}{49} \cdot \frac{45}{48}}{\frac{5}{50}} = 0{,}15$$

27 **Halla el valor de k para que la siguiente función sea de densidad:**

$$f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 2k(x-1) & \text{si } 2 < x \le 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Halla estas probabilidades: $P[1 \le x \le 3]$, $P[x \le 3]$, $P[0 \le x \le 7]$

Calculamos el área bajo la curva:

Intervalo $[0, 2] \to$ área $= \dfrac{2 \cdot 2k}{2} = 2k$ ya que el segmento definido por $f(x)$ forma un triángulo con el eje horizontal.

Intervalo $[2, 4] \to$ área $= \dfrac{2k + 6k}{2} \cdot 2 = 8k$

El área total es $10k$ y debe ser igual a 1, luego $k = \dfrac{1}{10}$.

$$P[1 \le x \le 3] = P[1 \le x \le 2] + P[2 < x \le 3] = \frac{\frac{1}{10} + \frac{2}{10}}{2} \cdot 1 + \frac{\frac{2}{10} + \frac{4}{10}}{2} \cdot 1 = \frac{9}{20}$$

$$P[x \le 3] = P[0 \le x \le 2] + P[2 < x \le 3] = \frac{2 \cdot \frac{2}{10}}{2} + \frac{\frac{2}{10} + \frac{4}{10}}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$P[0 \le x \le 7] = 1$

28 **Calcula el valor de a para que la siguiente función sea de densidad:**

$$f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } 1 \le x \le a \\ 1/2 & \text{si } a < x \le 4 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcula, además, las siguientes probabilidades: $P[1 \le x \le 2]$, $P[x \le 3]$, $P[x > 2]$

Calculamos el área bajo la curva y la igualamos a 1:

$$\frac{1}{4} \cdot (a-1) + \frac{1}{2} \cdot (4-a) = \frac{7-a}{4} \to \frac{7-a}{4} = 1 \to a = 3$$

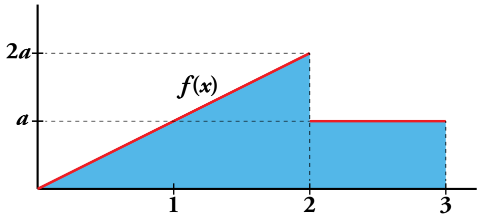
$$P[1 \le x \le 2] = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

$$P[x \le 3] = P[1 \le x \le 3] = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}$$

$$P[x > 2] = P[2 < x \le 3] + P[3 < x \le 4] = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

29 **Calcula el valor de a para que la siguiente gráfica sea una representación de una función de densidad:**

Escribe su expresión analítica.



Para que sea una función de densidad el área total debe ser igual a 1.

Área $= \dfrac{2 \cdot 2a}{2} + 1 \cdot a = 3a \to 3a = 1 \to a = \dfrac{1}{3}$

$$f(x) = \begin{cases} 2/3\,x & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 1/3 & \text{si } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

30 **En una población de estudiantes se ha comprobado que la calificación obtenida en Inglés sigue una distribución normal de media 5, si se ha seguido el método A, y una normal de media 6, si se ha seguido el método B.**

Se sabe que el 4 % de los alumnos que han seguido el método A obtienen una calificación inferior a 3,5 y que el 2 % de los alumnos que han seguido el método B superan el 8.

a) ¿Qué porcentaje de estudiantes que siguen el método A no superan la calificación de 6,5?

b) ¿Qué porcentaje de estudiantes del método B obtienen una calificación comprendida entre 4 y 6?

Con los datos del problema tenemos que calcular, en primer lugar, las desviaciones típicas de las normales.

Para el método A la calificación sigue una normal $x_1 = N(5, \sigma_1)$.

$$P[x_1 \le 3{,}5] = 0{,}04 \rightarrow P\left[z \le \frac{3{,}5-5}{\sigma_1}\right] = 0{,}04 \rightarrow P\left[z \ge -\frac{3{,}5-5}{\sigma_1}\right] = 0{,}04 \rightarrow$$

$$\rightarrow P\left[z \le \frac{1{,}5}{\sigma_1}\right] = 1 - 0{,}4 = 0{,}96 \rightarrow \frac{1{,}5}{\sigma_1} = 1{,}75 \rightarrow \sigma_1 = 0{,}86$$

Para el método B la calificación sigue una normal $x_2 = N(6, \sigma_2)$.

$$P[x_2 \ge 8] = 0{,}02 \rightarrow P\left[z \ge \frac{8-6}{\sigma_2}\right] = 0{,}02 \rightarrow P\left[z \le \frac{8-6}{\sigma_2}\right] = 1 - 0{,}02 = 0{,}98 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{2}{\sigma_2} = 2{,}05 \rightarrow \sigma_2 = 0{,}98$$

a) $P[x_1 \le 6{,}5] = P\left[z \le \frac{6{,}5-5}{0{,}86}\right] = P[z \le 1{,}74] = 0{,}9591 \rightarrow$ Prácticamente el 96 % de los estudiantes que siguen el método A no superan la calificación de 6,5.

b) $P[4 \le x_2 \le 6] = P\left[\frac{4-6}{0{,}98} \le z \le \frac{6-6}{0{,}98}\right] = P[-2{,}04 \le z \le 0] = P[0 \le z \le 2{,}04] =$

$= P[z \le 2{,}04] - 0{,}4793 \rightarrow$ Casi el 48 % de los estudiantes que siguen el método B obtendrán una calificación comprendida entre 4 y 6.

Página 436

31 **Para iluminar el recinto de un estadio deportivo se quieren instalar focos. El suministrador asegura que el tiempo de vida de los focos es una variable normal con media de 1 500 h y desviación típica de 200 h.**

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un foco elegido al azar luzca por lo menos 1 000 horas?

b) Si se compran 2 000 focos, ¿cuántos puede esperarse que luzcan al menos 1 000 horas?

Llamemos $x = N(1\,500, 200)$ a la curva normal.

a) $P[x \ge 1\,000] = P\left[z \ge \frac{1000-1500}{200}\right] = P[z \ge -2{,}5] = P[z \le 2{,}5] = 0{,}9938$

b) La probabilidad anterior muestra que el 99,38 % de los focos debería lucir, al menos, 1 000 h. Por tanto:

$0{,}9938 \cdot 2\,000 = 1\,987{,}6 \rightarrow$ 1 987 focos deberían lucir como mínimo 1 000 h.

32 **Los pesos de 2 000 soldados presentan una distribución normal de media 75 kg y desviación típica 8 kg. Halla la probabilidad de que un soldado elegido al azar pese:**

a) más de 71 kg. b) entre 73 y 79 kg. c) menos de 80 kg. d) más de 85 kg.

Llamemos $x = N(75, 8)$ a la curva normal.

a) $P[x > 71] = P\left[z > \frac{71-75}{8}\right] = P[z > -0,5] = P[z < 0,5] = 0,6915$

b) $P[73 < x < 79] = P\left[\frac{73-75}{8} < z < \frac{79-75}{8}\right] = P[-0,25 < z < 0,5] =$

$= P[z < 0,5] + P[z < 0,25] - 1 = 0,2902$

c) $P[x < 80] = P\left[z < \frac{80-75}{8}\right] = P[z < 0,63] = 0,7357$

d) $P[x > 85] = P\left[z > \frac{85-75}{8}\right] = P[z > 1,25] = 1 - P[z \le 1,25] = 1 - 0,8944 = 0,1056$

33 **La duración de cierto tipo de motor es una variable normal con una media de 10 años y desviación típica de 2 años. El fabricante garantiza el buen funcionamiento de los motores por un periodo de 13 años. ¿Qué porcentaje de motores se espera que no cumplan la garantía?**

Llamemos $x = N(10, 2)$ a la curva normal.

$P[x < 13] = P\left[z < \frac{13-10}{2}\right] = P[z < 1,5] = 0,9332 \rightarrow$ El 93,32 % no cumpliría la garantía al durar menos de 13 años.

34 **El 20 % de los alumnos con mejor nota de una escuela pueden acceder a estudios superiores. Sabemos que las notas medias finales en esa escuela se distribuyen normalmente con media 5,8 y desviación típica 2. ¿Cuál es la nota media mínima que debe obtener un alumno si quiere hacer estudios superiores?**

Llamemos $x = N(5,8; 2)$ a la curva normal.

La nota mínima será aquella por encima de la cual se encuentra el 20 % de los alumnos, es decir, será el valor x_0 tal que:

$P[x > x_0] = \frac{20}{100} \rightarrow 1 - P[x \le x_0] = 0,2 \rightarrow P[x \le x_0] = 0,8$

El valor tipificado que verifica la relación anterior es 0,84. Luego, $\frac{x_0 - 5,8}{2} = 0,84 \rightarrow x_0 = 7,48$ es la nota mínima para acceder a estudios superiores.

35 **Un test de sensibilidad musical da resultados que se distribuyen según una $N(65, 18)$.**

Se quiere hacer un baremo por el cual, a cada persona, junto con la puntuación obtenida, se le asigne uno de los siguientes comentarios:

- **Duro de oído.**
- **Poco sensible a la música.**
- **Normal.**
- **Sensible a la música.**
- **Extraordinariamente dotado para la música.**

de modo que haya en cada uno de los grupos, respectivamente, un 10 %, un 35 %, un 30 %, un 20 % y un 5 % del total de individuos observados.

a) ¿En qué puntuaciones pondrías los límites entre los distintos grupos?

b) ¿Qué comentario se le haría a una persona que obtuviera una puntuación de 80? ¿Y a otra que obtuviera una puntuación de 40?

a) Calculamos las puntuaciones máximas de cada grupo:

Duro de oído:

$P[x < x_0] = \dfrac{10}{100} \to P[x > -x_0] = 0{,}1 \to P[x \le -x_0] = 0{,}9 - \dfrac{x_0 - 65}{18} = 1{,}28 \to x_0 = 42$

Poco sensible a la música:

$P[x < x_1] = \dfrac{45}{100} \to P[x > -x_1] = 0{,}45 \to P[x \le -x_1] = 0{,}55 - \dfrac{x_1 - 65}{18} = 0{,}13 \to x_1 = 63$

Normal:

$P[x < x_2] = \dfrac{75}{100} = 0{,}75 \to \dfrac{x_2 - 65}{18} = 0{,}67 \to x_2 = 77$

Sensible a la música:

$P[x < x_3] = \dfrac{95}{100} = 0{,}95 \to \dfrac{x_3 - 65}{18} = 1{,}64 \to x_3 = 95$

Extraordinariamente dotado para la música:

Aquellos con puntuación superior a 95.

b) Una persona con puntuación de 80 sería sensible a la música. Otra con puntuación 40 sería dura de oído.

36 **En un examen psicotécnico, las notas de Brianda y Christian fueron, respectivamente, 84 y 78. Sabemos que esas puntuaciones tipificadas son 1,75 y 1 respectivamente. Calcula la media y la desviación típica de la distribución.**

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{84-\mu}{\sigma} = 1{,}75 \\ \dfrac{78-\mu}{\sigma} = 1 \end{array}\right\} \to \mu = 70,\ \sigma = 8$$

37 **Las alturas de los alumnos de una clase siguen una $N(\mu, \sigma)$. Sonia, con 172 cm, y Begoña, con 167 cm, tienen unas alturas tipificadas de 1,4 y 0,4, respectivamente.**

a) ¿Cuál es la altura real de Estefanía si su altura tipificada es de –1?

b) ¿Cuál es la tipificación de la altura de Azucena si mide 165 cm?

Calculamos primero los parámetros μ y σ:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{172-\mu}{\sigma} = 1{,}4 \\ \dfrac{167-\mu}{\sigma} = 0{,}4 \end{array}\right\} \to \mu = 165,\ \sigma = 5$$

a) $\dfrac{x - 165}{5} = -1 \to x = 160$ cm es la altura real de Estefanía.

b) $\dfrac{165 - 165}{5} = 0$ es la tipificación de la altura de Azucena.

38 **El diámetro medio de las piezas producidas en una fábrica es de 45 mm.**

a) Determina su desviación típica sabiendo que la probabilidad de que una pieza tenga un diámetro mayor que 50 mm es igual a 0,0062.

b) Si se analizan 820 piezas, ¿cuántas se estima que tendrán un diámetro comprendido entre 39,7 y 43,5 mm?

a) Sea $x = N(45, \sigma)$ la normal que representa al diámetro medio.

$$P[x > 50] = 0{,}0062 \to P[x \le 50] = 1 - 0{,}0062 = 0{,}9938 \to P\left[z \le \dfrac{50-45}{\sigma}\right] = 0{,}9938 \to$$

$$\to \dfrac{5}{\sigma} = 2{,}5 \to \sigma = 2$$

b) $P[39{,}7 < x < 43{,}5] = P\left[\dfrac{39{,}7-45}{2} < z < \dfrac{43{,}5-45}{2}\right] = P[-2{,}65 < z < -0{,}75] =$

$= P[0{,}75 < z < 2{,}65] = P[z < 2{,}65] - P[z < 0{,}75] = 0{,}9960 - 0{,}7734 = 0{,}2226$

$820 \cdot 0{,}2226 = 182{,}532 \rightarrow$ 182 piezas, aproximadamente.

39 **Una compañía de autobuses sabe que el retraso en la llegada sigue una distribución normal de media 5 min, y que el 68,26 % de los autobuses llega entre 2 min y 8 min tarde.**

a) ¿Cuál es la desviación típica?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un autobús llegue puntual o antes de la hora?

Sea $x = N(5, \sigma)$ la distribución del retraso. Como el intervalo [2, 8] está centrado en 5, por la simetría de la normal respecto de su media podemos asegurar que el 34,13 % de los autobuses se retrasa entre 5 y 8 minutos.

a) $P[5 \le x \le 8] = 0{,}3413 \rightarrow P[x \le 8] = 0{,}3413 + 0{,}5 = 0{,}8413 \rightarrow P\left[z \le \dfrac{8-5}{\sigma}\right] = 0{,}8413 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{3}{\sigma} = 1 \rightarrow \sigma = 3$

b) $P[x \le 0] = P\left[z \le \dfrac{0-5}{3}\right] = P[z \le -1{,}67] = P[z \ge 1{,}67] = 1 - P[z < 1{,}67] = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$

40 **En un hospital, el 54 % de los nacimientos son niñas. Halla la probabilidad de que de 2 500 nacimientos, el número de niños esté entre 1 200 y 1 400, ambos inclusive.**

Se trata de una experiencia dicotómica en la que la probabilidad de ser niño es $p = 0{,}46$. El número de niños nacidos sigue una distribución $B(2\,500;\, 0{,}46)$.

Como $n \cdot p = 2\,500 \cdot 0{,}46 = 1\,150 > 5$ podemos aproximar de forma muy precisa con la normal de media $\mu = 1\,150$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{2\,500 \cdot 0{,}46 \cdot 0{,}54} = 24{,}9$

$x = B(2\,500;\, 0{,}46) \approx x' = N(1\,150;\, 24{,}9)$

$P[1\,200 \le x \le 1\,400] = P[1\,199{,}5 \le x' \le 1\,400{,}5] = P\left[\dfrac{1199{,}5-1150}{24{,}9} \le z \le \dfrac{1400{,}5-1150}{24{,}9}\right] =$

$= P[1{,}99 \le z \le 10{,}06] = P[z \le 10{,}06] - P[z \le 1{,}99] = 1 - 0{,}9767 = 0{,}0233$

41 **Un examen tipo test tiene 50 preguntas y cada pregunta, tres respuestas diferentes, solo una de las cuales es correcta.**

Para aprobar, hace falta responder bien a 25 preguntas; para sacar un notable, a 35; y para un sobresaliente, a 45.

Si se responde al azar, ¿cuál es la probabilidad de aprobar? ¿Y la de sacar notable? ¿Y sobresaliente?

Se trata de una experiencia dicotómica en la que la probabilidad de acertar es $p = \dfrac{1}{3}$. El número de respuestas acertadas sigue una distribución $B\left(50, \dfrac{1}{3}\right)$.

Como $n \cdot p = 50 \cdot \dfrac{1}{3} = 16{,}67 > 5$ podemos aproximar de forma muy precisa con la normal de media $\mu = 16{,}67$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{50 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3}} = 3{,}33$.

$x = B\left(50, \dfrac{1}{3}\right) \approx x' = N(16{,}67;\, 3{,}33)$

Aprobar:

$P[25 \le x < 35] = P[24{,}5 \le x' \le 34{,}5] = P\left[\dfrac{24{,}5-16{,}67}{3{,}33} \le z \le \dfrac{34{,}5-16{,}67}{3{,}33}\right] = P[2{,}35 \le z \le 5{,}35] =$

$= 1 - 0{,}9906 = 0{,}0094$

Las probabilidades de sacar un notable o un sobresaliente son prácticamente nulas.

Veámoslo con el notable:

$$P[35 \le x < 45] = P[34{,}5 \le x' \le 44{,}5] = P\left[\frac{34{,}5-16{,}67}{3{,}33} \le z \le \frac{44{,}5-16{,}67}{3{,}33}\right] = P[5{,}35 \le z \le 8{,}36] =$$

$$= P[z \le 8{,}36] - P[z \le 5{,}35] \approx 1 - 1 = 0$$

42 En una empresa que fabrica microcircuitos se ha comprobado que el 10 % de estos son defectuosos. Si se compra un paquete de 300 microcircuitos procedentes de la fábrica, determina:

a) La probabilidad de que se encuentren más de un 9 % de microcircuitos defectuosos.

b) La probabilidad de que el número de microcircuitos defectuosos esté entre 20 y 30.

Se trata de una experiencia dicotómica en la que la probabilidad de ser defectuoso es $p = \frac{10}{100} = 0{,}1$.

El número de tornillos defectuosos sigue una distribución $B(300;\ 0{,}1)$.

Como $n \cdot p = 300 \cdot 0{,}1 = 30 > 5$ podemos aproximar de forma muy precisa con la normal de media $\mu = 30$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 2{,}12$.

$x = B(300;\ 0{,}1) \approx x' = N(30;\ 2{,}12)$.

a) $9\,\% \cdot 300 = 27$

$$P[x > 27] = P[x' \ge 27{,}5] = P\left[z \ge \frac{27{,}5-30}{2{,}12}\right] = P[z \ge -1{,}18] = P[z \le 1{,}18] = 0{,}881$$

b) $P[20 < x < 30] = P[20{,}5 \le x' \le 29{,}5] = P\left[\frac{20{,}5-30}{2{,}12} \le z \le \frac{29{,}5-30}{2{,}12}\right] = P[-4{,}48 \le z \le -0{,}24] =$

$$= P[z \le 0{,}24] - P[z \le 4{,}48] = 1 - 0{,}5948 = 0{,}4052$$

43 En un bombo de lotería tenemos 10 bolas numeradas del 0 al 9. Cada vez que se extrae una, se devuelve al bombo.

a) Si sacamos tres bolas, halla la probabilidad de que el 0 salga una sola vez.

b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que el 0 salga más de 12 veces.

a) El número de 0 extraídos sigue una distribución $B\left(3, \frac{1}{10}\right)$.

$$P[x = 1] = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 = 0{,}243$$

b) El número de 0 extraídos sigue una distribución $B\left(100, \frac{1}{10}\right)$.

Como $n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10 > 5$ podemos aproximar de forma muy precisa con la normal de media $\mu = 10$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 3$.

$$x = B\left(100, \frac{1}{10}\right) \approx x' = N(10,\ 3)$$

$$P[x > 12] = P[x' \ge 12{,}5] = P\left[z \ge \frac{12{,}5-10}{3}\right] = P[z \ge 0{,}83] = 1 - P[z < 0{,}83] =$$

$$= 1 - 0{,}7967 = 0{,}2033$$

Página 437

Cuestiones teóricas

44 **En una distribución $B(4; 0{,}25)$, comprueba la siguiente igualdad:**

$$P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2] + P[x = 3] + P[x = 4] = 1$$

$P[x = 0] = 0{,}75^4 = 0{,}3164$

$P[x = 1] = \binom{4}{1} \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^3 = 0{,}4219$

$P[x = 2] = \binom{4}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}2109$

$P[x = 3] = \binom{4}{3} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75 = 0{,}469$

$P[x = 4] = 0{,}25^4 = 0{,}0039$

$P[x = 0] + P[x = 1] + P[x = 2] + P[x = 3] + P[x = 4] = 0{,}3164 + 0{,}4219 + 0{,}2109 + 0{,}0469 + 0{,}0039 = 1$

45 **En una mano de póquer se dan 5 cartas a cada jugador. Nos preguntamos por la probabilidad de que un jugador tenga *k* figuras (k = 0, 1, 2, 3, 4 o 5). ¿Por qué no es una distribución binomial? (En el póquer, cada palo tiene cuatro figuras: J, Q, K, As.)**

Si en lugar de extraer 5 cartas de una baraja se lanzaran 5 dados de póquer, ¿sería una distribución binomial? Explica por qué.

Las probabilidades en un reparto de cartas no se pueden explicar mediante una distribución binomial porque las extracciones se realizan sin reemplazamiento y los resultados de cada una de ellas condicionan a las siguientes extracciones.

Si se lanzaran dados de póker sí podríamos aplicar la distribución binomial, porque ese experimento sería equivalente a la repetición de un lanzamiento 5 veces y estudiaríamos para cada resultado si es una figura o no.

Para profundizar

46 **Una máquina que expende bebidas está regulada de modo que la cantidad de líquido que echa está distribuida normalmente con una media de 200 *ml* y una desviación típica de 15 *ml*.**

a) ¿Qué porcentaje de los vasos se llenarán con más de 224 *ml*?

b) Si usamos 6 vasos de 224 *ml* de capacidad, ¿cuál es la probabilidad de que se derrame líquido únicamente en uno de los vasos?

a) $x = N(200, 15)$

$$P[x > 224] = P\left[z > \frac{224 - 200}{15}\right] = P[z > 1{,}6] = 1 - P[z \le 1{,}6] = 1 - 0{,}9452 = 0{,}0548$$

Aproximadamente el 5,5 % de los vasos se llenaría con más de 224 *ml*.

b) El número de vasos que se derraman se ajusta a una distribución $x' = B(6; 0{,}055)$ ya que la probabilidad de que se derrame un vaso al azar es la calculada en el apartado anterior.

$$P[x' = 1] = \binom{6}{1} \cdot 0{,}055 \cdot 0{,}945^5 = 0{,}2487$$

47 Juan encesta el 30 % de sus tiros a canasta. Si en los dos últimos partidos lanzó 20 tiros en cada uno, ¿cuál es la probabilidad de que en cada partido haya encestado más de 7 canastas? Razona si esta probabilidad es mayor, menor o igual que la probabilidad de que entre los dos partidos enceste más de 15 canastas.

El número de encestes de cada partido sigue una distribución $B(20; 0{,}3)$.

Para calcular la probabilidad de que en un partido enceste más de 7 canastas aproximamos mediante una normal:

$n \cdot p = 20 \cdot 0{,}3 = 6 > 5 \rightarrow$ Podemos aproximar mediante una normal de parámetros: $\mu = 6$; $\sigma = \sqrt{20 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = 2{,}05$

$x = B(20; 0{,}3) \approx x' = N(6; 2{,}05)$

$$P[x > 7] = P[x' \geq 7{,}5] = P\left[z \geq \frac{7{,}5-6}{2{,}05}\right] = P[z \geq 0{,}73] = 1 - P[z < 0{,}73] = 1 - 0{,}7673 = 0{,}2327$$

Si ahora tenemos en cuenta 40 tiros a canasta, el número de encestes sigue una distribución $B(40; 0{,}3)$.

Para calcular la probabilidad de que en un partido enceste más de 7 canastas aproximamos mediante una normal:

$n \cdot p = 40 \cdot 0{,}3 = 12 > 5 \rightarrow$ Podemos aproximar mediante una normal de parámetros: $\mu = 12$; $\sigma = \sqrt{40 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = 2{,}9$

$x = B(40; 0{,}3) \approx x' = N(12; 2{,}9)$

$$P[x > 15] = P[x' \geq 15{,}5] = P\left[z \geq \frac{15{,}5-12}{2{,}9}\right] = P[z \geq 1{,}21] = 1 - P[z < 1{,}21] = 1 - 0{,}8869 = 0{,}1131$$

que resulta ser menor que la anterior.

Por tanto, es menos probable acertar más de 15 canastas de 40 tiros que acertar más de 7 canastas de 20 tiros en las condiciones del problema.

48 En el proceso de fabricación de una pieza intervienen dos máquinas: la máquina A produce un taladro cilíndrico y la máquina B secciona las piezas con un grosor determinado. Ambos procesos son independientes.

El diámetro del taladro producido por A, en milímetros, es $N(23; 0{,}5)$.

El grosor producido por B es $N(11{,}5; 0{,}4)$.

a) Calcula qué porcentaje de piezas tienen un taladro comprendido entre 20,5 y 24 mm.

b) Encuentra el porcentaje de piezas que tienen un grosor comprendido entre 10,5 y 12,7 mm.

c) Suponiendo que solo son válidas las piezas cuyas medidas son las dadas en a) y en b), calcula qué porcentaje de piezas aceptables se consigue.

a) Si llamamos $x = N(23; 0{,}5)$

$$P[20{,}5 \leq x \leq 24] = P\left[\frac{20{,}5-23}{0{,}5} \leq z \leq \frac{24-23}{0{,}5}\right] = P[-5 \leq z \leq 2] = P[z \leq 2] + P[z \leq 5] - 1 = 0{,}9772$$

b) Si llamamos $x' = N(11{,}5; 0{,}4)$

$$P[10{,}5 \leq x' \leq 12{,}7] = P\left[\frac{10{,}5-11{,}5}{0{,}4} \leq x \leq \frac{12{,}7-11{,}5}{0{,}4}\right] = P[-2{,}5 \leq x \leq 3] =$$

$$= P[z \leq 3] + P[z \leq 2{,}5] - 1 = 0{,}9925$$

c) Para que una pieza sea válida deben ocurrir ambas condiciones a la vez. Como las máquinas funcionan de forma independiente, la probabilidad de que una pieza sea válida es $p = 0{,}9772 \cdot 0{,}9925 = 0{,}9699$. Luego el procentaje de piezas válidas es, aproximadamente, el 97 %.

49 **En cierto juego con dos dados, gano una partida si saco dos cincos en la primera tirada; un seis y un cinco en la segunda, y al menos un cuatro en la tercera. ¿Qué probabilidad tengo de ganar?**

Primera tirada: $P[\text{DOS CINCOS}] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Segunda tirada: $P[\text{UN CINCO Y UN SEIS}] = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$

Tercera tirada: $P[\text{AL MENOS UN CUATRO}] = 1 - P[\text{NO SACAR NINGÚN CUATRO}] = 1 - \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11}{36}$

La probabilidad de que las tres ocurran es $P = \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{11}{36} = 0{,}00047$

Autoevaluación

Página 437

1 La siguiente tabla corresponde a una distribución de probabilidad de variable discreta:

x_i	5	6	7	8	9	10
p_i	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1	…

a) Complétala en tu cuaderno y calcula μ y σ.

b) ¿Cuál será la probabilidad de que $x > 7$? ¿Y la de que $x < 7$?

a) $0,1 + 0,3 + 0,2 + 0,1 + 0,1 + P[10] = 1 \rightarrow P[10] = 0,2$

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
5	0,1	0,5	2,5
6	0,3	1,8	10,8
7	0,2	1,4	9,8
8	0,1	0,8	6,4
9	0,1	0,9	8,1
10	0,2	2	20
	1	7,4	57,6

$\mu = 7,4$

$\sigma = \sqrt{57,6 - 7,4^2} = 1,69$

b) $P[x > 7] = 0,1 + 0,1 + 0,2 = 0,4$

$P[x < 7] = 0,1 + 0,3 = 0,4$

2 Con un cierto tipo de chinchetas se dan las siguientes probabilidades al dejarlas caer en el suelo:

***P*[] = 0,3** ***P*[] = 0,7**

Dejamos caer 6 chinchetas. Calcula:

a) *P*[2  y 4 ]

b) *P*[Ninguna ]

c) *P*[Alguna ]

d) *P*[3  y 3 ]

El número de chinchetas que caen con la punta hacia arriba sigue una distribución $B(6; 0,3)$.

a) $P[x = 2] = \binom{6}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 0,7^4 = 0,324$

b) $P[x = 0] = 0,7^6 = 0,118$

c) $P[x \geq 1] = 1 - P[x = 0] = 1 - 0,7^6 = 0,882$

d) $P[x = 3] = \binom{6}{3} \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^3 = 0,185$

3 **Comprueba que $y = \frac{x}{2} - 1$ si $2 \le x \le 4$ es una función de densidad. Represéntala y calcula estas probabilidades:**

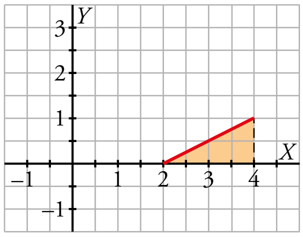
a) $P[x = 3]$

b) $P[x < 3]$

c) $P[x > 3{,}5]$

d) $P[3 \le x \le 3{,}5]$

La gráfica de la función de densidad dada es:



La función es no negativa en el intervalo [2, 4].

El área que hay bajo la función es: $\frac{2 \cdot 1}{2} = 1$ porque es el área de un triángulo.

Por tanto, es una función de densidad.

a) $P[x = 3] = 0$

b) $P[x < 3] = P[2 \le x < 3] = \dfrac{1 \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right)}{2} = 0{,}25$

c) $P[x > 3{,}5] = P[3{,}5 < x \le 4] = \dfrac{\frac{3{,}5}{2} - 1 + 1}{2} \cdot 0{,}5 = 0{,}4375$

d) $P[3 \le x \le 3{,}5] = \dfrac{\left(\frac{3}{2} - 1\right) + \left(\frac{3{,}5}{2} - 1\right)}{2} \cdot 0{,}5 = 0{,}3125$

Vemos cómo coincide con: $1 - P[x < 3] - P[x > 3{,}5] = 1 - 0{,}25 - 0{,}4375 = 0{,}3125$

4 **Sabemos que una variable z es $N(0, 1)$.**

a) Calcula las siguientes probabilidades:

$P[1{,}53 < z < 2{,}1]$ $\quad$ $P[-1{,}53 < z < 2{,}1]$

b) Halla b y k para que se cumpla lo siguiente:

$P[z < b] = 0{,}4$ $\quad$ $P[-k < z < k] = 0{,}9$

a) $P[1{,}53 < z < 2{,}1] = P[z < 2{,}1] - P[z < 1{,}53] = 0{,}9821 - 0{,}9370 = 0{,}0451$

$P[-1{,}53 < z < 2{,}1] = P[z < 2{,}1] + P[z < 1{,}53] - 1 = 0{,}9821 + 0{,}9370 - 1 = 0{,}9191$

b) $P[z < b] = 0{,}4 \rightarrow P[z > -b] = 0{,}4 \rightarrow 1 - P[z \le -b] = 0{,}4 \rightarrow P[z \le -b] = 0{,}6 \rightarrow$

$\rightarrow -b = 0{,}25 \rightarrow b = -0{,}25$

$P[-k < z < k] = 0{,}9 \rightarrow 2 \cdot P[z < k] - 1 = 0{,}9 \rightarrow P[z < k] = 0{,}95 \rightarrow k = 1{,}64$

5 **El cociente intelectual (C.I.) de un colectivo de bomberos se distribuye normal, de media 108 y desviación típica 3,5. Llamamos x al C.I. de uno de ellos tomado al azar. Calcula:**

a) $P[x < 100]$

b) $P[x > 115]$

c) $P[100 < x < 115]$

a) $P[x < 100] = P\left[z < \dfrac{100-108}{3,5}\right] = P[z < -2,29] = P[z > 2,29] = 1 - P[z \le 2,29] = 1 - 0,9890 = 0,011$

b) $P[x > 115] = P\left[z > \dfrac{115-108}{3,5}\right] = P[z > 2] = 1 - P[z \le 2] = 1 - 0,9772 = 0,0228$

c) $P[100 < x < 115] = 1 - 0,0228 - 0,011 = 0,9662$

6 **El tiempo que tardo en llegar a clase sigue una normal de media 20 minutos. He comprobado que el 94,5 % de los días llego antes de 28 minutos. Si en todo el año voy 177 días a clase, ¿cuántos días puedo estimar que tardaré menos de un cuarto de hora en llegar?**

Llamemos $x = N(20, \sigma)$.

$P[x < 28] = 0,945 \rightarrow P\left[z < \dfrac{28-20}{\sigma}\right] = 0,945 \rightarrow \dfrac{8}{\sigma} = 1,6 \rightarrow \sigma = 5$

Calculamos la probabilidad de tardar menos de un cuarto de hora:

$P[x < 15] = P\left[z < \dfrac{15-20}{5}\right] = P[z < -1] = P[z > 1] = 1 - P[z \le 1] = 1 - 0,8413 = 0,1587$

El número esperado de días en los que tardará menos de un cuarto de hora es: $177 \cdot 0,1587 = 28$ días.

7 **El 7 % de las personas padecen un pequeño defecto anatómico de origen genético. En una empresa trabajan 80 personas. ¿Cuál es la probabilidad de que haya más de 10 con ese defecto?**

El número de personas que padecen el defecto sigue una distribución $B(80; 0,07)$.

Como $n \cdot p = 80 \cdot 0,07 = 5,6 > 5$, aproximamos con una normal de parámetros $\mu = 5,6$ y $\sigma = \sqrt{80 \cdot 0,07 \cdot 0,93} = 2,28$.

$x = B(80; 0,07) \approx x' = N(5,6; 2,28)$

$P[x > 10] = P[x' \ge 10,5] = P\left[z \ge \dfrac{10,5-5,6}{2,28}\right] = P[z \ge 2,15] = 1 - P[z < 2,15] = 1 - 0,9842 = 0,0158$

Autoevaluación

Página 438

1 **Conocemos las siguientes probabilidades:**

$$P[A] = 0{,}33 \qquad P[A' \cap B'] = 0{,}41 \qquad P[B'] = 0{,}62$$

Calcula $P[B]$, $P[A \cup B]$ y $P[A \cap B]$.

$P[B] = 1 - P[B'] = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$

$P[A' \cap B'] = 0{,}41 = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] \ \rightarrow \ P[A \cup B] = 1 - 0{,}41 = 0{,}59$

$P[A \cap B] = P[A] + P[B] - P[A \cup B] = 0{,}33 + 0{,}38 - 0{,}59 = 0{,}12$

2 **En una clase, el 40 % aprueba filosofía y el 50% matemáticas. Además, la probabilidad de aprobar la filosofía habiendo aprobado las matemáticas es 0,8.**

a) ¿Qué proporción de la clase suspende ambas asignaturas?

b) Calcula el porcentaje de estudiantes que, teniendo aprobada la filosofía, aprueba también las matemáticas.

Sean los sucesos F = “aprobar filosofía” y M = “aprobar matemáticas”.

$P[\mathrm{F}] = \dfrac{40}{100} = 0{,}4$

$P[\mathrm{M}] = \dfrac{50}{100} = 0{,}5$

$P[\mathrm{F/M}] = 0{,}8$

a) $P[\mathrm{F/M}] = 0{,}8 = \dfrac{P[\mathrm{F} \cap \mathrm{M}]}{P[\mathrm{M}]} = \dfrac{P[\mathrm{F} \cap \mathrm{M}]}{0{,}5} \ \rightarrow \ P[\mathrm{F} \cap \mathrm{M}] = 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}4$

Los alumnos que suspenden ambas asignaturas constituyen el suceso $\mathrm{F}' \cap \mathrm{M}'$.

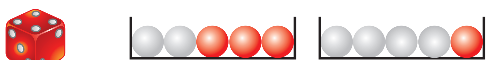
$P[\mathrm{F} \cup \mathrm{M}] = P[\mathrm{F}] + P[\mathrm{M}] - P[\mathrm{F} \cap \mathrm{M}] = 0{,}4 + 0{,}5 - 0{,}4 = 0{,}5$

$P[\mathrm{F}' \cap \mathrm{M}'] = P[(\mathrm{F} \cup \mathrm{M})'] = 1 - P[\mathrm{F} \cup \mathrm{M}] = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

b) Nos piden:

$P[\mathrm{M/F}] = \dfrac{P[\mathrm{F} \cap \mathrm{M}]}{P[\mathrm{F}]} = \dfrac{0{,}4}{0{,}4} = 1$

Es decir, el 100 % de los alumnos que aprueban filosofía también han aprobado matemáticas.

3 

A B

Si en el dado sale 1, sacamos bola de B. Si sale otra puntuación, la sacamos de A. Calcula:

$P[$●$/1]$ **$P[1$ y ●$]$** **$P[$●$]$** **$P[$○$]$** **$P[1/$●$]$**

$P[$●$/1] = \dfrac{3}{5}$

$P[1$ y ●$] = P[$●$/1] \cdot P[1] = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{10}$

$P[$●$] = P[1$ y ●$] + P[1'$ y ●$] = P[$●$/1] \cdot P[1] + P[$●$/1'] \cdot P[1'] = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{5}{6} = \dfrac{4}{15}$

$P[$○$] = 1 - P[$●$] = 1 - \dfrac{4}{15} = \dfrac{11}{15}$

$P[1/$●$] = \dfrac{P[1 \text{ y } ●]}{P[●]} = \dfrac{1/10}{4/15} = \dfrac{3}{8}$

4 **Por cada 100 personas con gafas o lentillas de un cierto colectivo, hemos atendido al color de ojos (azul, verde, negro, marrón). Alguno de los resultados se refleja en la siguiente tabla:**

	AZUL	VERDE	NEGRO	MARRÓN	TOTAL
GAFAS	11	5		25	55
LENTILLAS					
TOTAL	20	15	25		100

a) Completa la tabla.

b) Calcula P[AZUL], P[GAFAS], P[AZUL y GAFAS].

c) Calcula P[AZUL/GAFAS], P[GAFAS/AZUL].

d) Explica por qué los sucesos GAFAS y AZUL son independientes.

a)

	AZUL	VERDE	NEGRO	MARRÓN	TOTAL
GAFAS	**11**	**5**	14	**25**	**55**
LENTILLAS	9	10	11	15	45
TOTAL	**20**	**15**	**25**	40	**100**

b) $P[\text{AZUL}] = \dfrac{20}{100} = \dfrac{1}{5}$; $P[\text{GAFAS}] = \dfrac{55}{100} = \dfrac{11}{20}$; $P[\text{AZUL y GAFAS}] = \dfrac{11}{100}$

c) $$P[\text{AZUL/GAFAS}] = \frac{P[\text{AZUL y GAFAS}]}{P[\text{GAFAS}]} = \frac{\frac{11}{100}}{\frac{11}{20}} = \frac{1}{5}$$

$$P[\text{GAFAS/AZUL}] = \frac{P[\text{AZUL y GAFAS}]}{P[\text{AZUL}]} = \frac{\frac{11}{100}}{\frac{20}{100}} = \frac{11}{20}$$

d) Del apartado b) se deduce que $P[\text{AZUL y GAFAS}] = \dfrac{11}{100} = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{11}{20} = P[\text{AZUL}] \cdot P[\text{GAFAS}]$

Por tanto, los sucesos son independientes.

También, observando los apartados b) y c) vemos que el hecho de llevar gafas no influye en la probabilidad de tener ojos azules ya que $P[\text{AZUL}] = P[\text{AZUL/GAFAS}]$.

Esto justifica la independencia entre los sucesos.

5 **En una distribución $N(0, 1)$ calcula:**

a) $P[0{,}25 < z < 1{,}45]$

b) $P[-0{,}25 < z \le 1{,}45]$

c) El valor de k para que $P[-k < z < k] = 0{,}90$.

a) $P[0{,}25 < z < 1{,}45] = P[z < 1{,}45] - P[z \le 0{,}25] = 0{,}9265 - 0{,}5987 = 0{,}3278$

b) $P[-0{,}25 < z \le 1{,}45] = P[z \le 1{,}45] + P[z < 0{,}25] - 1 = 0{,}9265 + 0{,}5987 - 1 = 0{,}5252$

c) $P[-k < z < k] = 2P[0 < z < k] = 2(P[z < k] - 0{,}5) = 2P[z < k] - 1 = 0{,}9 \rightarrow$

$\rightarrow P[z < k] = \dfrac{1{,}9}{2} = 0{,}95 \rightarrow k = 1{,}645$

6 **En una distribución $N(20, 4)$ calcula:**

a) $P[x = 21]$

b) $P[x < 21]$

c) $P[19 \le x \le 21]$

a) $P[x = 21] = 0$

b) $P[x < 21] = P\left[\dfrac{x-20}{4} < \dfrac{21-20}{4}\right] = P[z < 0,25] = 0,5987$

c) $P[19 \le x \le 21] = P\left[\dfrac{19-20}{4} \le \dfrac{x-20}{4} \le \dfrac{21-20}{4}\right] = P[-0,25 \le z \le 0,25] =$

$= 2P[0 \le z \le 0,25] = 2P[z \le 0,25] - 1 = 2 \cdot 0,5987 - 1 = 0,1974$

7 **En una distribución $B(10; 0,4)$ calcula:**

a) $P[x = 0]$, $P[x = 1]$, $P[x > 1]$.

b) Los parámetros μ y σ.

Los datos de la distribución son $n = 10$; $p = 0,4$; $q = 0,6$

a) $P[x = 0] = 0,6^{10} = 0,00605$

$P[x = 1] = \binom{10}{1} \cdot 0,4 \cdot 0,6^9 = 0,04031$

$P[x > 1] = 1 - P[x \le 1] = 1 - (P[x = 0] + P[x = 1]) = 1 - (0,00605 + 0,04031) = 0,95364$

b) $\mu = np = 10 \cdot 0,4 = 4$

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = 1,55$

8 **En una ciudad, la temperatura máxima durante el mes de junio está distribuida normalmente con una media de 26° y una desviación típica de 4°. Calcula el número de días que se espera tengan una temperatura máxima comprendida entre 22° y 28°.**

Llamamos X a la temperatura máxima durante el mes de junio:

$X = N(26, 4)$

$P[22 \le x \le 28] = P\left[\dfrac{22-26}{4} \le \dfrac{x-26}{4} \le \dfrac{28-26}{4}\right] = P[-1 \le z \le 0,5] =$

$= P[z \le 0,5] + P[z \le 1] - 1 = 0,6915 + 0,8413 - 1 = 0,5328$

Como el mes de junio tiene 30 días, el número esperado de días es:

$30 \cdot 0,5328 = 15,984 \approx 16$ días

9 **Un examen tipo test tiene cien preguntas y cada pregunta cuatro respuestas diferentes, de las que solo una es correcta.**

a) Calcula la probabilidad de que un estudiante que responde al azar acierte más de 20 preguntas.

b) Calcula la probabilidad de que de las 20 primeras preguntas acierte a lo sumo 4.

a) Llamamos X a la variable que cuenta el número de preguntas acertadas al azar entre las 100 del examen. X muestra una distribución binomial $\rightarrow$ $X = B(100; 0,25)$.

Como $100 \cdot 0,25 = 25 \ge 5$, podemos ajustarla mediante una distribución normal X' de parámetros:

$\mu = 100 \cdot 0,25 = 25$

$\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,25 \cdot 0,75} = 4,33$

$P[x > 20] = P[x' \ge 20,5] = P\left[\dfrac{x-25}{4,33} \ge \dfrac{20,5-25}{4,33}\right] = P[z \ge -1,04] = P[z \le 1,04] = 0,8508$

b) Análogamente, ahora llamamos X a la variable que cuenta el número de preguntas acertadas al azar entre las 20 primeras del examen $\rightarrow$ $X = B(20; 0{,}25)$.

Como $20 \cdot 0{,}25 = 5 \geq 5$, podemos ajustarla mediante una distribución normal X' de parámetros:

$$\mu = 20 \cdot 0{,}25 = 5$$

$$\sigma = \sqrt{20 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} = 1{,}94$$

$$P[x \leq 4] = P[x' \leq 4{,}5] = P\left[\frac{x'-5}{1{,}94} \leq \frac{4{,}5-5}{1{,}94}\right] = P[z \leq -0{,}26] = 1 - P[z < 0{,}26] =$$

$$= 1 - 0{,}6026 = 0{,}3974$$

10 La proporción de personas nacidas un 29 de febrero es 1/1 461.

a) Justifica por qué.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que en una localidad de 20 000 habitantes haya menos de 8 personas nacidas un 29 de febrero?

a) El número de días que hay entre dos años bisiestos es $3 \cdot 365 + 366 = 1\,461$

Luego la proporción de personas nacidas el 29 de febrero es $\frac{1}{1\,461}$.

b) Llamamos X a la variable que cuenta el número de personas nacidas el 29 de febrero entre las 20 000 de la localidad $\rightarrow$ $X = B\left(20\,000, \frac{1}{1\,461}\right)$.

Como $20\,000 \cdot \frac{1}{1\,461} = 13{,}69 \geq 5$, podemos ajustarla mediante una distribución normal X' de parámetros:

$$\mu = 13{,}69$$

$$\sigma = \sqrt{20\,000 \cdot \frac{1}{1\,461} \cdot \frac{1\,460}{1\,461}} = 3{,}7$$

$$P[x < 8] = P[x' \leq 7{,}5] = P\left[\frac{x'-13{,}69}{3{,}7} \leq \frac{7{,}5-13{,}69}{3{,}7}\right] = P\left[z \leq \frac{7{,}5-13{,}69}{3{,}7}\right] =$$

$$= P[z \leq -1{,}67] = 1 - P[z < 1{,}67] = 1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$$

11 a) Calcula k para que la siguiente tabla corresponda a una distribución de probabilidad:

x_i	11	12	13	14	15	16
p_i	0,15	0,1	0,12	0,17	k	k

b) Halla $P[13 \leq x_i \leq 15]$.

c) Calcula los parámetros μ y σ.

a) Para que la tabla corresponda a una distribución de probabilidad, la suma de las probabilidades debe ser 1.

$$0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}12 + 0{,}17 + 2k = 1 \rightarrow k = 0{,}23$$

b) $P[13 \leq x_i \leq 15] = 0{,}12 + 0{,}17 + 0{,}23 = 0{,}52$

c)

x_i	p_i	$p_i \cdot x_i$	$p_i \cdot x_i^2$
11	0,15	1,65	18,15
12	0,1	1,2	14,4
13	0,12	1,56	20,28
14	0,17	2,38	33,32
15	0,23	3,45	51,75
16	0,23	3,68	58,88
	1	13,92	196,78

Por tanto:

$\mu = 13{,}92$

$\sigma = \sqrt{196{,}78 - 13{,}92^2} = 1{,}74$