Unidad 12 – Aplicaciones de las derivadas

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Estudia la monotonía de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 4x - x^2$
   b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$
   c) $f(x) = -5x + 3$
   d) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+3}$
   e) $f(x) = \dfrac{2}{x}$
   f) $f(x) = 2^{-x}$
   g) $f(x) = e^{3x}$
   h) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

2. Halla los extremos relativos de las siguientes funciones:

   a) $y = -x^2 + 6x - 5$
   b) $y = \dfrac{x}{\ln x}$
   c) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$
   d) $y = x(x-1)^2$
   e) $y = \dfrac{2}{1+x^2}$
   f) $y = x \cdot \ln x$
   g) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 12$
   h) $y = \dfrac{8x}{x^2+2}$
   i) $y = x^2 \cdot e^x$

3. Halla el valor de a para que la función $f(x) = x^2 - 6x + a$ tenga un mínimo de valor -1.

4. Halla b y c para que la curva $y = -x^2 + bx + c$ tenga un máximo relativo en el punto (0, 4).

5. Halla a, b y c de manera que la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ tenga un mínimo relativo en el punto (6, –12) y se anule para $x = 8$.

6. En la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, halla a, b y c para que esta función pase por el punto (1, 0), tenga un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 0$.

7. Demuestra que la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene siempre extremo relativo en su vértice, siendo máximo si a es negativo y mínimo si a es positivo.

8. Estudia el crecimiento de la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{e^x}$. Determina, si existen, sus máximos y mínimos relativos.

9. Estudia el tipo de concavidad y la existencia o no de puntos de inflexión en las siguientes funciones:

   a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2$
   b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
   c) $f(x) = \dfrac{2}{x}$
   d) $f(x) = x \cdot e^{-2x}$
   e) $f(x) = x^4 - 12x^2 + 8$
   f) $f(x) = \ln (x + 4)$

10. Halla los máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \text{sen } 2x$$

11. Halla el valor de k que hace que la función $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + k}$ tenga un extremo relativo único. ¿Se trata de un máximo o un mínimo relativo?

12. Dada la función $f(x) = x(x-1)^3$:

   a) Estudia su monotonía.
   b) Halla sus extremos relativos.
   c) Estudia el tipo de concavidad.
   d) Determina, si existen, los puntos de inflexión.

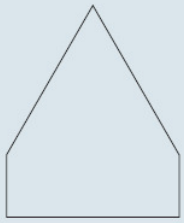
PÁGINA 309

■ 13. Descompón el número 48 en dos sumandos tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo sea mínimo.

■ 14. Halla el número positivo cuya suma, con 4 veces su recíproco, sea mínima.

■ 15. Halla las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 20 cm de radio.

■ 16. Se considera una ventana rectangular en la que el lado superior ha sido sustituido por un triángulo equilátero, como indica la figura. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 6,6 m, halla sus dimensiones para que su superficie sea máxima.



■ 17. De todos los rectángulos de diagonal igual a 1, halla las dimensiones del de área máxima.

■ 18. Se quieren construir botes de enlatar de forma cilíndrica con 10 litros de capacidad. Calcula sus dimensiones si se desea que el gasto de material sea mínimo.

■ 19. Queremos diseñar un envase cuya forma sea un prisma regular de base cuadrada y capacidad 80 cm³. Para la tapa y la superficie lateral usamos un determinado material, pero para la base debemos emplear un material un 50 % más caro.

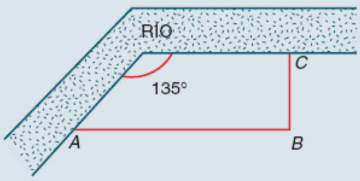
Halla las dimensiones de este envase para que su precio sea el menor posible.

■ 20. Halla las dimensiones que hacen mínimo el coste de un contenedor que tiene forma de ortoedro sabiendo que el volumen ha de ser de 9 m³, su altura 1 m y el coste de construcción por m² es de 30 euros para la base, 35 euros para la tapa y 20 euros para cada pared lateral.

■ 21. Una hoja de papel debe contener 18 cm² de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtén, razonadamente, las dimensiones que minimizan la superficie de papel.

■ 22. Divide un segmento de 6 cm de longitud en dos partes tales que sea mínima la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre ellas.

■ 23. Se desea construir un jardín, limitado en dos lados por un río que forma un codo de 135° y los otros dos lados por una valla *ABC* de 1,2 km de longitud. Halla las dimensiones del jardín de área máxima.



■ 24. En un jardín existe un paseo cerrado que consta de media circunferencia de radio 10 m y de su diámetro correspondiente. En el interior de la figura anterior se va a instalar un parterre rectangular, uno de cuyos lados está sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte curva. El parterre se plantará de camelias, que ocupan 0,25 m² cada una. ¿Cuál es el número máximo de plantas que pueden ubicarse?

PÁGINA 310

ACTIVIDADES FINALES

25. Comprueba que la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ verifica el teorema de Rolle en el intervalo [0, 1].

26. Estudia la derivabilidad de la función $1 - \sqrt[3]{x^2}$ y analiza si la función verifica las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [–1, 1].

27. Consideramos la función $f(x) = e^x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^7 \operatorname{sen}^3 x$. Prueba que existe, al menos, un número real x_0, con $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$ tal que $f'(x_0) = 0$.

28. Se considera la función $f(x) = x^{2/3}$. ¿Existe un intervalo $[a, b]$ en el que se pueda aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)$? Justifica la respuesta.

29. Consideramos la función f definida en el intervalo cerrado [0, 2] y dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x + 1 & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Encuentra los valores de a, b y c para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en dicho intervalo. Halla el valor o los valores de x a los que se refiere el teorema.

30. Halla el valor de a para el cual se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + ax & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 1\right]$. Encuentra el valor de c que indica el teorema.

31. Demuestra que la ecuación $x^3 + x^2 + x = 2$ tiene una única solución en (–1, 1).

32. Prueba que las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^{-x}$, se cortan en un único punto en el intervalo (0, 1).

33. Aplica el teorema de Cauchy a las siguientes funciones en los intervalos indicados:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$ en [–1, 1].

b) $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = e^x + 2$ en [0, 2].

34. Estudia si se puede aplicar el teorema de Lagrange a las siguientes funciones en los intervalos dados y, cuando sea posible, halla el valor de c que da el teorema:

a) $f(x) = 2x^2 - 7x + 10$ en [2, 5].

b) $f(x) = \sqrt[5]{x^2} - 2$ en [–1, 1].

35. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } -2 \le x \le -1 \\ (x^2 - 3)/2 & \text{si } -1 < x \le 0 \end{cases}$:

a) Prueba que $f(x)$ cumple las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo [–2, 0].

b) Determina los puntos cuya existencia afirma dicho teorema.

36. Halla los valores de $x \in [0, 2\pi]$ en los que la función $f(x) = e^x \cdot \cos x$ presenta extremos relativos y/o puntos de inflexión.

PÁGINA 311

37. Halla a y b para que se pueda aplicar el teorema de Lagrange a la siguiente función, en el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x-1)^2 + a & \text{si } 1 < x \le 2 \\ bx^2 - 6x & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

38. Halla el punto de la gráfica de la función $f(x) = \ln x - 1$ en el que la recta tangente sea paralela a la secante que pasa por los puntos $A(1, -1)$ y $B(e, 0)$.

39. Como aplicación del teorema de Lagrange demuestra que si una función $y = f(x)$ es continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) = 0$ en todos los puntos del intervalo (a, b), entonces la función $y = f(x)$ es constante en el intervalo $[a, b]$.

40. Sea f una función continua y derivable tal que $f(0) = 3$. Calcula cuánto tiene que valer $f(5)$ para asegurar que en $[0, 5]$ existe un c tal que $f'(c) = 8$.

41. Demuestra que $e^x \ge 1 + x$ con $x \ge 0$.

42. Prueba que si $x > 0$, se cumple: $\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$.

43. Haciendo uso del teorema de Lagrange demuestra que $\cos b - \cos a < b - a$.

44. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} [x^2 - 2x]^{x^2}$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right]$

d) $\lim\limits_{x \to \pi^+} \left[\frac{2}{\operatorname{sen} x} - \frac{2}{\pi - x}\right]$

e) $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 - 2x)\ln x$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^x$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left[\sqrt[x]{b} - 1\right]$

h) $\lim\limits_{x \to 1^+} [x - 1] \cdot \operatorname{tg}\left[\frac{\pi x}{2}\right]$

i) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\ln(2 - e^x)}$

j) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\operatorname{tg} x}$

k) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}$

l) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi^+}{2}} [\operatorname{tg} x]^{\cos x}$

m) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{a^x + b^x}{2}\right]^{\frac{1}{x}}$, $a > 1$ y $b > 1$

n) $\lim\limits_{x \to 1^+} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x - 1}\right]$

ñ) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x + x)^{\frac{2}{\operatorname{sen} x}}$

45. Halla a y b de modo que se cumpla la siguiente igualdad:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{bx^3 + ax} = 4$$

46. Halla b, c y d en la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ para que tenga un punto de inflexión en $(1, -3)$ y la recta tangente en el punto de abscisa 0 tenga por pendiente 3.

PÁGINA 312

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

47. Estudia el dominio de la función $f(x) = \dfrac{\ln x + 2}{x^2}$ y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

48. Estudia los intervalos de monotonía y los extremos de la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Como aplicación, prueba que si $x > 0$, entonces $x^e \le e^x$.

49. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos de $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$ en el intervalo $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$.

50. Estudia la concavidad de la función $f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 3)$.

51. Determina un punto P de la curva $y = 12 - x^2$, con $x > 0$, de forma que el área del rectángulo determinado por los ejes y las rectas paralelas a ellos que pasan por P sea máxima.

52. Halla la ecuación de una recta que pase por el punto (3, 2) y corte los ejes coordenados determinando en el primer cuadrante un triángulo de área mínima.

53. Halla los puntos de la curva $y^2 = 8x$ cuya distancia al punto (6, 0) sea mínima.

54. ¿Cuál es el volumen máximo que puede tener un cono circular recto de 1 metro de generatriz? (Recuerda que el volumen de un cono es un tercio del área de la base por la altura).

55. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\frac{\operatorname{cosec} x}{2}}$

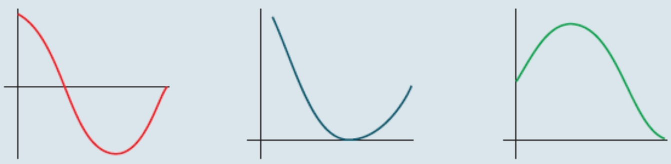
d) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{e^x - 1}\right)$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^{3x} - 5x)^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2 - 3x + 2}$

56. Las gráficas que se muestran a continuación corresponden a una función f, a su derivada f' y a otra función g. Todas ellas están definidas en un mismo intervalo. Desafortunadamente, al componer el dibujo (en el que se muestran también los ejes), las gráficas han sido colocadas al azar.

Identifica de forma razonada cuál de ellas corresponde a f, cuál a f' y cuál a g.



(*A*) (*B*) (*C*)

57. Prueba que la ecuación $x^3 - 2x^2 + 3x = 3$ admite una solución y sólo una en (1, 2).