Unidad 11 – Derivadas

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Calcula la tasa de variación media en el intervalo [2, 5] para las funciones:

$$f(x) = 7 - 2x \qquad g(x) = 4x^2 - 3x + 5 \qquad k(x) = \frac{3x}{x^2+1} \qquad t(x) = \sqrt{x+4}$$

2. Calcula, mediante la definición de derivada de una función en un punto, las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = (2x-1)^2$; $D\,f(2)$ b) $f(x) = \sqrt{x+3}$; $f'(6)$ c) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$; $D\,f(0)$

3. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones en $x = 0$:

a) $f(x) = |x|$ b) $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{sen} x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

4. ¿Para qué valores de a y b cada una de las siguientes funciones es continua y derivable?

a) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 20x^2 + bx + a & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{ax+b} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{x}{2\sqrt{2}} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

5. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = 2x^3 + x$ en el origen de coordenadas.

6. Halla los puntos en los cuales la tangente a la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 30x - 6$ es paralela a la recta de ecuación $y = 6x - 5$.

7. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la curva $xy^2 - 5y = 6$ en el punto (1, 6).

8. Dada la función $y = x^2 - 4x + 3$, encuentra un punto de su gráfica en el cual la recta tangente a ella sea paralela a la secante a la curva en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 4$.

9. Halla los valores de a y b para los cuales la recta tangente a la curva $y = x^2 + ax + b$ en el punto $P(3, 0)$ tenga de pendiente 2.

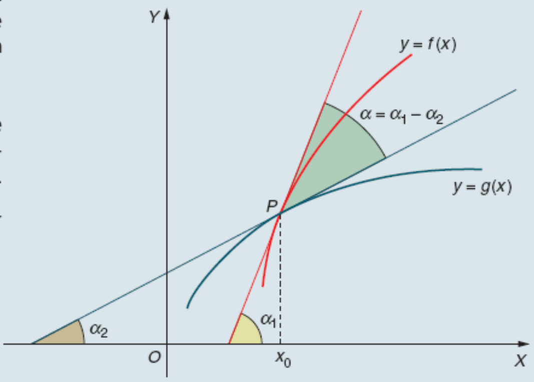
10. Encuentra la ecuación de la recta tangente a la función $f(x) = e^{3x}$ en un punto cualquiera $x = a$. Halla el valor de a para que dicha recta pase por el punto (exterior a la curva) $P(1, 0)$.

11. Llamamos ángulo de dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ que se cortan en un punto P de abscisa x_0 al menor de los ángulos α que forman sus respectivas tangentes en el punto P.

Halla el ángulo que forman los siguientes pares de curvas en todos sus puntos de corte:

a) $f(x) = x^2$
$g(x) = x + 2$

b) $f(x) = x^3 + x^2$
$g(x) = x + 1$



PÁGINA 283

12. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $D[x^2]$
b) $D[(3x)^{1/3}]$
c) $D[3^x \cdot \ln x]$
d) $D\left[\dfrac{2}{(x^3-3x^2)^6}\right]$
e) $D\left[\dfrac{e^x}{x}\right]$
f) $D[\text{sen } 4x]$
g) $D[x^3 \cdot x^4]$
h) $D[x \cdot 4^x]$
i) $D[(e^{2x}+3)^4]$
j) $D\left[\dfrac{1}{\sqrt{4-5x^2}}\right]$
k) $D\left[\dfrac{x}{e^x}\right]$
l) $D[\text{sen}^4 x]$
m) $D[(x^2-3)^5]$
n) $D[(x+1)^3 \cdot (x-1)^2]$
ñ) $D[\ln (2-3x^2)^4]$
o) $D\left[(4x+2)\cdot\sqrt{4x-2}\right]$
p) $D[x^2 \cdot 2^x \cdot a^{2x}]$
q) $D[\text{sen } x^4]$

13. Calcula las derivadas que se indican a continuación:

a) $D\left[\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^3\right]$
b) $D\left[\dfrac{\cos(x-1)}{\cos(x+1)}\right]$
c) $D[\ln \text{tg}^2 x]$
d) $D\left[\sqrt{\dfrac{1-\text{sen } x}{1+\text{sen } x}}\right]$
e) $D[\text{sen}\{\cos(\text{sen } x)\}]$
f) $D\left[\dfrac{x^3 \cdot 3^{2x}}{e^{2x}}\right]$
g) $D[\text{sen}^3 2x \cdot \cos^2 3x]$
h) $D[x^x]$
i) $D[\text{sen}^2 x^2]$
j) $D[x^2 + \text{sen } x]$
k) $D[\ln^2(\ln x)]$
l) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)\right]$
m) $D\left[\text{arctg}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\right]$
n) $D\left[\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]$
ñ) $D[\text{arctg}(\text{sen } x)]$
o) $D[x^{\ln x}]$
p) $D\left[\text{arcsen}\sqrt{x-1}\right]$
q) $D\left[\sqrt{\dfrac{1+7x}{1-7x}}\right]$
r) $D\left[(1-x)\sqrt{1+x^2}\right]$
s) $D\left[\text{arctg}\sqrt{x}\right]$
t) $D\left[\ln\left(\dfrac{1}{1+x}\right)+\dfrac{1}{1+x}\right]$
u) $D\left[\ln\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)\right]$
v) $D[\text{arcsen}(\text{tg } x)]$
w) $D[(\text{sen } x)^{2\cos x}]$

14. Calcula las derivadas sucesivas que se indican:

a) $f(x) = 2^{3x}$ — $f'''(x)$
b) $g(x) = \dfrac{2}{x-1}$ — $g^{(4)}(x)$
c) $h(x) = \ln(x+2)$ — $h^{(5)}(x)$
d) $j(x) = \text{sen } 3x$ — $j^{(10)}(x)$

15. Obtén las derivadas *n*-ésimas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(x-1)$
b) $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$
c) $g(x) = e^x + e^{-x}$
d) $g(x) = 3^{-x}$
e) $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$
f) $h(x) = \cos x$

PÁGINA 284

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

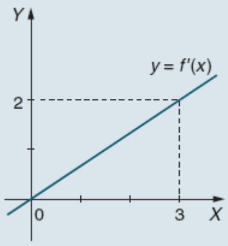
16. ¿En qué punto o puntos la recta tangente a la curva $y = x^3 + 3x + 4$ tiene la menor pendiente?

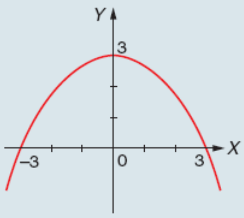
17. Se considera la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$.

a) Estudia su derivabilidad.

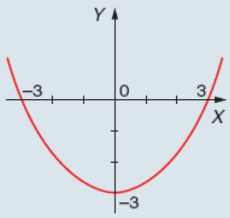
b) Encuentra $f''(x)$.

18. La primera gráfica corresponde a la función derivada de $f(x)$.

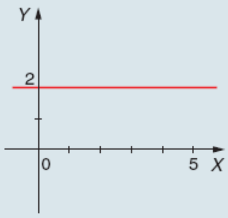




(A)



(B)



(C)

a) Obtén la expresión analítica de $y = f'(x)$.

b) Indica cuál de las gráficas, (A), (B) o (C) corresponde a la función $f(x)$. Justifica la respuesta.

19. a) Estudia para qué valores de a las funciones $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq a \\ 2ax - 2a + 1 & \text{si } x > a \end{cases}$ son continuas.

b) En estos casos dibuja las gráficas de las funciones obtenidas.

c) ¿En algún caso f es derivable en a?

20. Considérese la hipérbola $x \cdot y = 1$. Halla la ecuación de la secante a dicha curva que pasa por los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 2$. Halla también las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola que son paralelas a dicha secante.

21. Halla el punto de la curva $y = \ln(1 + x^2)$ en que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisa $x = 1$.

22. Determina los coeficientes a y b de la parábola $y = ax^2 + bx + 2$, sabiendo que la recta tangente en el punto en que $x = 1$ es la recta $y = -2x$.

23. Halla el ángulo que forman las rectas tangentes a las curvas $xy = 1$, $x^2 - y^2 = 1$ en sus puntos de intersección.

24. Determina, de manera razonada, todas las funciones f que sean polinómicas de tercer grado y verifiquen $f'(-1) = f'(1) = 0$. ¿Puede existir alguna de las funciones determinadas anteriormente que verifique $f(0) = f(1) = 0$?

25. Si el lado de un cuadrado aumenta a una velocidad de 3 cm/s, halla la velocidad a la que aumenta su área cuando el lado vale 12 cm. Halla el valor del lado cuando el área crece a 60 cm²/s.