Unidad 13 – Representación gráfica de funciones

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = |x + 2| - x$

b) $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

c) $y = |x^2 - 4x + 3|$

d) $y = |x-3| + |x+3|$

e) $y = x^3 - \dfrac{4}{3}|x|$

f) $y = \dfrac{x-|x|}{2}$

2. Construye la gráfica de las siguientes funciones:

a) $y = x(x + 2)(x - 2)$

b) $y = x(x - 1)(x - 2)$

c) $y = 3x - x^3$

d) $y = x^4 - 2x^2$

e) $y = -\dfrac{x^3}{6} + x$

f) $y = 2x^2 - x^4 - 1$

g) $y = 2x^3 + 5x^2 - 4x$

h) $y = x^4 - 2x^2 - 8$

i) $y = 2x^2 - 3x - \dfrac{1}{3}x^3$

3. Encuentra una función cuya expresión sea un polinomio del menor grado posible que pase por (0, 0) y tenga un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$. Realiza su representación gráfica.

4. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$:

a) Halla a y b de manera que la gráfica de la función $f(x)$ tenga para $x = 1$ una inflexión cuya recta tangente en ese punto forme un ángulo de 45° con el eje OX.

b) Representa gráficamente la función.

5. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{4}{x^2-4}$

b) $y = \dfrac{x^2}{x+2}$

c) $y = \dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)(x+4)}$

d) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

e) $y = \dfrac{2x}{x^2+2}$

f) $y = \dfrac{x^3+x^2-2}{x^2-3x-4}$

g) $y = \dfrac{x}{1+|x|}$

h) $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

i) $y = \dfrac{8}{x^2+4}$ (Curva de Agnesi)

j) $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$

k) $y = \dfrac{(x+1)(x+2)x}{(x-1)(x+3)}$

l) $y = \dfrac{x^3-4x}{x^2-4}$

6. La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x-k}$. Halla el valor de k. Realiza la representación gráfica de la función resultante.

7. Se considera la función definida por $f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$:

a) Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto (–2, –6) y admita en dicho punto una tangente horizontal.

b) Realiza la representación gráfica de la función resultante.

PÁGINA 335

8. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = +\sqrt{x^2 - 1}$

b) $y = \pm x\sqrt{\dfrac{x-1}{4x-1}}$

c) $y = \left[\sqrt[3]{x}\right]^2$

d) $y = \pm\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$

e) $y = -\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$

f) $y^2 = \dfrac{x}{3-x}$

9. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \ln(x-2)$

b) $y = \ln(x^2 - 5x + 4)$

c) $y = \ln\sqrt{x^2-1}$

d) $y = x^2 \cdot e^x$

e) $y = e^{1/x}$

f) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

g) $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

h) $y = x^2 \cdot e^{-x}$

i) $y = x \cdot e^x$

j) $y = \ln|x+1|$

k) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

l) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

10. Calcula las constantes a y b para que las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ y $g(x) = a\ln x + b$ se corten en el punto $\left(e^2, \dfrac{2}{e^2}\right)$ y tengan en él la misma recta tangente. Realiza la representación gráfica de las funciones resultantes.

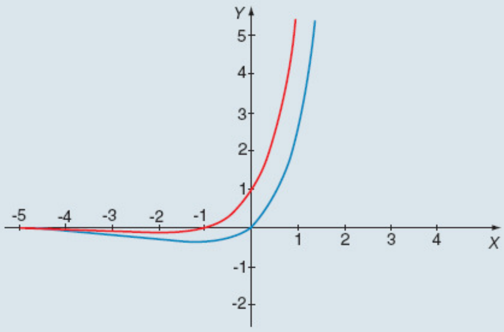
11. A partir de la gráfica de la función $f(x) = \ln x$, dibuja de forma razonada las gráficas de las funciones:

a) $f(x) = \ln|x|$

b) $f(x) = |\ln x|$

c) $f(x) = \ln(x-2)$

12. En la figura siguiente se muestran las gráficas de dos funciones: la de la función $f(x) = x\,e^x$ y la de su derivada $f'(x)$.



Distingue una de la otra, justificando razonadamente el porqué, y halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, así como los puntos donde hay máximos, mínimos e inflexiones de $y = f(x)$.

13. Demuestra que la ecuación $x^4 + 4e^x \cdot (x-1) = 0$ tiene únicamente dos soluciones. ¿Podrías decir entre qué dos números consecutivos está cada una de las soluciones? Utiliza para ello las gráficas de las funciones: $f(x) = e^x$ y $g(x) = \dfrac{-x^4}{4(x-1)}$.

PÁGINA 336

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

14. La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = 3$ y tiene un punto de inflexión en (2/3, 1/9). Halla a, b y c; y representa gráficamente la función obtenida.

15. Esboza la gráfica de la función: $\begin{cases} \ln(1+x^2) & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

16. Sea la función $f(x) = e^x + \ln x$.

    a) Estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas.

    b) Haz una gráfica aproximada de esta función.

17. Halla el dominio de definición, los límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, los ceros, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{8x^2 + 1}$$

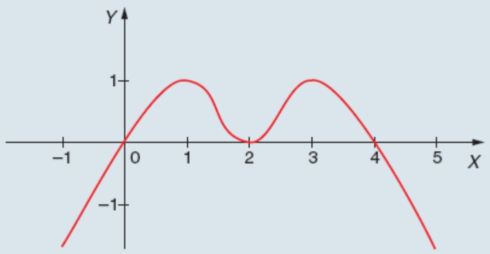
Dibuja luego un esquema sencillo de su gráfica.

18. Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$, calculando, en su caso, el dominio de definición, máximos, mínimos, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de corte con los ejes.

19. Dibuja la región del plano comprendida entre las curvas:

$$y = \sqrt{16 - x^2} \qquad x^2 = 12(y - 1)$$

20. Se sabe que la gráfica de la derivada $f'(x)$ de una función en el intervalo abierto (–1, 5) es la que muestra el dibujo.



a) Sabiendo que $f(0) = 0$, dibuja de manera aproximada la gráfica de la función $f(x)$ en el intervalo (–1, 5).

b) Indica en esta gráfica los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión.

21. El esquema adjunto representa el gráfico de la función $y = f(x)$:

    a) Haz otro esquema que represente el gráfico de la función $y = -f(x)$.

    b) Haz otro esquema que represente conjuntamente las gráficas de $y = f(x)$ e $y = 2f(x)$.

    Explica el fundamento para la construcción de estos esquemas.