Unidad 13 – Representación gráfica de funciones

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Representa gráficamente las siguientes funciones:

   a) $y = |x + 2| - x$

   b) $y = \dfrac{|x-1|}{x-1}$

   c) $y = |x^2 - 4x + 3|$

   d) $y = |x-3| + |x+3|$

   e) $y = x^3 - \dfrac{4}{3}|x|$

   f) $y = \dfrac{x-|x|}{2}$

2. Construye la gráfica de las siguientes funciones:

   a) $y = x(x + 2)(x - 2)$

   b) $y = x(x - 1)(x - 2)$

   c) $y = 3x - x^3$

   d) $y = x^4 - 2x^2$

   e) $y = -\dfrac{x^3}{6} + x$

   f) $y = 2x^2 - x^4 - 1$

   g) $y = 2x^3 + 5x^2 - 4x$

   h) $y = x^4 - 2x^2 - 8$

   i) $y = 2x^2 - 3x - \dfrac{1}{3}x^3$

3. Encuentra una función cuya expresión sea un polinomio del menor grado posible que pase por (0, 0) y tenga un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$. Realiza su representación gráfica.

4. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 7$:

   a) Halla a y b de manera que la gráfica de la función $f(x)$ tenga para $x = 1$ una inflexión cuya recta tangente en ese punto forme un ángulo de 45° con el eje OX.

   b) Representa gráficamente la función.

5. Representa gráficamente las siguientes funciones:

   a) $y = \dfrac{4}{x^2-4}$

   b) $y = \dfrac{x^2}{x+2}$

   c) $y = \dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)(x+4)}$

   d) $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$

   e) $y = \dfrac{2x}{x^2+2}$

   f) $y = \dfrac{x^3+x^2-2}{x^2-3x-4}$

   g) $y = \dfrac{x}{1+|x|}$

   h) $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

   i) $y = \dfrac{8}{x^2+4}$ (Curva de Agnesi)

   j) $y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$

   k) $y = \dfrac{(x+1)(x+2)x}{(x-1)(x+3)}$

   l) $y = \dfrac{x^3-4x}{x^2-4}$

6. La recta $y = 2x + 6$ es una asíntota oblicua de la función $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x-k}$. Halla el valor de k. Realiza la representación gráfica de la función resultante.

7. Se considera la función definida por $f(x) = ax + b + \dfrac{8}{x}$:

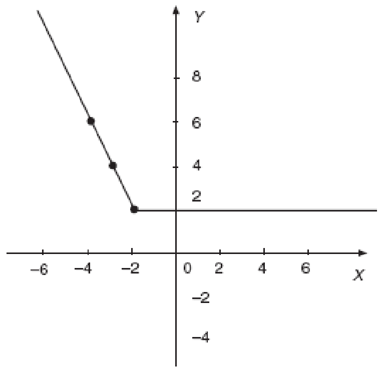
   a) Calcula a y b para que la gráfica de f pase por el punto (–2, –6) y admita en dicho punto una tangente horizontal.

   b) Realiza la representación gráfica de la función resultante.

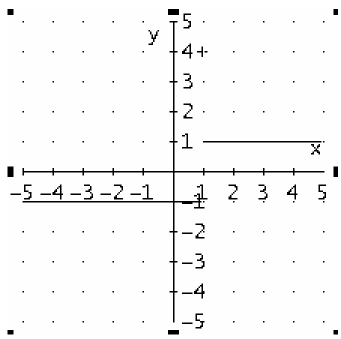
SOLUCIONES

1. La solución en cada caso es:

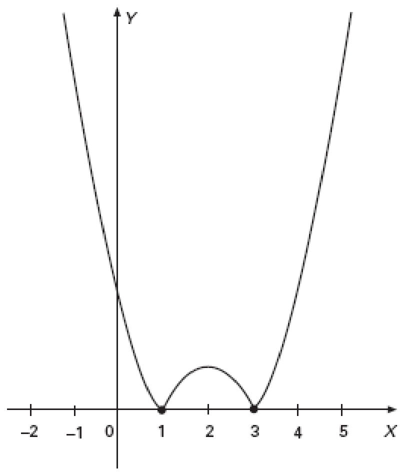
a) La función es $f(x)=\begin{cases}2 & si\ x>-2\\ -2x-2 & si\ x<-2\end{cases}$ y su grafica:



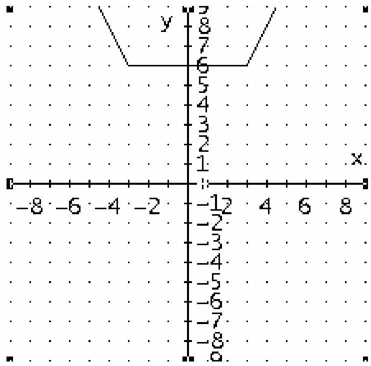
b) La función es $y=\dfrac{|x-1|}{x-1}$ y su gráfica:



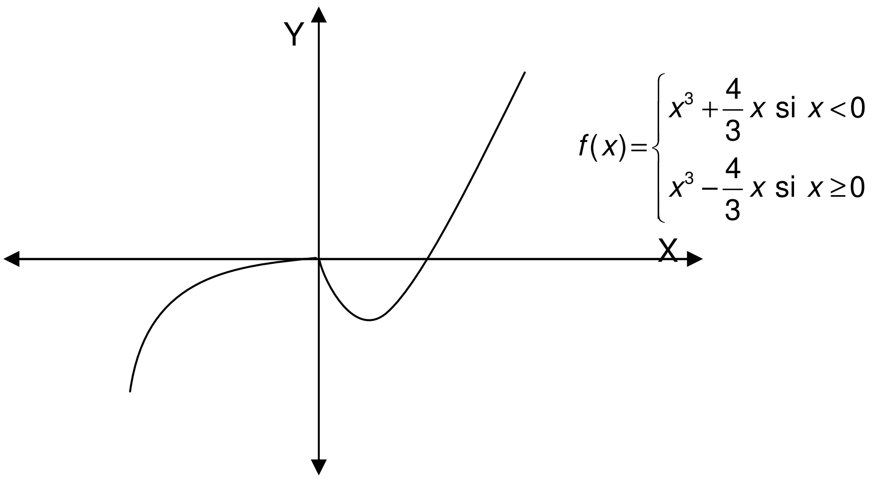
c) la función es $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x-3 & \text{si } x\in[1,\ 3]\\ x^2-4x+3 & \text{si } x\in(-\infty,\ 1)\cup(3,\ +\infty)\end{cases}$ y su grafica:



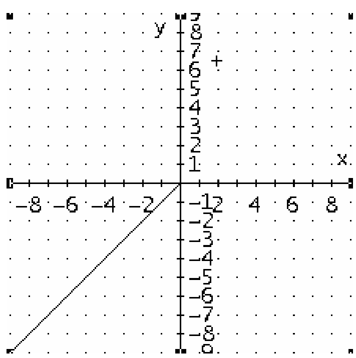
d) La función es y= $|x-3|+|x+3|$ y su gráfica:



e) La función es $f(x)=\begin{cases} x^3+\dfrac{4}{3}x & si\ x<0 \\ x^3-\dfrac{4}{3}x & si\ x\geq 0 \end{cases}$ y su gráfica:



f) La función es $y=\dfrac{x-|x|}{2}$ y su gráfica es:



2. La solución queda:

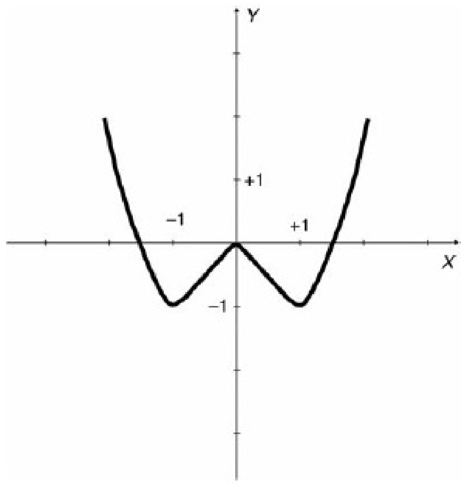
a) $y = x(x+2)(x-2) = f(x)$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al origen y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0),(-2,0),(2,0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene asíntotas.
- Extremos relativos:

  Mínimo $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{-16}{3\sqrt{3}}\right)$ máximo $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{-16}{3\sqrt{3}}\right)$
- Puntos de inflexión: (0, 0)
- Intervalos de signo constante:

  f es negativa en $(-\sqrt{2}), 0) \cup (0, \sqrt{2})$

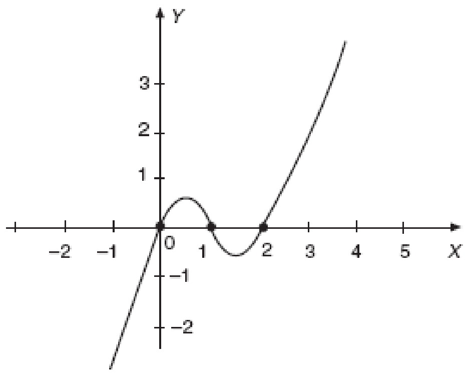
  f es positiva en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$



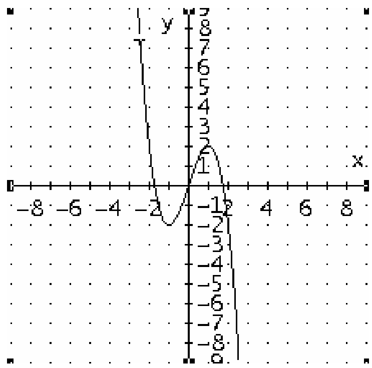
b) $y = x(x-1)(x-2)$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R}$
- No presenta simetrías ni periodicidad.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)(1,0)(2,0)$
- no tiene asíntotas.
- Tiene ramas parabólicas
- Extremos relativos:

  Mínimo $(1,58;-0,38)$ máximo $(0,42;0,38)$
- Puntos de inflexión: (1, 0)



c) $y = 3x - x^3$



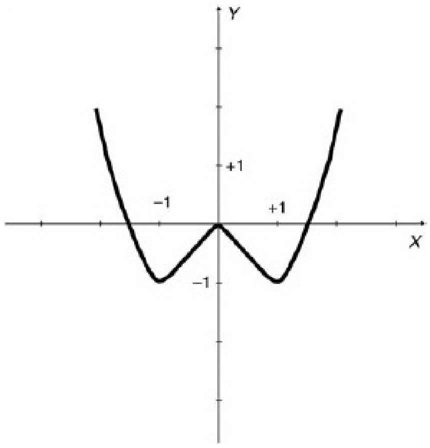
d) $y = x^4 - 2x^2$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al eje de coordenadas y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0),(\sqrt{2},0),(-\sqrt{2},0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene.
- Extremos relativos:

  Mínimo $(-1,-1)$ y $(1,-1)$ máximo $(0,0)$
- Puntos de inflexión: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{5}{9}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{5}{9}\right)$
- Intervalos de signo constante:

  f es negativa en $(-\sqrt{2}), 0) \cup (0, \sqrt{2})$

  f es positiva en $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$



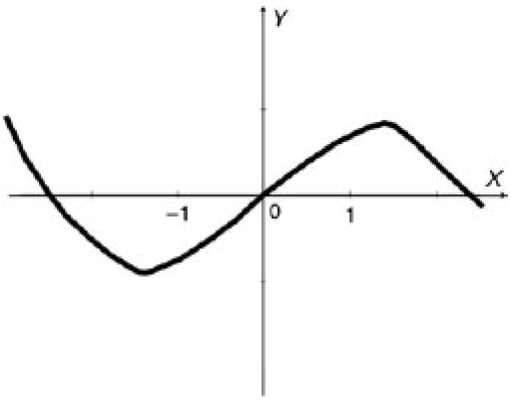
e) $y = -\frac{x^3}{6} + x$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al origen de coordenadas y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)(\sqrt{6},0)(-\sqrt{6},0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene.
- Extremos relativos:

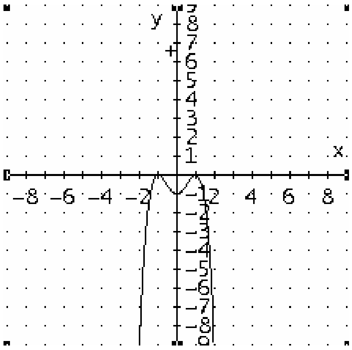
  Mínimo $\left(-\sqrt{2},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ máximo $\left(\sqrt{2},\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$
- Puntos de inflexión: $(0,0)$
- Intervalos de signo constante:

  f es positiva en $(-\infty - \sqrt{6}) \cup (0, +\sqrt{6})$

  f es negativa en $(-\sqrt{6}, 0) \cup (+\sqrt{6}, +\infty)$



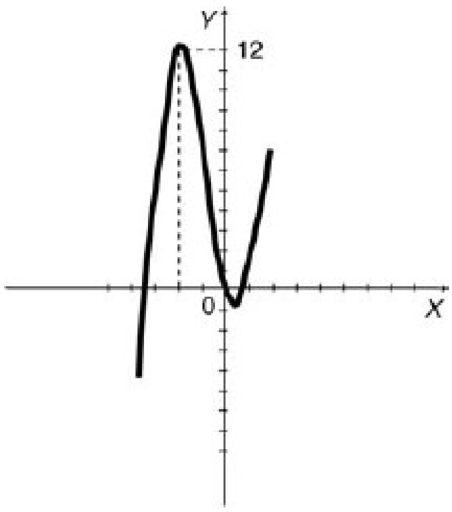
f) $y = 2x^2 - x^4 - 1$



g) $y = 2x^3 + 5x^2 - 4x = f(x)$

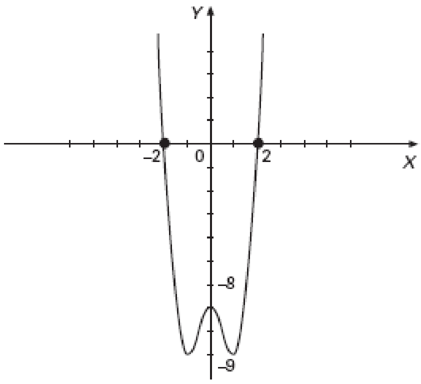
- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: ni es simétrica ni es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0), (0,64;0), (-3,14;\ 0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene.
- Extremos relativos: Mínimo $\left(\frac{1}{3}, \frac{-19}{27}\right)$ máximo $(-2,12)$
- Puntos de inflexión: $\left(-\frac{5}{6};5,65\right)$
- Intervalos de signo constante:

  f es negativa en $(-\infty;\ -3,14) \cup (0;\ 0,64)$
  f es positiva en $(-3,14;\ 0) \cup (0,64;\ +\infty)$

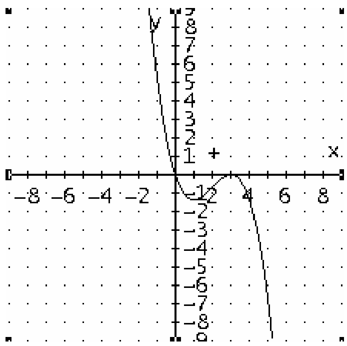


h) $y = x^4 - 2x^2 - 8 = f(x)$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al eje de coordenadas y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,-8),(2,\ 0),(-2,0)$
- Asíntotas y ramas infinitas: no tiene.
- Extremos relativos: Mínimo $(1,-9)\, y\, (-1,-9)$ máximo $(0,-8)$
- Puntos de inflexión: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-77}{9}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-77}{9}\right)$
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
  f es negativa en $(-2, 2)$



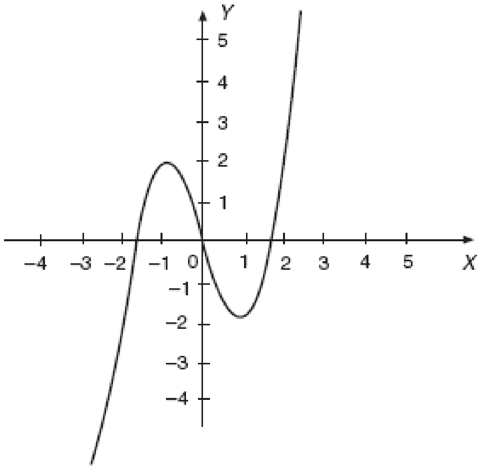
i) $y = 2x^2 - 3x - (1/3)x^3$



3. La función debe cumplir $f'(1)=0, f''(0)=0\ y\ f(0)=0$. Suponiendo las condiciones anteriores se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ 2a \quad\ = 0 \\ \quad\ c = 0 \end{cases}$$ cuya solución es $a=0, b=-3\ y\ c=0$.

La función $f(x)=x^3-3x$ cumple las condiciones del enunciado.
Su grafica es:



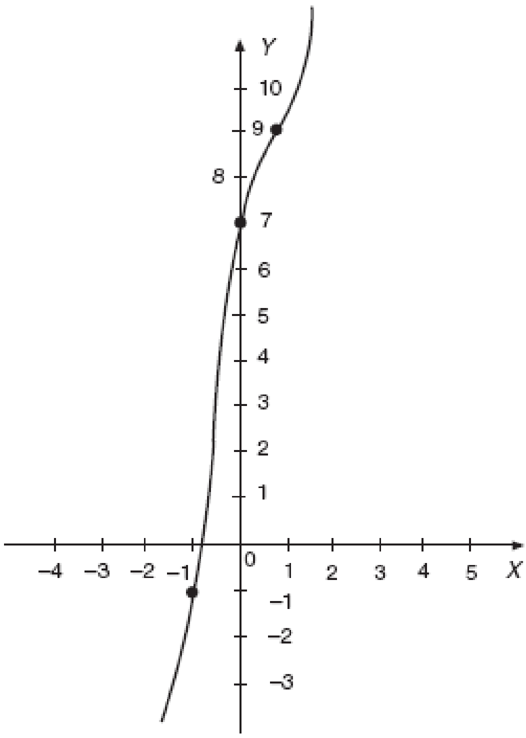
4. La solución es:

a) La función debe cumplir $f'(1)=1$ y $f'(1)=0$. Estas condiciones conducen al sistema:

$$\begin{cases} 2a+b=-2 \\ 2a \quad\;\; =-6 \end{cases}$$ cuya solución es $a=-3, b=4$

La función buscada es $f(x)=x^3-3x^2+4x+7$

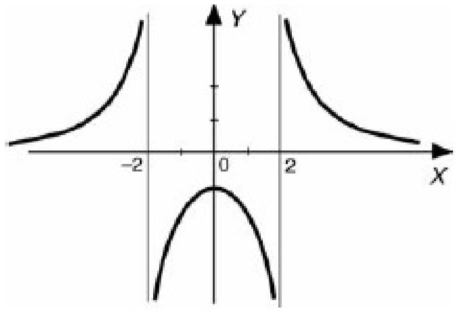
b) La gráfica puede verse en el dibujo.



5. Las funciones quedan:

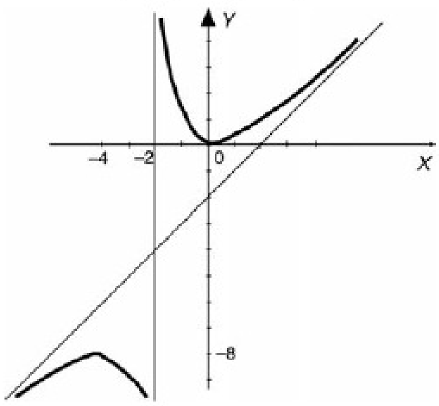
a) $y=\dfrac{4}{x^2-4}=f(x)$

- Dominio: $Dom\, f=\mathbb{R}\ -\{+2,-2\}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto a OY y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,-1)$
- Asíntotas: $x=\pm 2; x=-2; y=0$
- Extremos relativos: Máximo $(0,-1)$
- Puntos de inflexión: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{-77}{9}\right),\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}},\dfrac{-77}{9}\right)$
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
  f es negativa en $(-2, 2)$



b) $y=\dfrac{x^2}{x+2}=f(x)$

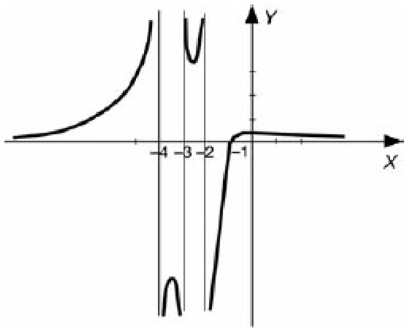
- Dominio: $Dom\, f=\mathbb{R}\ -2$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$
- Asíntotas: $x=-2; y=x-2$
- Extremos relativos: Máximo $(-4,-8)$ mínimo $(0,0)$
- Puntos de inflexión: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{-77}{9}\right)\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}},\dfrac{-77}{9}\right)$
- Intervalos de signo constante:
  f es negativa en $(-\infty, -2)$.
  f es positiva en $(-2, 0) \cup (0, +\infty)$.



c) $y=\dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)(x+4)}$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R} -\{-2,-3,-4\}$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $\left(0,\dfrac{1}{24}\right),(-1,0)$
- Asíntotas: $x=-2; x=-3; x=-4; y=0$
- Extremos relativos: la curva presenta dos máximos relativos y un mínimo, como observamos en la grafica.
- Intervalos de signo constante:

  f es positiva en $(-\infty, -4) \cup (-3, -2) \cup (-1, +\infty)$
  f es negativa en $(-4, -3) \cup (-2, -1)$

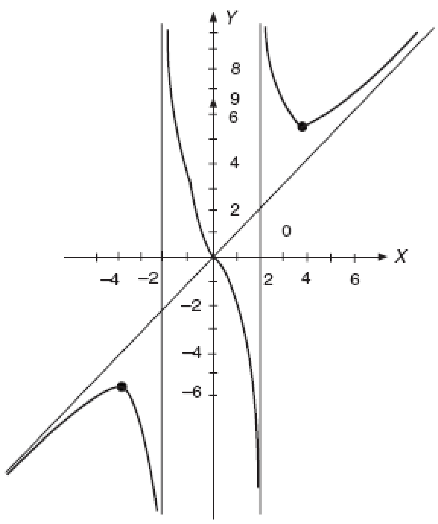


d) $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R} -\{-2,2\}$
- Tiene una simetría respecto al origen de coordenadas.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$
- Asíntotas: $x=-2; y=x$
- Extremos relativos:

Máximo $\left(-\sqrt{12},-\dfrac{3\sqrt{12}}{2}\right)$ mínimo $\left(\sqrt{12},\dfrac{3\sqrt{12}}{2}\right)$

- Puntos de inflexión: $(0,0)$

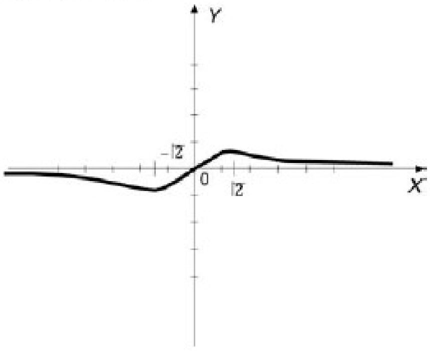


e) $y = \dfrac{2x}{x^2+2}$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: simétrica respecto al origen y no periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$
- Asíntotas: $y = 0$
- Extremos relativos: Máximo $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ mínimo $\left(-\sqrt{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(-\infty, 0)$

f es positiva en $(0, +\infty)$

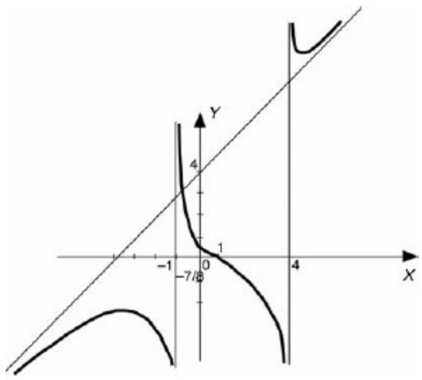


f) $y = \dfrac{x^3+x^2-2}{x^2-3x-4}$

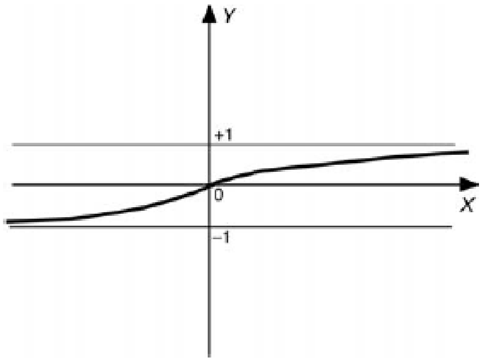
- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R} - \{4, -1\}$
- Simetrías y periodicidad: ni simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $\left(0, \dfrac{1}{2}\right), (1, 0)$
- Asíntotas: $x = -1; x = 4; y = x + 4$ y como oblicua $y = x + 4$ en el punto $\left(-\dfrac{7}{8}, \dfrac{25}{8}\right)$
- Extremos relativos: no se pueden hallar fácilmente.
- Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(-1, 1) \cup (4, +\infty)$

f es negativa en $(-\infty, -1) \cup (1, 4)$.

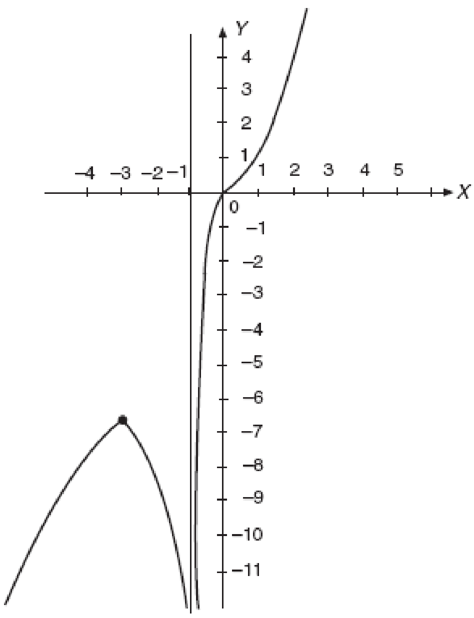


g) $y = \dfrac{x}{1+|x|}$ que separando el valor absoluto queda $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x} & si\ x \geq 0 \\ \dfrac{x}{1-x} & si\ x < 0 \end{cases}$



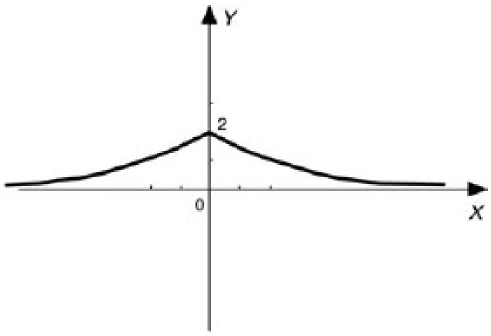
h) $y = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R} \ -\{4,-1\}$
- Simetrías y periodicidad: ni simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $\left(0, \dfrac{1}{2}\right), (1, 0)$
- Asíntotas: $x = -1; x = 4; y = x + 4$
- Extremos relativos: Máximo $(-3; -6,75)$
- Punto de inflexión: (0, 0)



i) $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$

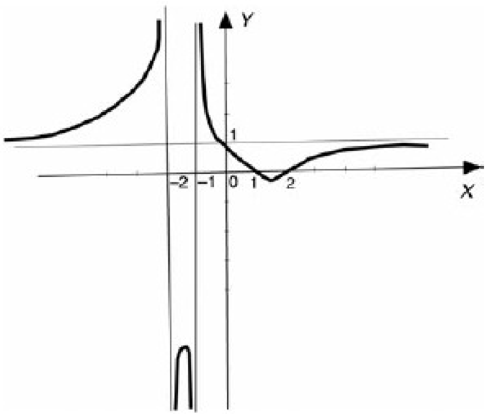
- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: simétrica respecto a OY y no periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, 2)$
- Asíntotas: $y = 0$
- Extremos relativos: Máximo $(0,\ 2)$
- Intervalos de signo constante: F es positiva en todo su dominio.



j) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R} - \{-1, -2\}$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,1), (1,0), (2,0)$
- Asíntotas: $x = -1; x = -2; y = 1$
- Extremos relativos: Máximo $(-\sqrt{2}, -34)$ mínimo $(\sqrt{2}; -0{,}03)$
- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty)$
f es positiva en $(-2, -1) \cup (1, 2)$.



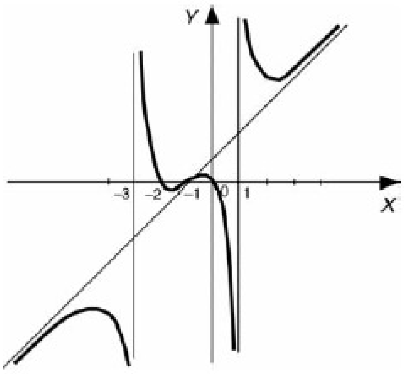
k) $y=\dfrac{(x+1)(x+2)x}{(x-1)(x+3)}$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R} - \{1,-3\}$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica, ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)(-1,0)(-2,0)$
- Asíntotas: $x=-1; x=-3; y=x+1$ La curva corta a la asíntota oblicua en (-1,0)
- Extremos relativos:

Máximo $(-4,25;-4,74)$ y $(0,11;0,38)$ mínimo $(-1,63;-0,11)$ y $(2,25;4,74)$

- Intervalos de signo constante:

  f es negativa en $(-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup (0, 1)$
  f es positiva en $(-3, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, +\infty)$



l) $y=\dfrac{x^3-4x}{x^2-4}$ esta función coincide con la función y = x en todos los números reales ya que:

$$\frac{x^3-4x}{x^2-4} = \frac{x(x^2-4)}{x^2-4} = x$$

En x = 2 se tiene:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-4x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} x = 2$$

En x = - 2 se tiene:

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3-4x}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} x = -2.$$

La gráfica es la recta bisectriz del primero y tercer cuadrante.

6. La función queda del siguiente modo:

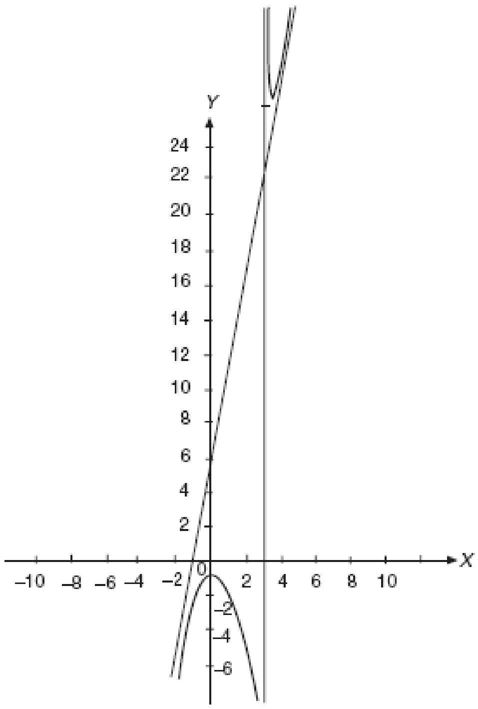
La determinación del valor k se realiza a través del límite:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-2x]=6\Leftrightarrow\lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{2x^2+1}{x-k}-2x\right]=$$
$$6\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{2kx+1}{x-k}=6\Leftrightarrow 2k=6\Leftrightarrow k=3.$$

Sea la función $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x-3}$

- Dominio: $Dom\, f=\mathbb{R}-\{-3\}$
- No tiene simetrías.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,-1/3)$
- Asíntotas: $x=3;\ y=2x+6$
- Extremos relativos:
  Máximo $(-0,08;-0,33)$ y $(0,11;0,38)$ mínimo $(6,08;-24,34)$



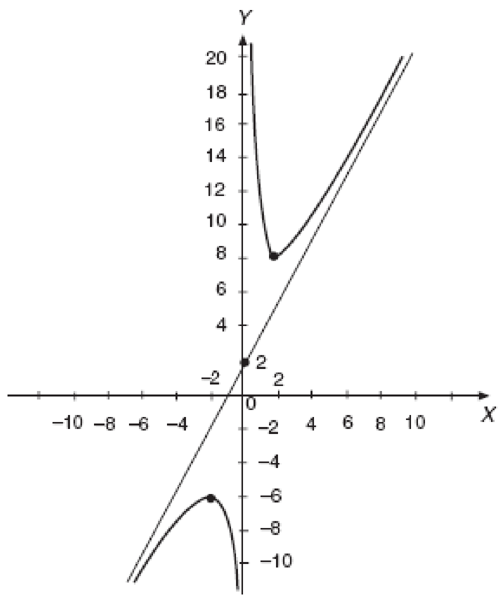
7. Queda:

a) La función debe cumplir: $f(-2)=-6$ y $f'(-2)=0$. Imponiendo las condiciones obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} -2a+b=-2 \\ a \qquad\ \ =2 \end{cases}$$ cuya solución es $a=2, b=2$

b) La función resultante es $f(x)=2x+2+\dfrac{8}{x}$ o $f(x)=\dfrac{2x^2+2x+8}{x}$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R} -\{0\}$
- No tiene simetrías.
- Cortes con los ejes no tiene.
- Asíntotas: $x=0; y=2x+2$
- Extremos relativos: Máximo $(-2,-6)$ mínimo $(2, 10)$



PÁGINA 335

■ 8. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = +\sqrt{x^2 - 1}$

b) $y = \pm x\sqrt{\dfrac{x-1}{4x-1}}$

c) $y = \left[\sqrt[3]{x}\right]^2$

d) $y = \pm\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}$

e) $y = -\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}$

f) $y^2 = \dfrac{x}{3-x}$

■ 9. Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \ln(x-2)$

b) $y = \ln(x^2 - 5x + 4)$

c) $y = \ln\sqrt{x^2-1}$

d) $y = x^2 \cdot e^x$

e) $y = e^{1/x}$

f) $y = \dfrac{\ln x}{x}$

g) $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

h) $y = x^2 \cdot e^{-x}$

i) $y = x \cdot e^x$

j) $y = \ln|x+1|$

k) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

l) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

■ 10. Calcula las constantes a y b para que las gráficas de las funciones $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ y $g(x) = a\ln x + b$ se corten en el punto $\left(e^2, \dfrac{2}{e^2}\right)$ y tengan en él la misma recta tangente. Realiza la representación gráfica de las funciones resultantes.

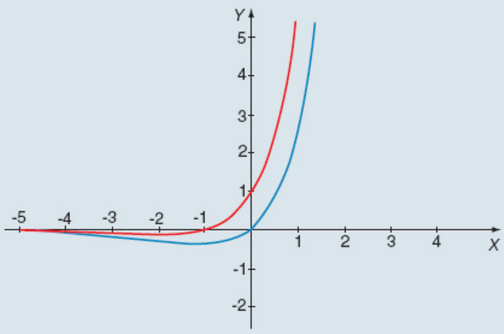
■ 11. A partir de la gráfica de la función $f(x) = \ln x$, dibuja de forma razonada las gráficas de las funciones:

a) $f(x) = \ln|x|$

b) $f(x) = |\ln x|$

c) $f(x) = \ln(x-2)$

■ 12. En la figura siguiente se muestran las gráficas de dos funciones: la de la función $f(x) = x\,e^x$ y la de su derivada $f'(x)$.



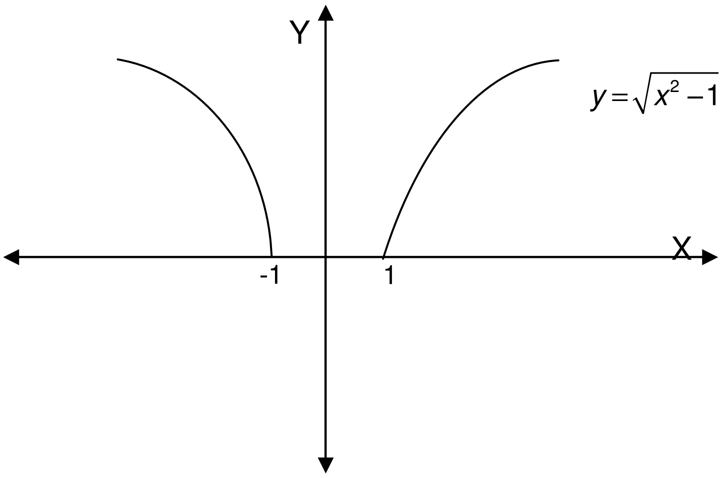
Distingue una de la otra, justificando razonadamente el porqué, y halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad, así como los puntos donde hay máximos, mínimos e inflexiones de $y = f(x)$.

■ 13. Demuestra que la ecuación $x^4 + 4e^x \cdot (x-1) = 0$ tiene únicamente dos soluciones. ¿Podrías decir entre qué dos números consecutivos está cada una de las soluciones? Utiliza para ello las gráficas de las funciones: $f(x) = e^x$ y $g(x) = \dfrac{-x^4}{4(x-1)}$.

8. La solución en cada caso:

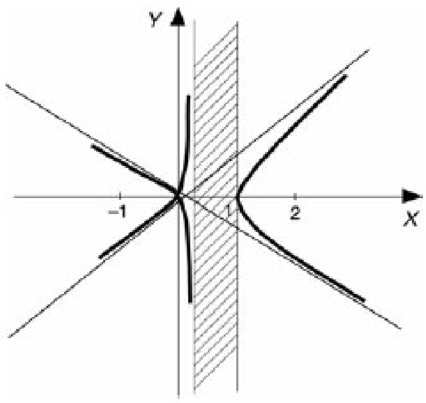
a) $y = +\sqrt{x^2 - 1}$

- Dominio: $Dom\,f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto al eje OY y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(1,0)(-1,0)$
- Asíntotas: $y = x; y = -x$
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante: f es positiva en todo su dominio.



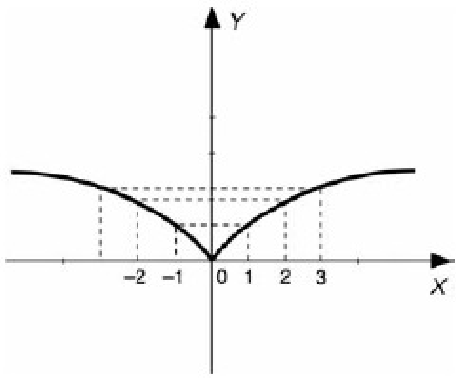
b) $y = \pm x\sqrt{\dfrac{x-1}{4x-1}}$

- Dominio: $Dom\,f = \left(-\infty, \dfrac{1}{4}\right) \cup [1, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0), (1,0)$
- Asíntotas: $x = \dfrac{1}{4}; y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{16}; y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{16}$
- Extremos relativos: no tiene.



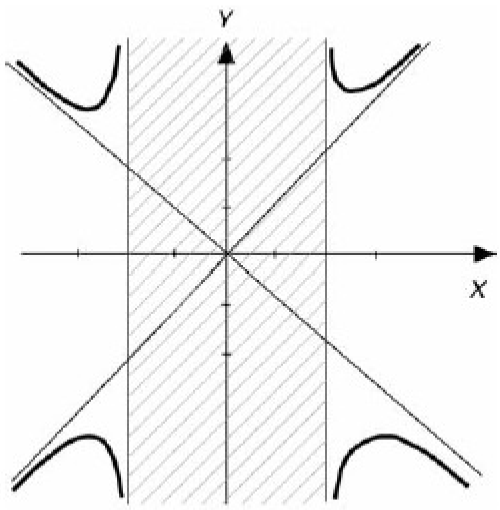
c) $y=[\sqrt[3]{x}]^2$

- Dominio: $Dom\,f=\mathbb{R}$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto a OY y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$
- Asíntotas: no tiene
- Extremos relativos: no tiene
- Intervalos de signo constante: f es positiva en todo su dominio.



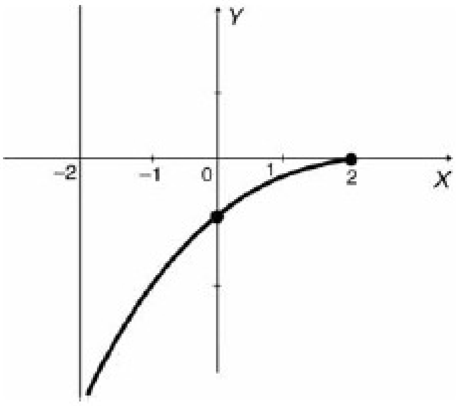
d) $y=\pm\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2\ 4}}=f(x)$

- Dominio: $Dom\,f=(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$
- Simetrías y periodicidad: es simétrica respecto a OY y no es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$ no existe.
- Asíntotas: $x=\pm 2; x=-2; y=x; y=-x$
- Extremos relativos: Mínimos $(\sqrt{8},4)(-\sqrt{8},4)$ Máximos $(\sqrt{8},-4)(-\sqrt{8},-4)$



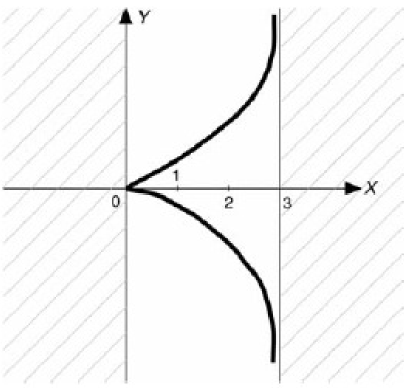
e) $y=-\sqrt{\dfrac{2-x}{2+x}}=f(x)$

- Dominio: $Dom\, f=\ (-2,2)$
- Simetrías y periodicidad: no es simétrica ni es periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,-1)(2,0)$
- Asíntotas: $x=-2$
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalo de signo constante: f es negativa en todo su dominio.



f) $y=\dfrac{x}{3-x} \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{\dfrac{x}{3-x}}=f(x)$

- Dominio: $Dom\, f=\ [0,3)$
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$
- Asíntotas: $x=3$
- Extremos relativos: no tiene.

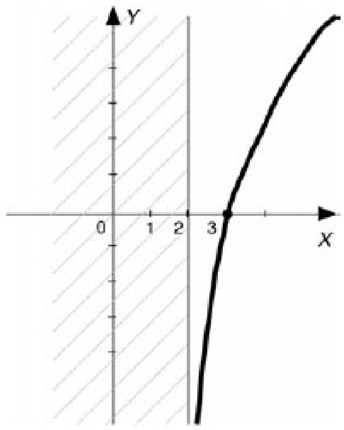


9. Las gráficas quedan:

a) $y = \ln(x-2)$

- Dominio: $Dom\, f = (2, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: ni simétrica ni periódica.
- Puntos de corte con los ejes: $(3, 0)$
- Asíntotas: $x = 2$
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:

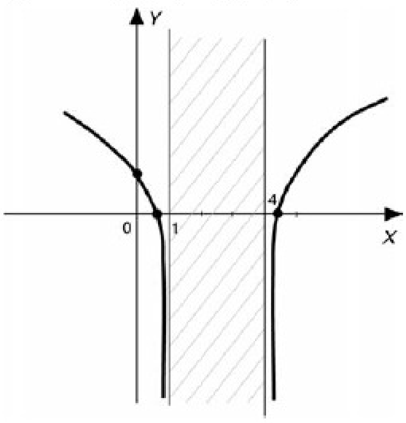
f es positiva en $(3, +\infty)$
f es negativa en $(2, 3)$



b) $y = \ln(x^2 - 5x + 4)$

- Dominio: $Dom\, f = (-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$
- Simetrías y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(0, \ln 4); (4,2; 0); (0,8; 0)$
- Asíntotas: $x = 1$, pues $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln(x^2 - 5x + 4) = -\infty$
  $x = 4$ pues $\lim\limits_{x \to 4^+} \ln(x^2 - 5x + 4) = -\infty$
- Extremos relativos: no tiene; Intervalos de signo constante:

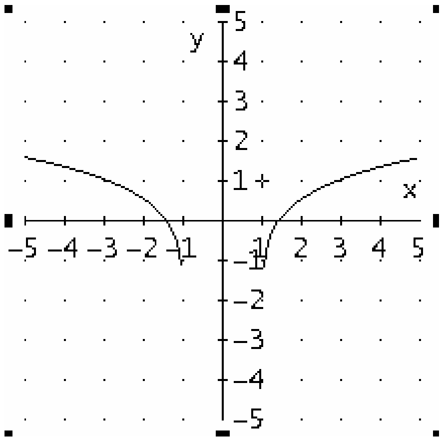
f es positiva en $(-\infty; 0,8) \cup (4,2; +\infty)$
f es negativa en $(0,8; 1) \cup (4; 4,2)$



10. Tiene que cumplirse $g(e^2) = \frac{2}{e^2}$ y $g'(e^2) = -\frac{1}{e^4}$. Las condiciones anteriores nos llevan al

c) $y=\ln\sqrt{x^2-1}$

- Dominio $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$
- Simétrica respecto al eje OY
- Puntos de corte con los ejes $(\sqrt{2},0)$ $(-\sqrt{2},0)$
- Asíntotas las rectas x = 1 y x = -1
- Extremos relativos no tiene
- Monotonía: Creciente en $(1,+\infty)$ y Decreciente en $(-\infty,-1)$
- Intervalos de signo constante: f(x) es positiva en $(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$ y f(x) es negativa en $(-\sqrt{2},-1)\cup(1,\sqrt{2})$

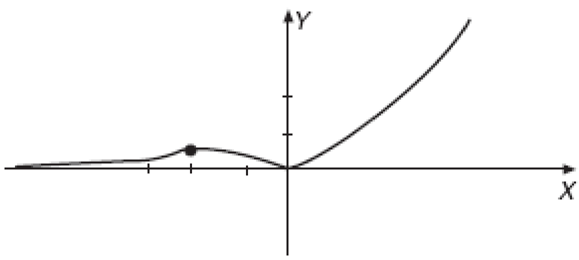


d) $y=x^2e^x$

- Dominio: $Dom\, f=\mathbb{R}$
- No tiene simetrías.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$
- Asíntotas : y = 0, al ser :

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}} = \quad = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}} = 0.$$

- Extremos relativos: máximo $(-2;0{,}54)$ mínimo $(0,0)$



e) $y = e^{\frac{1}{x}}$

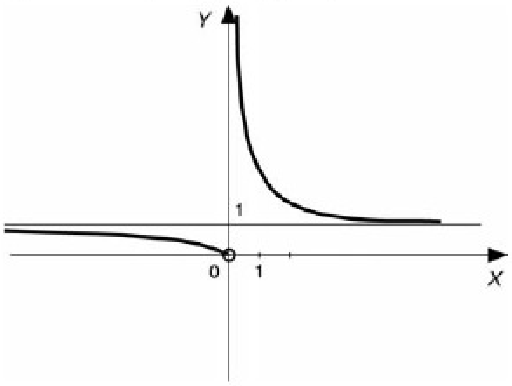
- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R} - \{0\}$
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: no tiene.
- Asíntotas :

x = 0 pues $\lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty.$

y = 1 pues $\lim_{x \to -\infty} e^{1/x} = 1$ y $\lim_{x \to +\infty} e^{1/x} = +1.$

- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$



f) $y = \frac{\ln x}{x}$

- Dominio: $Dom\, f = (0, +\infty)$
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(1,0)$
- Asíntotas :

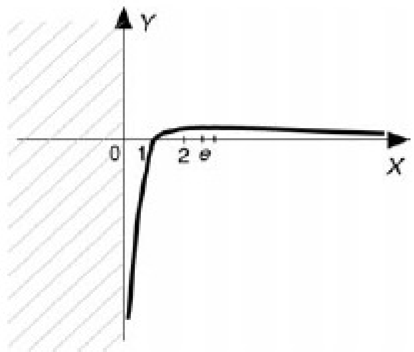
x = 0 pues $\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

y = 0 pues $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

- Extremos relativos: máximo $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(0, 1)$
f es positiva en $(1, +\infty)$



g) $y = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

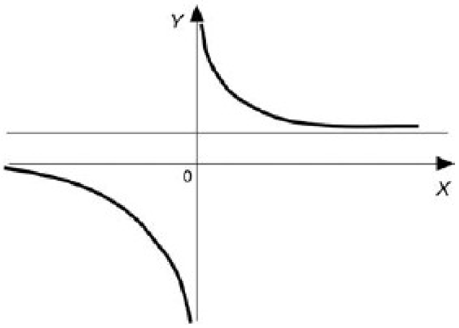
- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R} - \{0\}$
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(1,0)$
- Asíntotas :

$$y = 1, \text{ pues } \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 1$$

$$y = 0, \text{ pues } \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0$$

- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(-\infty, 0)$
f es positiva en $(0, +\infty)$

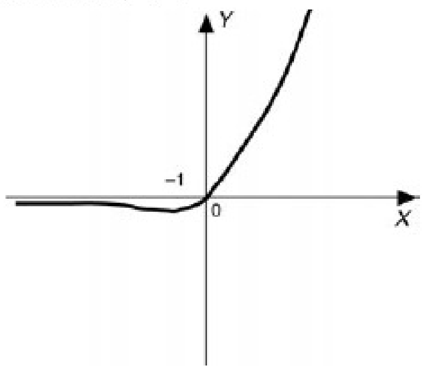


h) $y = x^2 e^{-x}$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R}$
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$
- Asíntotas : $y = 0$, pues $\lim_{x \to -\infty} x \cdot e^x = 0$.
- Extremos relativos: mínimo $\left(-1, -\dfrac{1}{e}\right)$
- Intervalos de signo constante:

- Intervalos de signo constante:

f es negativa en $(-\infty, 0)$
f es positiva en $(0, +\infty)$

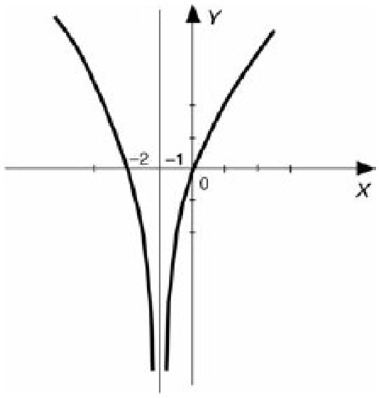


j) $y = \ln|x+1|$ que es de la forma $f(x) = \begin{cases} ln(x+1) & \text{si } x > -1 \\ ln(-x-1) & \text{si } x < -1 \end{cases}$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R} - \{-1\}$
-
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)(-2,0)$
- Asíntotas : x = - 1
- Extremos relativos: no tiene.
- Intervalos de signo constante:

•Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
f es negativa en $(-2, -1) \cup (-1, 0)$



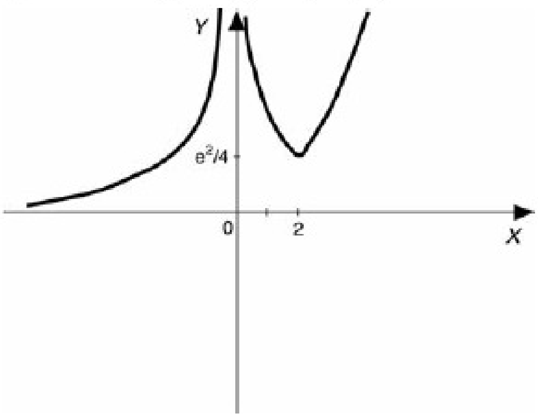
k) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R} - \{0\}$
- Simetría y periodicidad: no tiene.
- Puntos de corte con los ejes: no tiene.
- Asíntotas : x = 0

$y = 0$, pues $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = 0$

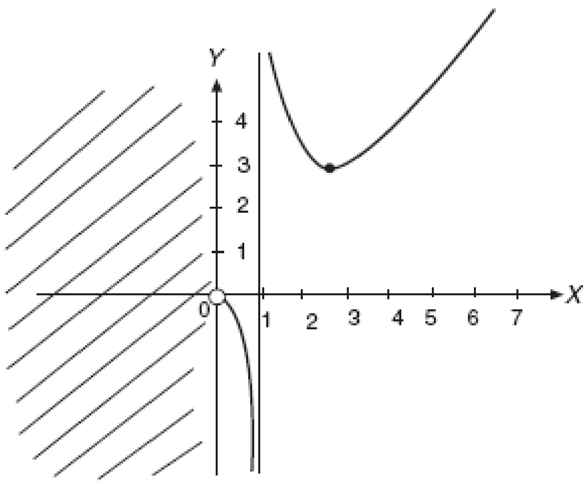
- Extremos relativos: mínimo $\left(2, \dfrac{e^2}{4}\right)$
- Intervalos de signo constante:

f es positiva en $(0, +\infty)$ y en $(-\infty, 0)$



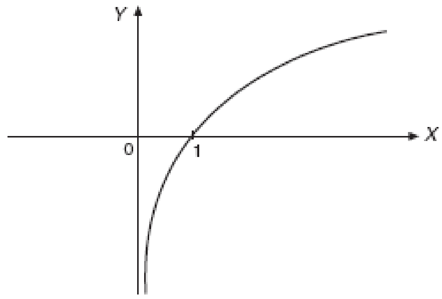
l) $y=\dfrac{x}{\ln x}=f(x)$

- Dominio: $Dom\, f=(0,+\infty)-\{1\}$
- No tiene simetrías.
- Puntos de corte con los ejes: $(0,0)$
- Asíntotas : x = 1
- Extremos relativos: mínimo (e,e)

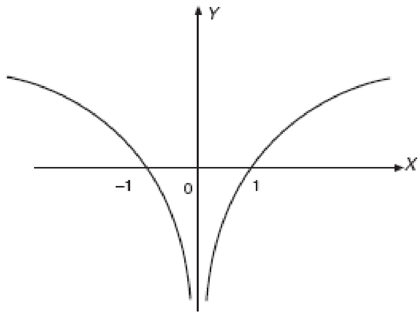


11. Las gráficas son:

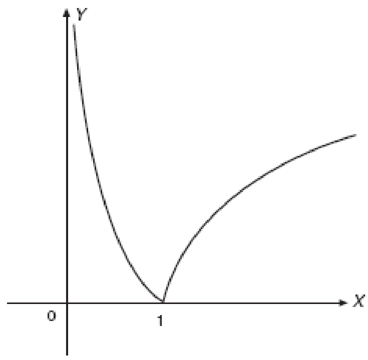
Todas parten de la siguiente gráfica $f(x)=\ln x$



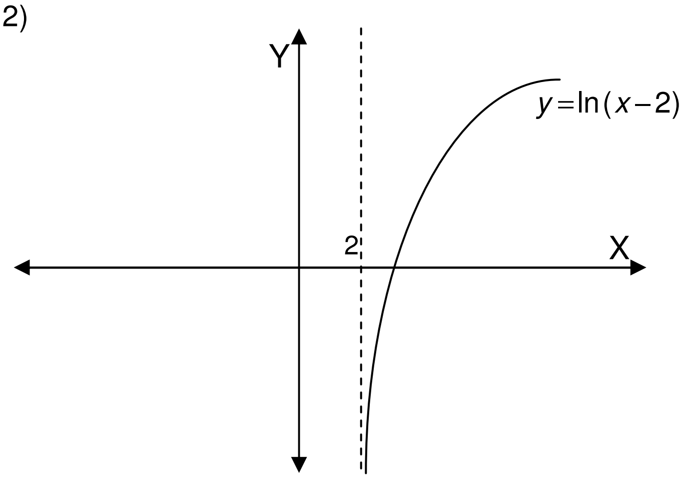
a) $f(x)=\ln|x|$



b) $f(x)=|\ln x|$



c) $f(x)=\ln(x-2)$



12. La función y su función derivada son:

$f(x) = xe^x$ y $f'(x) = (x+1)\,e^x$

La grafica de $y = f(x)$ es la que pasa por el origen.

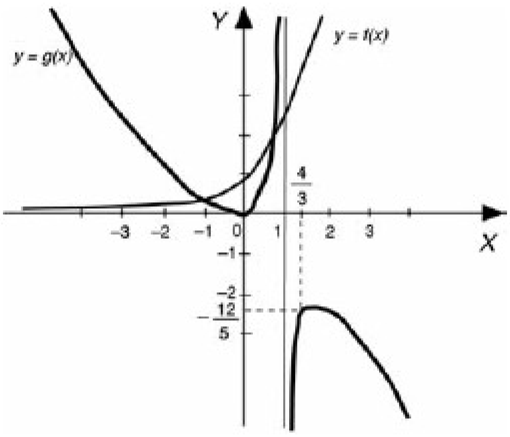
Las características pedidas en el enunciado son:

- Es creciente en $(-1, +\infty)$
- Es decreciente en $(-\infty, -1)$
- Tiene un mínimo relativo en $(-1, -\frac{1}{e})$
- Es cóncava hacia las y positivas en $(-2 + \infty)$
- Es cóncava hacia las y negativas en $(-\infty, -2)$
- Tiene un punto de inflexión en $\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$

13. La ecuación dada $x^4 + 4e^x \cdot (x-1) = 0$ se puede transformar en: $e^x = \frac{-x^4}{4(x-1)}$.

Por tanto, las soluciones de esta ecuación serán los valores de las abscisas de los puntos de intersección de las curvas:

$f(x) = y = e^x; g(x) = y = \frac{-x^4}{4(x-1)}$ +la representamos gráficamente :



A partir de la representación grafica observamos que las funciones f(x) y g(x) se cortan en dos puntos; uno de ellos entre (- 2, - 1) y otro (0, 1).

PÁGINA 336

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

■ 14. La curva $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ corta al eje de abscisas en $x = 3$ y tiene un punto de inflexión en (2/3, 1/9). Halla a, b y c; y representa gráficamente la función obtenida.

■ 15. Esboza la gráfica de la función: $\begin{cases} \ln(1+x^2) & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$.

■ 16. Sea la función $f(x) = e^x + \ln x$.

a) Estudia sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas.

b) Haz una gráfica aproximada de esta función.

■ 17. Halla el dominio de definición, los límites cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, los ceros, las asíntotas y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{8x^2 + 1}$$

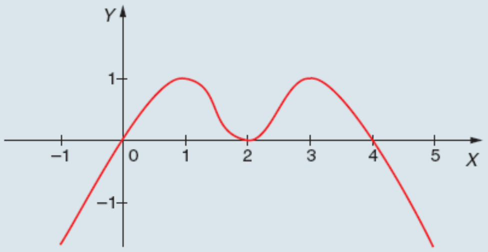
Dibuja luego un esquema sencillo de su gráfica.

■ 18. Representa gráficamente la función $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$, calculando, en su caso, el dominio de definición, máximos, mínimos, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de corte con los ejes.

■ 19. Dibuja la región del plano comprendida entre las curvas:

$$y = \sqrt{16 - x^2} \qquad x^2 = 12(y - 1)$$

■ 20. Se sabe que la gráfica de la derivada $f'(x)$ de una función en el intervalo abierto (–1, 5) es la que muestra el dibujo.



a) Sabiendo que $f(0) = 0$, dibuja de manera aproximada la gráfica de la función $f(x)$ en el intervalo (–1, 5).

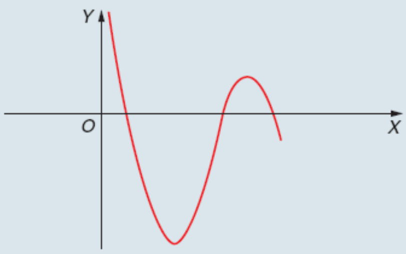
b) Indica en esta gráfica los máximos, los mínimos y los puntos de inflexión.

■ 21. El esquema adjunto representa el gráfico de la función $y = f(x)$:

a) Haz otro esquema que represente el gráfico de la función $y = -f(x)$.

b) Haz otro esquema que represente conjuntamente las gráficas de $y = f(x)$ e $y = 2f(x)$.

Explica el fundamento para la construcción de estos esquemas.



14. La ecuacion de la grafica debe cumplir $f(3)=0, f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{9}$ y $f''\left(\frac{2}{3}\right)=0$.

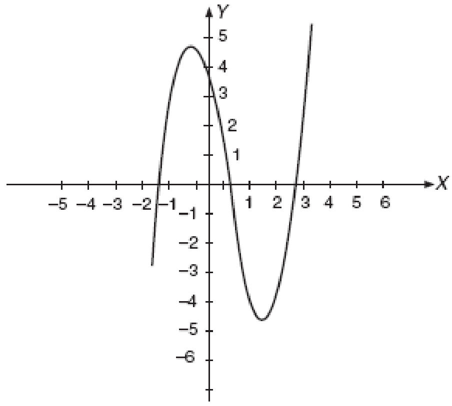
Las condiciones anteriores nos llevan al sistema:

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = -27 \\ 12a + 18b + 27c = -5 \\ 2a = -4 \end{cases}$$ cuya solución es $a=-2, b=-\frac{37}{9}, c=\frac{10}{3}$.

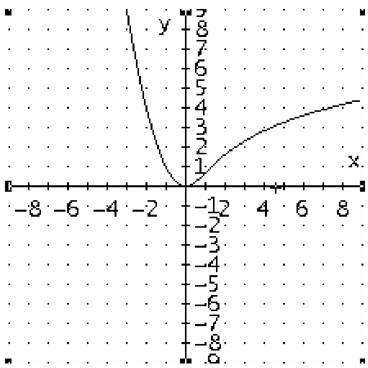
La función es $f(x)=x^3-2x^2-\frac{37}{9}x+\frac{10}{3}$ y su grafica tiene las siguientes características:

- Corta al eje OX en los puntos: $(-1,65;0);(0,65;0)\ y\ (3,0)$
- Corta al eje OY en el punto $(0;3,3)$
- Tiene un máximo relativo en $(0,69;4,89)$ y un mínimo relativo en $(2,02;-4,89)$
- Tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{9}\right)$.

La grafica puede verse en el dibujo.



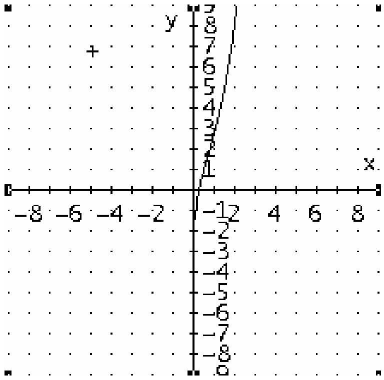
15. La gráfica queda:



16. La solución es:

a) Creciente (0, +∞)
Asíntotas x = 0

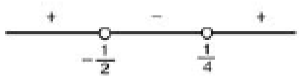
b) La gráfica es



17. Para la función queda:

- Dominio: $Dom\, f = \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - x}{8x^2 + 1} = \dfrac{1}{8} \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x}{8x^2 + 1} = \dfrac{1}{8}$
- Puntos de corte con los ejes o ceros : $(0,0)(1,0)$
- Asíntotas:
  Verticales: no tiene.
  Horizontales: $y = \dfrac{1}{8}$

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento:
  $f'(x) = \dfrac{8x^2 + 2x - 1}{(8x^2 + 1)^2}$
  Estudiamos el signo de $f'(x)$



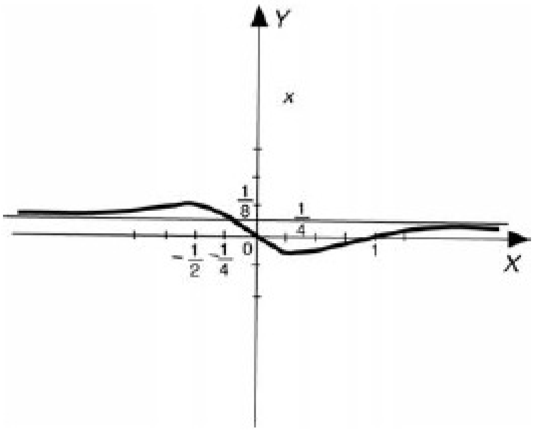
f es creciente en $\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4}, +\infty\right)$

f es decreciente en $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$

- Extremos relativos:

  f tiene un máximo realtivo en $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$ y un mínimo relativo en $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{8}\right)$.

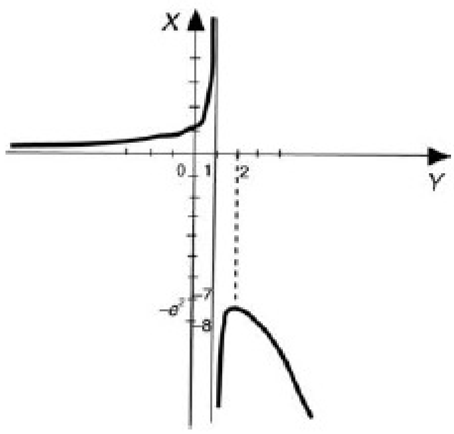
  Su grafica es:



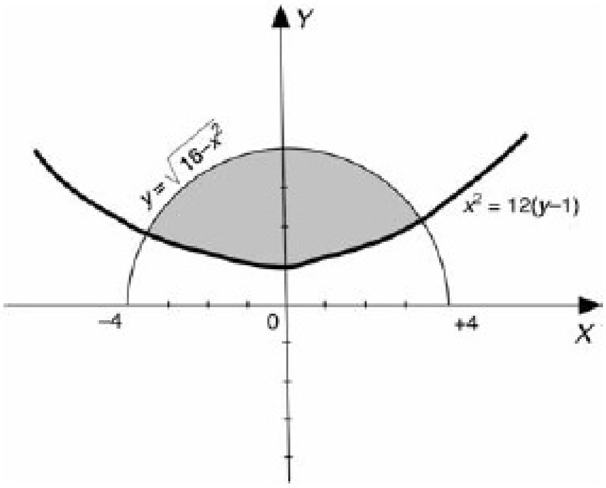
18. Queda:

- Dominio: $Dom\,f = \mathbb{R} - \{1\}$
- Puntos de corte con los ejes: $(1,0)$
- Asíntotas: x = 1
-
- y = 0, pues $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{1-x} = 0.$

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento:
  Crecimiento $(-\infty,1)\cup(1,2)$ y decrecimiento $(2,+\infty)$
- Intervalos de signo constante:
  f es positiva en $(-\infty, 1)$
  f es negativa en $(1, +\infty)$



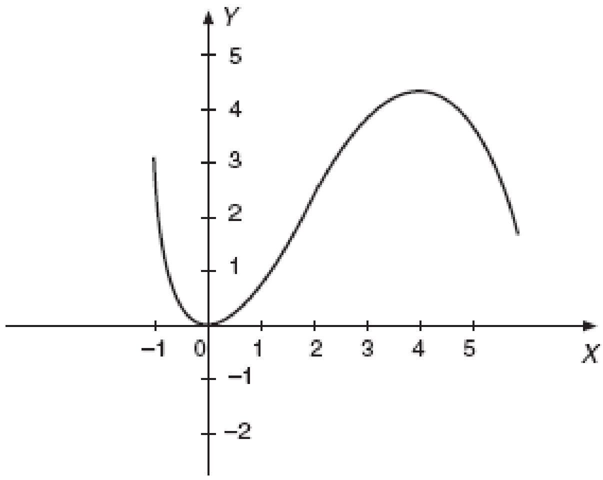
19. Queda:



La zona rayada es la región de plano comprendida entre curvas. Se cortan en los puntos $(-3,8;1,3)$ y $(3,8;1,3)$

20. Las dos funciones quedan:

a) Una grafica aproximada de la función $y=f(x)$ es



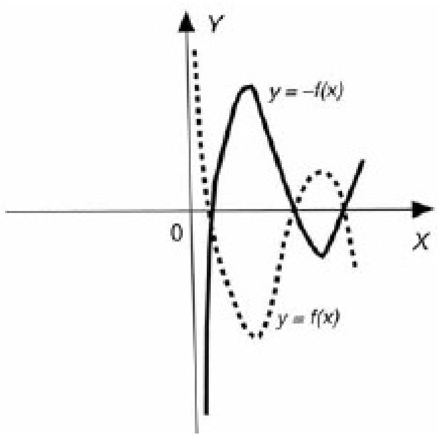
b) La gráfica tiene un minimo relativo en (0, 0) ya que su función derivada se anula y cambia de signo.

Presenta un máximo relativo para x = 4 por la misma razón anterior.

Tiene un punto de inflexión en x = 2 ya que la función derivada se anula y no cambia de signo.

21. La solución queda:

a) El gráfico de la función $y=-f(x)$ se obtiene a aplicar al grafico de la función $y=f(x)$ una simetría del eje de abscisas.



b) El gráfico de la función $y=2\cdot f(x)$ se obtiene duplicando las coordenadas correspondientes a cada valor de la abscisa en la grafica de la función $y=f(x)$.