Unidad 10 – Continuidad de las funciones

ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 5 - \dfrac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 5 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

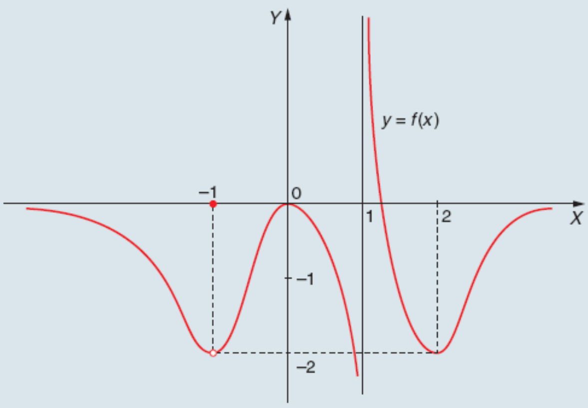
b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{si } x <> 3\ (x \neq 3) \\ 6 & \text{si } x = 3 \end{cases}$

2. Calcula k, en cada caso, de modo que las siguientes funciones sean continuas en todo $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(3x) & \text{si } x \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 2k + \cos(2x) & \text{si } x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 + |x| & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{3}{2}x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

3. Estudia la continuidad de la función $y = f(x)$, representada en la gráfica, en los puntos de abscisa $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Si existiesen puntos de discontinuidad, indica el tipo. Determina el dominio, recorrido, máximos y mínimos absolutos y relativos, si los hubiera, y asíntotas.



4. Halla el valor de a para el cual la función f dada por $(ax - 3)$ si $x < 4$ y por $(-x^2 + 10x - 13)$ si $x \geq 4$, es continua.

5. Halla en el dominio y estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$

b) $f(x) = \sqrt{4 + x} + \sqrt{4 - x}$

c) $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

6. Determina los parámetros a y b para que las funciones que siguen sean continuas en su dominio de definición:

a) $f(x) = \begin{cases} xe^{x^2} & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 + x\ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 1 + \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ 2(a + x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ b/x^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

7. Halla los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y clasifícalos:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$

b) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \ln(-x) & \text{si } x < -2 \\ \operatorname{sen}(\pi x) & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } 2 < x < 4 \\ x - 12 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

8. Halla el valor de a para el cual la función $f(x) = \dfrac{x^2 + x + a}{x^2 + 3x - 4}$ tenga una discontinuidad evitable en $x = 1$.

PÁGINA 255

9. Si f es continua en $x = 2$ y $f(2) < 0$, ¿existe un entorno de 2 en el cual $f(x)$ es negativa?

10. Estudia si las siguientes funciones verifican el teorema de Bolzano en los intervalos indicados en cada una de ellas:
    a) $f(x) = x^2 - e^x + 2$ en $[1, 2]$.
    b) $f(x) = x - \ln x - 3$ en $[1, 3]$.

11. Analiza si las siguientes ecuaciones tienen soluciones en los intervalos dados:
    a) $x^3 - 8x^2 + 3 = 0$ en $[-1, 0]$.
    b) $x = x \operatorname{sen} x + \cos x$ en $[-\pi, \pi]$.

12. ¿Existe un número real para el cual la igualdad $3 \operatorname{sen} x = e^{-x} \cos x$ es cierta?

13. Demuestra que la función $f(x) = x^3 - 8x + 2$ corta al eje de abscisas en el intervalo $(0, 2)$. ¿Puedes decir lo mismo de la función $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-1}$?

14. Sea f una función que cumple $f(-2) \le 0$, $f(0) > 0$. ¿Es siempre cierto que $\exists c \in (-2, 0)$ tal que $f(c) = 0$?

15. Para la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ se tiene que $f(-3) = 4$ y $f(-1) = -2$; pero la gráfica de f no corta al eje de abscisas en el intervalo $[-3, -1]$. Razona si esto contradice el teorema de Bolzano.

16. Las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 + x^2$ y $g(x) = 3 + \cos \pi x$, ¿se cortan en algún punto?

17. Calcula el valor de a para que se pueda aplicar el teorema de Bolzano, en el intervalo $[-1, 1]$, a la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 2 & \text{si } x < 0 \\ e^{2x} + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

18. Prueba que la función $f(x) = e^x - 1$ toma todos los valores del intervalo $[0, e - 1]$.

19. Sea la función $f(x) = x^3 - 1$. ¿Se puede afirmar que la función toma todos los valores del intervalo $[0, 7]$? ¿Está acotada en este intervalo?

20. ¿Es continua la función $f(x) = \dfrac{4}{x}$ en el intervalo $[0, 3]$? ¿Y en el intervalo $[1, 3]$? ¿Está acotada en estos intervalos?

21. Sea la función $f: [-1, 3] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x^2 - 4|$. ¿Es continua en el intervalo $[-1, 3]$? Enuncia un teorema en virtud del cual se pueda afirmar que f alcanza sus extremos absolutos en el intervalo $[-1, 3]$.

22. La función $f(x) = \operatorname{tg} x$ no tiene máximo absoluto en $[0, \pi]$. ¿Contradice este hecho el teorema de Weierstrass?

23. ¿Se puede afirmar que la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 + 2x - 3}$ está acotada en el intervalo $[0, 2]$? ¿Y en el intervalo $[-2, 0]$?

PÁGINA 256

ACTIVIDADES FINALES

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

24. Dadas las funciones f y g definidas en $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \frac{x+|x|}{2} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

estudia la continuidad de la función $g \circ f$.

25. Demuestra que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ se cortan en algún punto de abscisa positiva.

26. Dada la función $f(x) = 2x^3 + 1$, prueba que existe un valor c perteneciente al intervalo $(0, 2)$ de manera que $f(c) = \frac{13}{4}$.

27. La función $f(x) = \dfrac{x^2 - a}{x^3 + x^2 + ax + 12}$ presenta una discontinuidad evitable en $x = -2$, ¿para qué valor de a?

28. Estudia el dominio y la discontinuidad de la función:

$$f(x) = \ln\left[\frac{x+2}{x^2}\right]$$

29. Si g es una función polinómica, ¿qué puedes afirmar sobre la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{g(x)}{x^3 - x}$?

30. Halla a y b para que se pueda aplicar el teorema de Bolzano a la función f y halla el punto $c \in (-\pi, \pi)$ al que hace mención el teorema:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ a + x^2 & \text{si } 0 < x < 1 \\ \dfrac{b}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

31. La función f se define en $[-1, 1]$ del siguiente modo: vale -1 si $x \leq 0$ y vale $2x^3 - 1$ si $x > 0$. Explica si f verifica el teorema de Bolzano.

32. Sea la función $f(x) = x^2 + 1$. Haciendo uso del teorema necesario, cuyo enunciado debes escribir, analiza si dicha función toma todos los valores del intervalo $[1, 5]$.

33. Demuestra que la ecuación $\pi^x = e$ tiene solución en $(0, 1)$. ¿Lo cumple también la ecuación $\phi^X = e$, siendo ϕ el número de oro?

34. Sea la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$, ¿es continua? Prueba que existe $c \in [0, 3]$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice el teorema de Bolzano?

35. ¿La función $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$ alcanza máximo y mínimo absolutos en el intervalo $[-1, 1]$? En caso afirmativo hállalos.