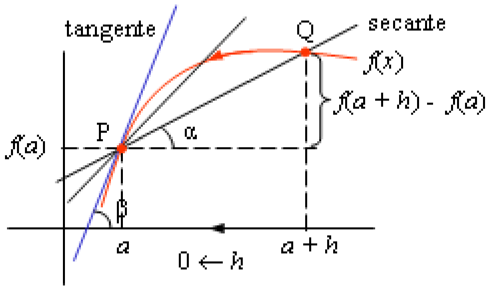
Tema 8. Derivadas.
Teoremas de las funciones derivables. Regla de L´Hôpital

1. Derivada de una función en un punto

1.1. Definición

Una función $f(x)$ es derivable en el punto $x = a$ si existe el límite: $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Este límite se denota por $f´(a)$, y existe cuando resulta un número real finito.



- La derivada es el límite de un cociente de dos cantidades infinitesimales. El numerador mide la variación de la variable dependiente (la $f(x)$) cuando la variable independiente (la x) pasa de a a $a + h$. El cociente mide la tasa de variación media de una variable respecto a la otra. Cuando se impone que la variable independiente varíe una cantidad infinitesimal (eso indica que $h \to 0$), lo que se está calculando es la tasa de variación instantánea de la función $f(x)$ en un punto determinado. Esto es, qué le pasa a $f(x)$ cuando varía x en los alrededores de un punto a.

Ejemplo:

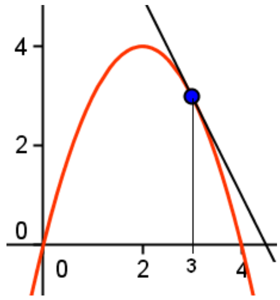
Dada la función $f(x) = -x^2 + 4x$, su derivada en el punto $x = 3$ es

$$f´(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}.$$

Como $f(3+h) = -(3+h)^2 + 4(3+h) = -h^2 - 2h + 3$ y $f(3) = 3$, se tendrá:

$$f´(3) = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2-2h+3-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2-2h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(-h-2)}{h} = \lim_{h\to 0}(-h-2) = -2.$$

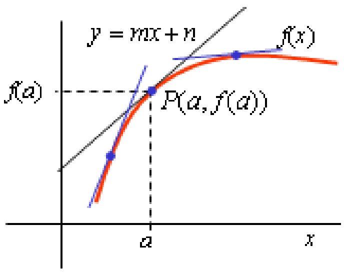


Luego, $f´(3) = -2$. (Este número indica que en el punto $x = 3$, la función está decreciendo en la proporción 2 a 1: la razón que expresa la relación entre ambas variables vale –2.)

1.2. Interpretación geométrica de la derivada

La derivada, $f´(a)$, es un número que da el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$. Esto es, en la recta $y = mx + n$ se tiene que $m = f´(a)$; como además la recta pasa por $P(a, f(a))$, se obtiene que la ecuación de dicha recta tangente será:

$$y - f(a) = f´(a)(x-a).$$



Observaciones:

1. La tangente a una curva en un punto es la recta que mejor aproxima a la curva en ese punto concreto. La derivada indica lo que variaría la función si se comportara linealmente (como la recta tangente) en un entorno de ese punto.
2. La derivada, como la recta tangente, va cambiando según cambia el punto de referencia.

3. El lector atento recordará que la pendiente de una recta indica lo que la recta aumenta (si es positiva) o disminuye (si es negativa) por cada incremento unitario de la variable x.

Ejemplo:
La recta tangente a la función $f(x) = -x^2 + 4x$ en el punto de abscisa $x = 3$, será:

$$y - f(3) = f'(3)(x-3).$$

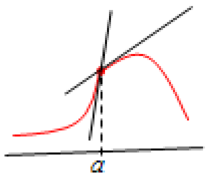
Y como $f(3) = 3$ y $f'(3) = -2$, se obtiene: $y - 3 = -2(x-3) \Rightarrow y = -2x + 9$.

1.3. Derivabilidad, continuidad y derivadas laterales.
Para que una función sea derivable en un punto son precisas dos condiciones:
1) Que la función sea continua en dicho punto.
2) Que las derivadas laterales existan y coincidan en ese punto.

- **Derivadas laterales**

Izquierda: $f'(a^-) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Derecha: $f'(a^+) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

La derivada, $f'(a)$, existe cuando $f'(a^-) = f'(a^+)$.
Geométricamente significa que la tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$ es la misma tanto si se traza por la izquierda como por la derecha.
Las derivadas laterales no coinciden en los *puntos angulosos*, en los *picos* de las funciones. Por tanto, en esos puntos no existe la derivada.



• Esta condición es particularmente importante en las funciones definidas a trozos. Para esas funciones resulta obligado estudiar las derivadas laterales en los puntos de separación de los distintos trozos.

- **Continuidad y derivabilidad**

La relación entre derivabilidad y continuidad es la siguiente:
"si $f(x)$ es derivable en $x = a \Rightarrow f(x)$ es continua en $x = a$"
Comprobar que este resultado es cierto es relativamente sencillo, pues si $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces existe $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
De la existencia de ese límite puede deducirse que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$; o lo que es lo mismo, que $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) = 0$.
Para ello, se hace $x = a + h$, y se observa que si $x \to a$, entonces $h \to 0$; y al revés.
Por tanto:

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \big(f(a+h) - f(a)\big) = \lim_{h \to 0} \frac{\big(f(a+h) - f(a)\big)}{h} \cdot h =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\big(f(a+h) - f(a)\big)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h = f'(a) \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

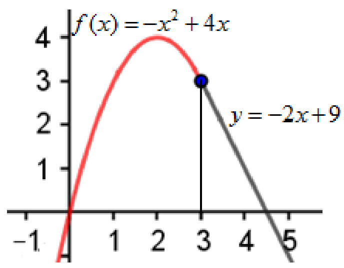
En consecuencia, si la función es derivable en $x = a$ se deduce que es continua en $x = a$.

- El recíproco no es cierto: "si $f(x)$ es continua en $x = a \not\Rightarrow f(x)$ es derivable en $x = a$"

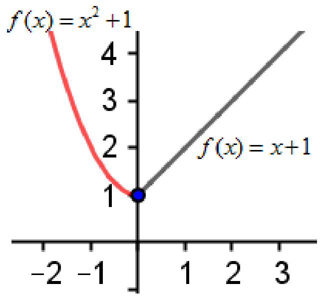
Para comprobar este resultado basta con dar un <u>contraejemplo</u>. El más sencillo es considerar la función $f(x) = |x|$, que es continua en $x = 0$ pero no derivable. (El lector interesado puede intentar demostrarlo).

Ejemplos:

a) La función $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x, & x\le 3\\ -2x+9 & x>3\end{cases}$ es continua y derivable en el punto donde se unen las funciones a trozos, en $x = 3$. Esto implica que se puede pasar de una función a otra sin cambios bruscos. (Recuerda que $y=-2x+9$ es la recta tangente a $f(x)=-x^2+4x$ en $x = 3$).



b) La función $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0\\ x+1 & x\ge 0\end{cases}$ es continua en $x = 0$, pero no es derivable en ese punto. (En el punto $x = 0$, la función hace un cambio brusco, tiene un pico).



2. Función derivada

La <u>función derivada</u> de una función $f(x)$ es una nueva función que asocia a cada número real su derivada. Se denota por $f´(x)$. Su definición es la siguiente:

$$f´(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Si $y=f(x)$, se escribe $y´=f´(x)$. También es frecuente escribir $f´(x)=\dfrac{df(x)}{dx}$ o $y´=\dfrac{dy}{dx}$.

2.1. Derivada de algunas funciones

Para obtener la función derivada de cualquier función conviene seguir el proceso siguiente:
1) Dada $y=f(x)$, hallar $f(x+h)$.
2) Hallar y simplificar la diferencia $f(x+h)-f(x)$.
3) Escribir y simplificar el cociente $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
4) Resolver el límite $f´(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. En el cálculo de este límite suele estar la dificultad mayor.

Para las funciones usuales existen una serie de fórmulas que dan su función derivada. Más adelante se dará una breve tabla con las más frecuentes.
Aquí, para que se aprecie el método a seguir (y quizás la dificultad de ello) se obtendrán las dos más fáciles: la de la función potencial, $f(x)=x^n$; y la del logaritmo, $f(x)=\log_a(x)$.
Pero antes, un ejemplo concreto.

Ejemplo:
La función derivada de $f(x)=x^2+2x$ puede obtenerse así:
1) Se calcula $f(x+h)$:

$$f(x+h)=(x+h)^2+2(x+h)=x^2+2xh+h^2+2x+2h.$$

2) Se halla $f(x+h)-f(x)$:

$$f(x+h)-f(x)=x^2+2xh+h^2+2x+2h-(x^2+2x)=h^2+2xh+2h.$$

3) Se forma el cociente: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{h^2+2xh+2h}{h}$.

4) Se resuelve el límite:

$$f´(x)=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh+2h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x+2)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2x+2)=2x+2.$$

Por tanto, la función derivada de $f(x)=x^2+2x$ es $f´(x)=2x+2$.

Si ahora se desea hallar la derivada en cualquier punto, basta con sustituir. Así:

$$f´(0)=2\cdot 0+2=2;\quad f(-1)=2\cdot(-1)+2=0;\ f´(-3)=2\cdot(-3)+2=-4.$$

2.2. Derivada de la función $y=f(x)=x^n$

1) $f(x+h)=(x+h)^n=x^n+nx^{n-1}h+\dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+...+h^n$. (Esta expresión se obtiene utilizado la fórmula de la potencia de un binomio).

2) $f(x+h)-f(x)=(x+h)^n-x^n=nx^{n-1}h+\dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+...+h^n$.

3) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{nx^{n-1}h+\dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+...+h^n}{h}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+...+h^{n-1}.$$

4) $$f´(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+...+h^{n-1}\right)=nx^{n-1}.$$

Por tanto, si:

$$\underline{f(x)=x^n\Rightarrow f´(x)=nx^{n-1}}.$$

- Esta regla es válida para cualquier valor de *n*, positivo, negativo, fraccionario…

Ejemplo:

a) Si $f(x)=x^5\Rightarrow f´(x)=5x^4$.

b) Si $f(x)=\dfrac{1}{x^3}=x^{-3}\Rightarrow f´(x)=-3x^{-4}=-\dfrac{3}{x^4}$.

c) Si $f(x)=\sqrt{x}\Rightarrow f(x)=x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f´(x)=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2x^{1/2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

d) Si $f(x)=\sqrt[n]{x}\Rightarrow f(x)=x^{\frac{1}{n}}\Rightarrow f´(x)=\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=\dfrac{1}{n}x^{-\frac{n-1}{n}}=\dfrac{1}{2x^{(n-1)/n}}=\dfrac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.

2.3. Derivada de la función $f(x)=\log_a(x)$

1) $f(x+h)=\log_a(x+h)$.

2) $f(x+h)-f(x)=\log_a(x+h)-\log_a(x)=\log_a\dfrac{x+h}{x}$.

3) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\log_a\dfrac{x+h}{x}}{h}=\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}.$$

Recuerda: $\log_a(x)^n=n\log_a x$.

4) Para determinar $f'(x)$ se transformará la expresión para buscar un límite que dé lugar al número *e*. Así:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\log_a\left(\frac{x+h}{h}\right)^{\frac{1}{h}}\right]=\log_a\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+h}{h}\right)^{\frac{1}{h}}\right]=\log_a\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{h}+1\right)^{\frac{1}{h}}\right]$$

$$=\log_a\left[\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{h}{x}}\right)^{\frac{1}{h}}\right]=\log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{h}{x}}\right)^{\left(\frac{x}{h}\cdot\frac{h}{x}\right)\cdot\frac{1}{h}}\right]=\log_a\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{h}{x}}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}}=\log_a\left[e^{\frac{1}{x}}\right].$$

Como $\log_a e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\log_a e$, se tiene que la derivada de $f(x)=\log_a(x)$ es $f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$.

Por tanto, si: $\underline{f(x)=\log_a(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e}$.

Un caso particularmente importante es el de neperiano de *x*. Si $\underline{f(x)=\ln x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}}$.

Ejemplos:

a) Si $f(x)=\log_2 x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log_2 e$. b) Si $f(x)=\log x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log e$.

Observación:
Las funciones derivadas de otras funciones usuales, como $f(x)=e^x$, $f(x)=\sin x$, $f(x)=\arcsin x$… se darán por demostradas. (El lector interesado las puede encontrar en algunos libros de Matemáticas II de segundo de Bachillerato).

3. Reglas de derivación para las operaciones con funciones

Cuando las funciones no aparezcan en su forma más simple o cuando intervengan más de una función se aplicarán las siguientes propiedades.

1. Derivada de una constante por una función:

$$F(x)=k\cdot f(x)\ \rightarrow\ (F(x))'=(k\cdot f(x))'=k\cdot f'(x).$$

Ejemplos:

a) Si $y=kx^n \Rightarrow y'=k\cdot nx^{n-1}$. b) Si $y=7x^5 \Rightarrow y'=7\cdot 5x^4=35x^4$.

c) Si $y=\frac{-1}{4}x^4 \Rightarrow y'=-\frac{1}{4}\cdot 4x^3=-x^3$. d) Si $y=\frac{2}{x}=2x^{-1} \Rightarrow y'=2\cdot(-1)x^{-2}=\frac{-2}{x^2}$.

2. Derivada de una suma o diferencia de funciones:

$$F(x)=f(x)\pm g(x)\ \rightarrow\ (F(x))'=(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x).$$

Ejemplos:

a) Si $f(x)=5x^3$ y $g(x)=-4x^6 \Rightarrow (f(x)+g(x))'=15x^2-24x^5$.

b) Si $y=\frac{1}{x}+5-x+2x^2 \Rightarrow y'=-\frac{1}{x^2}-1+4x$.

3. Derivada de un producto de funciones:

$$F(x)=(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)\ \to\ (F(x))'=(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

Ejemplo:

Si $f(x)=4x^2-2x+1$ y $g(x)=3-5x^2+2x^4\Rightarrow$

$$\Rightarrow (f(x)\cdot g(x))'=(8x-2)\cdot(3-5x^2+2x^4)+(4x^2-2x+1)\cdot(-10x+8x^3)=$$

$$=48x^5-20x^4-72x^3+30x^2+14x-6.$$

Si se multiplican antes las dos funciones y se deriva después, se obtiene:

$$f(x)\cdot g(x)=(4x^2-2x+1)\cdot(3-5x^2+2x^4)=8x^6-4x^5-18x^4+10x^3+7x^2-6x+3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f(x)\cdot g(x))'=48x^5-20x^4-72x^3+30x^2+14x-6.$$

Naturalmente, el resultado es el mismo.

4. Derivada de un cociente de funciones:

$$F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\ \to\ (F(x))'=\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Ejemplo:

Si $y=\dfrac{3x^2-2x+1}{4x-1}\Rightarrow y'=\dfrac{(6x-2)\cdot(4x-1)-(3x^2-2x+1)\cdot 4}{(4x-1)^2}\Rightarrow y'=\dfrac{12x^2-6x-2}{(4x-1)^2}$.

5. Derivada de la inversa de una función:

$$F(x)=\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}\ \to\ (F(x))'=\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{-f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Ejemplo:

Para la función $f(x)=3x^2-5x+1$ se tendrá: $\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=\left(\dfrac{1}{3x^2-5x+1}\right)'=\dfrac{-(6x-5)}{(3x^2-5x+1)^2}$.

Evidentemente, esta función también se podría derivar como un cociente. Así:

$$y=\frac{1}{3x^2-5x+1}\Rightarrow y'=\frac{0\cdot\left(3x^2-5x+1\right)-1\cdot(6x-5)}{\left(3x^2-5x+1\right)^2}=\frac{-(6x-5)}{\left(3x^2-5x+1\right)^2}.$$

6. Derivada de la función compuesta:

$$F(x)=f(g(x))\ \to\ (F(x))'=(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x).$$

Observación:

La demostración de estas propiedades no es difícil. A continuación, y sólo como *botón de muestra*, se obtiene la fórmula de la derivada de un producto de funciones.

Demostración de la fórmula de la derivada de un producto de funciones

Si $F(x)=(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$, para obtener su derivada puede hacerse lo que sigue:

- Cociente incremental

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{(f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x)}{h}=\frac{f(x+h)\cdot g(x+h)-f(x)\cdot g(x)}{h}=$$

$$= \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h} =$$

$$= \frac{\big(f(x+h) - f(x)\big)\cdot g(x+h) + f(x)\cdot\big(g(x+h) - g(x)\big)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\cdot g(x+h) + f(x)\cdot\frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

- Pasando al límite se obtiene la derivada:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\cdot g(x+h)\right) + \lim_{h\to 0}\left(f(x)\cdot\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} =$$

$$= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Por tanto: $\big(F(x)\big)' = \big(f(x)\cdot g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

4. Fórmula de la función derivada de las funciones usuales

4.1. Derivada de potencias y raíces

Son dos casos particulares de funciones compuestas: $y = \big(f(x)\big)^n$ e $y = \sqrt[n]{f(x)}$.

Sus derivadas son:

$$y = \big(f(x)\big)^n \Rightarrow y' = n\big(f(x)\big)^{n-1}\cdot f'(x); \qquad y = \sqrt[n]{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{\big(f(x)\big)^{n-1}}}.$$

El caso particular de la raíz cuadrada es: $y = \sqrt{f(x)} \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

Observación: Las raíces pueden considerarse como potencias de exponente racional. Por tanto, para hallar la derivada de una raíz puede utilizarse la fórmula de la derivada de una función potencial. Así, si $y = \sqrt[n]{f(x)} = \big(f(x)\big)^{1/n} \Rightarrow y' = \dfrac{1}{n}\big(f(x)\big)^{1/n-1}\cdot f'(x)$.

Ejemplos:

a) Si $F(x) = (2x^3 - 5x + 3)^4 \Rightarrow F'(x) = 4(2x^3 - 5x + 3)^3\cdot(6x^2 - 5)$.

b) Si $F(x) = \sqrt{x^3 - x^2 + 1} \Leftrightarrow F(x) = \left(x^3 - x^2 + 1\right)^{1/2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{2}\left(x^3 - x^2 + 1\right)^{-1/2}\cdot(3x^2 - 2x) = \frac{3x^2 - 2x}{2\sqrt{x^3 - x^2 + 1}}.$$

4.2. Derivada de las funciones logarítmicas

- Logaritmo en base *a*: $f(x) = \log_a x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}\log_a e$.

Para la función compuesta: $y = \log_a f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$.

- Logaritmo neperiano: $f(x) = \ln x$, con $x > 0 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Para la función compuesta: $y = \ln f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Ejemplos:

a) Si $y = \log(3x^2 - 5x + 2) \Rightarrow y' = \dfrac{6x-5}{3x^2 - 5x + 2}\log e$.

b) Si $y = \ln(2x^4 - 3x) \Rightarrow y' = \dfrac{8x^3 - 3}{2x^4 - 3x}$.

4.3. Derivada de las funciones exponenciales

- Exponencial de base *a*: $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$.

Para la función compuesta: $y = a^{f(x)}$, $a > 0 \Rightarrow y' = f'(x) \cdot a^{f(x)} \ln a$.

- Exponencial de base *e*: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$.

Para la función compuesta: $y = e^{f(x)} \Rightarrow y' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$.

Ejemplos:

a) $y = 10^x \Rightarrow y' = 10^x \ln 10$.

b) $y = 3^{x^2-4x} \Rightarrow y' = (2x-4) \cdot 3^{x^2-4x} \ln 3$.

c) Si $y = e^{2x^3-3x} \Rightarrow y' = (6x^2 - 3)e^{2x^3-3x}$.

4.4. Potencial-exponencial: Derivación logarítmica

Se aplica cuando la variable x aparece tanto en la base como en el exponente de una potencia: $F(x) = \left(f(x)\right)^{g(x)}$.

El caso más sencillo es $F(x) = x^x$.

Para hallar su derivada se aplican logaritmos y después se deriva. Así:

$$\ln F(x) = \ln x^x = x \ln x \Rightarrow \frac{F'(x)}{F(x)} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow F'(x) = F(x) \cdot (\ln x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(x) = x^x \ln x + x^x.$$

Para el caso general el procedimiento es el mismo. Tomando logaritmos neperianos en ambos miembros de la función $F(x) = \left(f(x)\right)^{g(x)}$, queda:

$$\ln F(x) = \ln\left(f(x)\right)^{g(x)} \Leftrightarrow \ln F(x) = g(x) \cdot \ln f(x).$$

Derivando miembro a miembro se tiene:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Despejando:

$$F'(x) = F(x) \cdot \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'(x) = \left(f(x)\right)^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln f(x) + g(x) \cdot \left(f(x)\right)^{g(x)-1} \cdot f'(x).$$

Observación:

1) Esta técnica de derivación, consistente en aplicar logaritmos y derivar después, recibe el nombre de *derivación logarítmica*.

2) Los logaritmos pueden aplicarse también para simplificar los cálculos.

Ejemplos:

a) Para derivar la función $f(x)=\left(3x^2+1\right)^{(4x-1)}$ se hace lo siguiente:

1) Se aplican logaritmos: $\ln f(x)=\ln\left(3x^2+1\right)^{(4x-1)} \Rightarrow \ln f(x)=(4x-1)\ln\left(3x^2+1\right)$.

2) Se deriva a ambos lados de la igualdad: $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=4\ln\left(3x^2+1\right)+(4x-1)\cdot\dfrac{6x}{3x^2+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x)=f(x)\left(4\ln\left(3x^2+1\right)+(4x-1)\cdot\frac{6x}{3x^2+1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(3x^2+1\right)^{4x-1}\cdot\left(4\ln\left(3x^2+1\right)+(4x-1)\cdot\frac{6x}{3x^2+1}\right).$$

b) Para derivar la función $f(x)=\ln\left(3x^4+2x^2+1\right)^5$ se puede hacer lo siguiente:

1) Se aplica la propiedad del logaritmo de una potencia $\left(\ln A^n=n\ln A\right)$. Así se obtiene:

$$f(x)=\ln\left(3x^4+2x^2+1\right)^5 = 5\ln\left(3x^4+2x^2+1\right).$$

2) Se deriva: $f'(x)=5\cdot\dfrac{12x^3+4x}{3x^4+2x^2+1}=\dfrac{60x^3+20x}{3x^4+2x^2+1}$.

c) En el caso de un cociente es más eficaz. Así, para $f(x)=\ln\left(\dfrac{3x^2+4}{x^2}\right)$, se tiene:

$$f(x)=\ln\left(\frac{3x^2+4}{x^2}\right) = \ln(3x^2+4)-\ln(x^2)= \ln(3x^2+4)-2\ln x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{6x}{3x^2+4}-\frac{2}{x}=\frac{6x^2-6x^2-8}{3x^3+4x}=\frac{-8}{3x^3+4x}.$$

4.5. Derivada de las funciones trigonométricas

Las reglas de derivación de las funciones trigonométricas se obtienen aplicando las fórmulas trigonométricas y las propiedades de la derivada de las operaciones con funciones.

- Función seno: $f(x)=\operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x)=\cos x$.

Para la función compuesta se tiene: $y=\operatorname{sen} f(x) \Rightarrow y'=f'(x)\cos f(x)$.

Ejemplos:

a) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x} \Rightarrow y'=-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}$.

b) $f(x)=\sin^2 x=(\sin x)^2 \Rightarrow f'(x)=2\sin x\cdot\cos x$. c) $f(x)=\dfrac{\sin x^2}{5} \Rightarrow y'=\dfrac{2x\cos x^2}{5}$.

- Función coseno: $f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{sen} x$.

Esta fórmula puede obtenerse teniendo en cuenta que:

$$f(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f'(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x.$$

Para la función compuesta: $y=\cos f(x) \Rightarrow y'=-f'(x)\operatorname{sen} f(x)$.

- Función tangente: $y = \tan x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

Estas fórmulas pueden obtenerse teniendo en cuenta que:

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \text{(derivando como un cociente)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Para la función compuesta: $y = \text{tag } f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$.

Ejemplos:

a) $y = \cos^2(x^3 - 2x) \Rightarrow y' = -2\cos(x^3 - 2x) \cdot \sin(x^3 - 2x) \cdot (3x^2 - 2)$.

b) $y = \ln \cos x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\tan x$.

c) $y = x \tan(5x - 3) \Rightarrow y' = \tan(5x - 3) + x\left(1 + \tan^2(5x - 3)\right)5$.

4.6. Derivada de las funciones trigonométricas inversas

La fórmula de la derivada de cada una de estas funciones puede obtenerse a partir de su definición. Aquí se hará sólo la del arcoseno.

- Función arcoseno: $f(x) = \text{arcsen } x$.

Por definición: $f(x) = \text{arcsen } x \Leftrightarrow x = \text{sen } f(x)$.

Derivando miembro a miembro se obtiene:

$$1 = \left(\cos f(x)\right) \cdot f'(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos f(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 f(x)}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Por tanto: $f(x) = \text{arcsen } x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Para la función compuesta: $y = \text{arcsen } f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1 - (f(x))^2}}$.

- Función arcocoseno: $f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Para la función compuesta: $y = \arccos f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1 - (f(x))^2}}$.

- Función arcotangente: $f(x) = \text{arctag } x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

Para la función compuesta: $y = \text{arctag } f(x) \Rightarrow y' = \dfrac{f'(x)}{1 + (f(x))^2}$.

Ejemplos:

a) $y = \text{arcsen } (x - 1) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - (x - 1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$.

b) $y = \arcsen\left(\frac{x}{4}\right) \Rightarrow y' = \dfrac{1/4}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

c) $y = \arccos(x^2) \Rightarrow y' = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$.

d) $y = \operatorname{arctag}(1+x^2) \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{1+(1+x^2)^2} = \dfrac{2x}{2+2x^2+x^4}$.

4.7. Tabla de la derivada de las funciones usuales

Resumiendo todo lo anterior puede formarse la siguiente tabla. En ella: *c*, *n*, *a* y *e* son números; *x* designa la variable independiente e *y* o *f* representan funciones de *x*.

TABLA DE FUNCIONES DERIVADAS			
Función simple	**Derivada**	**Función compuesta**	**Derivada**
$y = c$	$y' = 0$		
$y = x$	$y' = 1$		
$y = x^n$, $\forall\, n \in \mathbf{R}$	$y' = nx^{n-1}$	$y = (f(x))^n$, $\forall\, n$	$y' = n(f(x))^{n-1} f'(x)$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$y' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$
$y = a^x$, $a > 0$	$y' = a^x \ln a$	$y = a^{f(x)}$, $a > 0$	$y' = f'(x)\cdot a^{f(x)} \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$y' = f'(x)\cdot e^{f(x)}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x}\log_a e$	$y = \log_a f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_a e$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \ln f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$y = \operatorname{sen} x$	$y' = \cos x$	$y = \operatorname{sen} f(x)$	$y' = f'(x)\cos f(x)$
$y = \cos x$	$y' = -\operatorname{sen} x$	$y = \cos f(x)$	$y' = -f'(x)\operatorname{sen} f(x)$
$y = \tan x$	$y' = 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = \tan f(x)$	$y' = f'(x)\left(1+\tan^2 f(x)\right)$
$y = \arcsen x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsen f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos f(x)$	$y' = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}$
$y = \arctan x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$y = \arctan f(x)$	$y' = \dfrac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$

4.8. Derivadas sucesivas

A la función derivada de $f'(x)$ se le llama derivada segunda; se escribe $f''(x)$. De manera análoga se puede definir la derivada tercera: $f'''(x)$, que es la derivada de la derivada segunda. Y también la derivada de orden 4: $f^{4)}(x)$ …

A la derivada de orden *n* se le llama derivada *n*–ésima; y se escribe $f^{n)}(x)$.

Ejemplos:

1. $f(x) = -x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = -2x + 4$. La derivada segunda es $f''(x) = -2$.

2. $f(x) = \left(-x^2 + 4x\right)\cdot\left(x^3 - 2x\right) \Rightarrow f'(x) = (-2x + 4)\cdot\left(x^3 - 2x\right) + \left(-x^2 + 4x\right)\cdot\left(3x^2 - 2\right)$.

3. $f(x) = \dfrac{3x}{x^2 - 5} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3(x^2 - 5) - 3x\cdot 2x}{\left(x^2 - 5\right)^2} = \dfrac{-3x^2 - 15}{\left(x^2 - 5\right)^2}$.

La derivada segunda es:

$$f''(x) = \frac{-6x\cdot(x^2 - 5)^2 - \left(-3x^2 - 15\right)\cdot 2\left(x^2 - 5\right)\cdot 2x}{\left(x^2 - 5\right)^4} = \frac{-6x\cdot(x^2 - 5) - \left(-3x^2 - 15\right)\cdot 2\cdot 2x}{\left(x^2 - 5\right)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-6x^3 + 30x + 12x^3 + 60x}{\left(x^2 - 5\right)^3} = \frac{6x^3 + 90x}{\left(x^2 - 5\right)^3}.$$

4. $f(x) = (x^3 - 2x^2 - 3)^5 \Rightarrow f'(x) = 5\left(x^3 - 2x^2 - 3\right)^4\cdot\left(3x^2 - 4x\right)$.

5. $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{6x - 2}{2\sqrt{3x^2 - 2x}} = \dfrac{3x - 1}{\sqrt{3x^2 - 2x}}$.

6. $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \left(x^2 + 1\right)^{1/5} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{5}\left(x^2 + 1\right)^{-4/5}\cdot 2x = \dfrac{2x}{5\cdot\sqrt[5]{\left(x^2 + 1\right)^4}}$.

7. $y = 2 - 7x^3 + \dfrac{4}{x^5} - 5\sqrt{x} \Rightarrow y' = -7\cdot 3x^2 + \dfrac{-4\cdot 5x^4}{x^{10}} - \dfrac{5}{2\sqrt{x}} \Rightarrow y' = -21x^2 - \dfrac{20}{x^6} - \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$.

8. a) $y = 3^{4x-1} \Rightarrow y' = 4\cdot 3^{4x-1}\cdot \ln 3 = 3^{4x-1}\cdot \ln 81$. b) $y = e^{x^2 - x} \Rightarrow y' = (2x - 1)e^{x^2 - x}$.

9. $y = 2^{-x^3 + 2x} + e^{-0,5x} \Rightarrow y' = (-3x^2 + 2)2^{-x^3 + 2x}\ln 2 - 0,5e^{-0,5x}$.

10. a) $y = \ln(x^4 + x) \Rightarrow y' = \dfrac{4x^3 + 1}{x^4 + x}$. b) $y = \log(3x^2 + 2) \Rightarrow y' = \dfrac{6x}{3x^2 + 2}\log e$.

11. $y = \ln\left((2x - 1)(x^2 - x)\right) = \ln(2x - 1) + \ln(x^2 - x) \Rightarrow y' = \dfrac{2}{2x - 1} + \dfrac{2x - 1}{x^2 - x}$.

12. $y = \sin\left(x^2 + 1\right) \Rightarrow y' = 2x\cdot\cos\left(x^2 + 1\right)$.

13. a) $y = \left(\sin(5x)\right)^2 \Rightarrow y' = 2\sin(5x)\cdot\cos(5x)\cdot 5 = 10\sin(5x)\cdot\cos(5x) = 5\sin(10x)$.

b) $y = \dfrac{\sin\,(5x)^2}{2} \Rightarrow y = \dfrac{\sin\,(25x^2)}{2} \Rightarrow y' = \dfrac{\cos(25x^2)\cdot 50x}{2} = 25x\cdot\cos(25x^2)$.

14. $y = \operatorname{sen}\dfrac{x}{2} + 3\cos 5x - \operatorname{tag} x^2 \Rightarrow y' = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2} - 15\operatorname{sen} 5x - (1 + \operatorname{tag} x^2)\cdot 2x$.

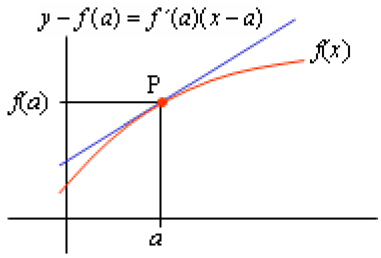
15. $y = \cos^3(x^2 - 2x) \Rightarrow y' = 3\cos^2\left(x^2 - 2x\right)\cdot\left(-\sin\left(x^2 - 2x\right)\right)\cdot(2x - 2)$.

16. $y = \ln\left(\sin x\right) \Rightarrow y' = \dfrac{1}{\sin x}\cdot(\cos x) = \operatorname{cotan} x$.

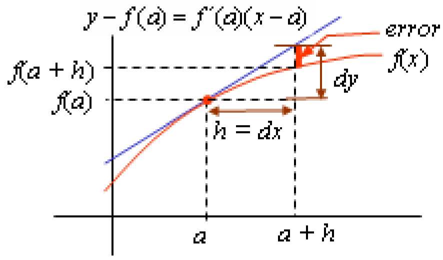
17. $y = \operatorname{arcsen}(x^2 - 1) - \arccos(1 - x^2) \Rightarrow y' = \dfrac{2x}{\sqrt{1 - (x^2 - 1)^2}} - \dfrac{-(-2x)}{\sqrt{1 - (1 - x^2)^2}} = 0$.

18. $y = \arctan e^x \Rightarrow y' = \dfrac{e^x}{1 + \left(e^x\right)^2} = \dfrac{e^x}{1 + e^{2x}}$.

5. Idea de diferencial de una función



Como se indicó anteriormente, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$, en el punto $P(a, f(a))$, viene dada por $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.
Esta recta, cuya pendiente es $f'(a)$, es la función lineal que mejor aproxima a $f(x)$ en un entorno del punto *a*.

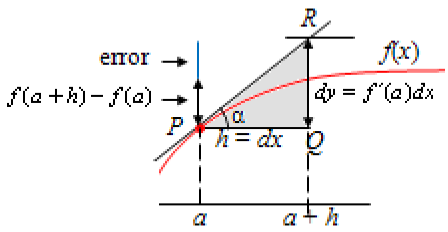


• Se llama diferencial de $f(x)$ en el punto $x = a$ al producto $f'(a) \cdot dx$. Esto es, $dy = df(a) = f'(a)dx$.
En general, si $y = f(x) \to dy = df(x) = f'(x)dx$.

Ejemplos:
a) Para $y = x^3 + 3x^2 - 5x \Rightarrow dy = (3x^2 + 6x - 5)dx$.

b) Si $y = \ln x \Rightarrow dy = \dfrac{1}{x}dx$. c) Si $x = \cos t \Rightarrow dx = -\sin t dt$.

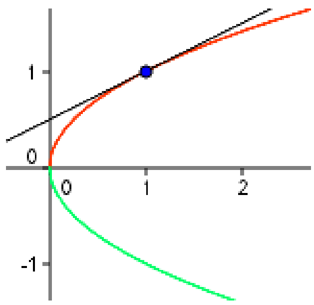
• <u>Cuantitativamente</u>, la diferencial da la diferencia de los valores que toma la recta tangente en los puntos *a* y $a + h = a + dx$ (en general, puntos: *x* y $x + dx$).



• <u>Geométricamente</u>, la diferencial es el incremento sobre la recta tangente: Como puede verse en el triángulo *PQR* de la figura adjunta:

$$\tan\alpha = \frac{RQ}{PQ} = \frac{dy}{dx} = f'(a) \Rightarrow dy = f'(a)dx.$$

• Parece evidente que si $dx = h$ es un valor pequeño, también será pequeño el valor de *dy*, y más pequeña aún, la diferencia entre el valor sobre la curva $f(x)$ y el valor sobre la recta tangente. (En la figura se indica esa diferencia con el nombre de error).
Esto permite concluir que, en un entorno del punto *a*, la función $y = f(x)$ y la recta tangente, $y = f(a) + f'(a)(x - a)$, toman valores aproximados: $[y = f(x)] \approx [y = f(a) + f'(a)(x - a)]$
Esto es, haciendo $x = a + h$: $f(a + h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h$, para *h* pequeño.



Ejemplo:
Para hallar la ecuación de la tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 1$, se procede así:

$$y = \sqrt{x} \to y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \text{si } x = 1,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 1/2.$$

Luego, la tangente es: $y - 1 = \dfrac{1}{2}(x - 1) \to y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

Por tanto, en el punto $x = 1$, la función $y = \sqrt{x}$ puede aproximarse por la recta $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

Así, la raíz cuadrada de 1,1, $\sqrt{1{,}1} \approx \dfrac{1}{2}1{,}1 + \dfrac{1}{2} = 1{,}05$.

<u>Observación</u>: Lo que se hace es utilizar una función lineal, fácil de manejar, para calcular una raíz cuadrada.

6. Derivación implícita

Una función está definida implícitamente cuando la variable dependiente no está despejada. Así, la expresión $y^2 + x - 3 = 0$, con $x < 3$ e $y > 0$, define a y como función de x de forma implícita. En este caso, puede despejarse fácilmente, pues

$$y^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow y^2 = 3 - x \Rightarrow y = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{3-x}.$$

Pares de esta función (puntos de la curva) son, por ejemplo, (2, 1), (–1, 2) o (–6, 3).

La expresión $y^5 - y^3 + 2y - x^2 - x = 0$ también define y como función de x, pero a diferencia del caso anterior, no puede despejarse y. (Pares de esta función son, por ej., (0, 0) o (1, 1)).

En el primer caso, la obtención de la derivada de y es muy fácil:

$$y' = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3-x}}(-1) = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}}.$$

También podría calcularse la derivada sin necesidad de despejar, pues si $y = f(x)$, la expresión $y^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left(f(x)\right)^2 + x - 3 = 0$.

Si se deriva, miembro a miembro, aplicando la regla de la cadena, se tiene:

$$2\left(f(x)\right)f'(x) + 1 = 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2f(x)}.$$

Normalmente no se sustituye y por $f(x)$, pudiendo derivar directamente así:

$$y^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow 2y \cdot y' + 1 = 0 \Rightarrow y' = -\frac{1}{2y}.$$

Con esto, por ejemplo, la derivada en el punto (2, 1) vale $y' = -\frac{1}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2}$.

Aplicando el mismo procedimiento a la expresión $y^5 - y^3 + 2y - x^2 - x = 0$, se tiene:

$$5y^4y' - 3y^2y' + 2y' - 2x - 1 = 0 \Rightarrow y'(5y^4 - 3y^2 + 2) - 2x - 1 = 0 \Rightarrow y' = \frac{1+2x}{5y^4 - 3y^2 + 2}.$$

Luego, el valor de la derivada en el punto (1, 1) será: $y' = \frac{1 + 2\cdot 1}{5\cdot 1^4 - 3\cdot 1^2 + 2} = \frac{3}{4}$.

Ejercicio:

Si y es una función de x, derivable, que verifica la ecuación $2x^2 + 6xy + y^2 - 18 = 0$, halla y' por derivación implícita. Comprueba que el punto (1, 2) pertenece a la gráfica de la ecuación y halla y' en ese punto.

→ Derivando directamente en la expresión $2x^2 + 6xy + y^2 - 18 = 0$ se tiene:

$$4x + 6y + 6xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow 2y'(3x + y) = -2(2x + 3y) \Rightarrow y' = -\frac{2x + 3y}{3x + y}.$$

Observa que el sumando $6xy$ se deriva implícitamente como un producto: $(6xy)' = 6y + 6xy'$.

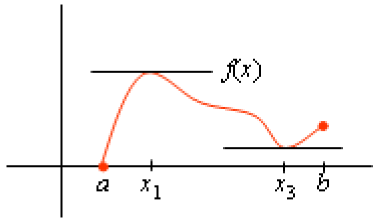
El punto (1, 2) es de la curva, pues $2\cdot 1^2 + 6\cdot 1\cdot 2 + 2^2 - 18 = 0$.

La derivada en ese punto valdrá: $y'(1,\ 2) = -\frac{2\cdot 1 + 3\cdot 2}{3\cdot 1 + 2} = -\frac{8}{5}$.

Este valor da la pendiente de la recta tangente a la curva asociada a $2x^2 + 6xy + y^2 - 18 = 0$, en el punto (1, 2); siendo la ecuación de esa recta tangente: $y - 2 = -\frac{8}{5}(x - 1)$.

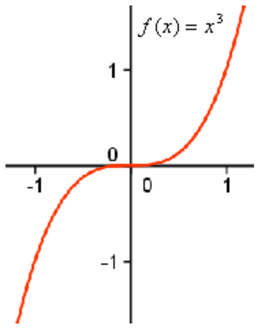
7. Propiedades de las funciones derivables. Teoremas de Rolle y del valor medio

7.1. Teorema del máximo. Teorema de Rolle



- Se dice que $f(x)$ tiene un <u>máximo local</u> (o relativo) en un punto x_1 si $f(x_1) \geq f(x)$, para todo x de un entorno de x_1.
- Se dice que $f(x)$ tiene un <u>mínimo local</u> (o relativo) en un punto x_3 si $f(x_3) \leq f(x)$, para todo x de un entorno de x_3.

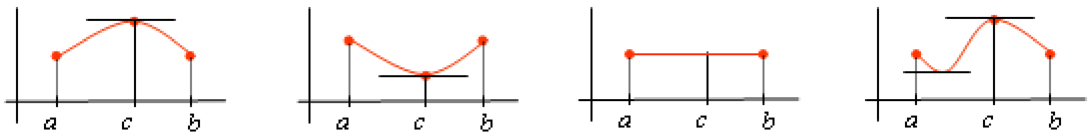
Teorema del máximo



Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo abierto (a, b). Si x_1 es un máximo de $f(x)$ en dicho intervalo y si $f'(x_1)$ existe, entonces $f'(x_1) = 0$.

- El recíproco del teorema no es cierto. Esto es, que la derivada sea 0 no asegura que el punto sea máximo. También basta con observar la figura adjunta, en la que se dibuja la gráfica de $f(x) = x^3$. Para esta función la derivada se anula en $x = 0$ y, sin embargo, en ese punto no hay máximo ni mínimo.

Teorema de Rolle (Francés, 1652/1719)
Si $f(x)$ es continua en [a, b] y derivable en (a, b), y si $f(a) = f(b)$, entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
<u>Geométricamente</u>, la comprobación es evidente: existe un punto –al menos– de ese intervalo, en el que la tangente a la curva es horizontal.

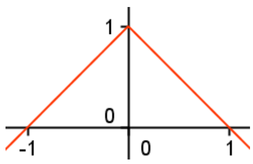


En ese punto c se da el máximo o el mínimo de $f(x)$ en ese intervalo.

Ejemplos:
a) La función $f(x) = x^2 + x + 2$ verifica las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [–2, 1], pues:

- es continua y derivable en todo **R**; en particular en el intervalo [–2, 1].
- $f(-2) = 4$ y $f(1) = 4$. Esto es, toma el mismo valor en los extremos del intervalo.

En consecuencia, existe un punto $c \in (-2, 1)$ en el que su derivada vale 0:
$$f'(x) = 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/2.$$
El valor $c = -1/2$ es el que asegura el teorema: $f'(-1/2) = 0$.

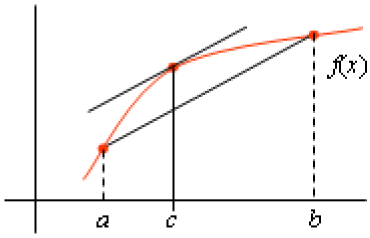


b) La función $f(x) = 1 - |x|$ no satisface las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [–1, 1], pues no es derivable en el punto $x = 0$ de ese intervalo. Por eso, aunque tenga máximo en $x = 0$, no se cumple que $f'(0) = 0$.

7.2. Teorema del valor medio de Lagrange (Italiano, 1736/1813)

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe algún punto $c \in (a, b)$ tal que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f´(c)$.

• Interpretación geométrica: existe un punto perteneciente al intervalo en el que la tangente a $f(x)$ es paralela a la secante que pasa por los puntos de abscisa *a* y *b*.



De otro modo: existe un punto del intervalo en el que la tasa de variación instantánea coincide con la tasa de variación media de todo el intervalo. Recuerda que la tasa de variación media de una función en un intervalo viene dada por la expresión: $TVM[a,b] = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

• Interpretación física: si se realiza un trayecto a velocidad media *v*, en algún instante de ese trayecto se ha llevado esa velocidad *v*.

Ejemplo:

La función $f(x) = x^3 - 6x$ es continua y derivable en el intervalo $[-2, 1] \Rightarrow \exists\, c,\ -2 < c < 1$ tal que $\dfrac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)} = f´(c)$.

En efecto: $\dfrac{-5-4}{1-(-2)} = 3x^2 - 6 \Rightarrow -3 = 3x^2 - 6 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1,\ x = 1$.

El valor que cumple el teorema es $x = -1$, el número que pertenece a $(-2, 1)$.

• Una aplicación. Con las mismas hipótesis, si $x \in (a, b)$, puede escribirse:

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f´(c) \Rightarrow f(x) = f(a) + f´(c)(x-a)$, con $c \in (a, x)$.

Y si se toma $x = a + h$, se tendrá: $f(x) = f(a) + h\cdot f´(a+\theta h)$, $0 < \theta < 1$, $c \in (a, x)$.

Cuando *h* es suficientemente pequeño, como se puso de manifiesto al definir la diferencia, puede aceptarse la aproximación $f(x) \approx f(a) + h\cdot f´(a)$.

Ejemplo:

Aplicando lo anterior puede darse un valor aproximado de $\sqrt{102}$. Véase:

Si se toma $f(x) = \sqrt{x}$, para $x = 102$, $a = 100$ y $h = 2$, se tiene:

$f(102) = f(100) + 2\cdot f´(100+2\theta) \Leftrightarrow \sqrt{102} = \sqrt{100} + 2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{100+2\theta}}$, pues $f´(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Como $f´(100+2\theta) = \dfrac{1}{2\sqrt{100+2\theta}} \approx \dfrac{1}{2\sqrt{100}} = \dfrac{1}{20} = 0{,}05$, el valor aproximado pedido será:

$$\sqrt{102} = \sqrt{100} + 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{100+2\theta}} \approx 10 + 2\cdot 0{,}05 = 10{,}1$$

Notas:

1. El valor obtenido con la calculadora es: $\sqrt{102} = 10{,}0995...$ La aproximación es muy buena.
2. Puede observarse que aplicando la diferencial (véase) se llega al mismo resultado.

7.3. Teorema de Cauchy (Francés, 1789/1857)

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en [*a*, *b*] y derivables en (*a*, *b*), y si $g(b) \neq g(a)$, y $f´(x)$ y $g´(x)$ no son ceros a la vez, entonces, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f´(c)}{g´(c)}.$$

Con las mismas hipótesis, si se toma $a < x < b$, existirá un punto $c \in (a, x)$ tal que

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f´(c)}{g´(c)} \Leftrightarrow [f(x)-f(a)]g´(c) = [g(x)-g(a)]f´(c).$$

Ejemplo:

Las funciones $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = 2x - 3$ son continuas y derivables en todo **R**, en particular en el intervalo [0, 1]. Para hallar el valor $c \in (0, 1)$ que cumple el teorema se procede así: $\dfrac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)} = \dfrac{f´(x)}{g´(x)} \Rightarrow \dfrac{6-1}{-1-(-3)} = \dfrac{6x+2}{2} \Rightarrow \dfrac{5}{2} = \dfrac{6x+2}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Ese es el valor de *c* buscado: $c = 1/2$.

8. Aplicación al cálculo de límites. Regla de L´Hôpital (Francés, 1661/1704)

Indeterminaciones:

En el cálculo de límites pueden aparecer siete expresiones (formas) indeterminadas. Son:

$$\left[\frac{0}{0}\right] \quad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad [0 \cdot \infty] \quad [\infty - \infty] \quad [1^{\infty}] \quad [0^0] \quad [\infty^0]$$

Hasta ahora, cuando se presentaba alguna de esas indeterminaciones, se resolvían, si era posible, mediante transformaciones algebraicas. Sirva como recordatorio el siguiente ejemplo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-2} = \frac{1}{-1} = -1.$$

A partir de ahora puede emplearse otro procedimiento más eficaz y que, además, permite estudiar una mayor variedad de funciones. Este procedimiento se sirve de las derivadas y recibe el nombre de regla de L´Hôpital.

8.1. Regla de L´Hôpital para resolver la indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$

En el caso de que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$ y de que $f(x)$ y $g(x)$ sean funciones derivables en un entorno de *a*, se cumple:

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, siendo $g(x) \neq 0$ en un entorno de *a*, si existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f´(x)}{g´(x)}$, entonces también existe $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, y se cumple que: $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f´(x)}{g´(x)}$.

(Esto es igualmente válido para los límites laterales o en el infinito: si $x \to a^+$, a^-, $+\infty$ o $-\infty$).

- Esto es, "el límite de un cociente del tipo $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ es igual al límite del cociente de las derivadas".

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$. Aplicando la regla de L´Hôpital: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{1}{1}=1$.

ERROR: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot x-x\cdot\sin x}{x^2}=(?)\to$ OJO: NO se hace la derivada del cociente; se hace el cociente de las derivadas.

b) La regla también se puede aplicar a funciones racionales. Así, por ejemplo,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x^2-3x+2}=\left[\frac{0}{0}\right]\to(L´H)=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{2x-3}=\frac{1}{-1}=-1.$$

Observación: La regla de L´Hôpital puede reiterarse. Así, en el ejemplo:

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x+x^2}{2x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\to(L´H)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+2x}{4x}=\left[\frac{0}{0}\right]\to(L´H)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x+2}{4}=\frac{3}{4}$.

8.2. Infinitésimos

Cuando $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ se dice que $f(x)$ es un infinitésimo en el punto $x = a$. Por tanto, la indeterminación $\left[\frac{0}{0}\right]$ es el cociente de dos infinitésimos. Surge cuando se plantea un límite como el siguiente: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$; esto es, cuando $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos en el punto $x = a$.

Comparación de infinitésimos

Los infinitésimos pueden compararse como sigue.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos en el punto $x = a$, entonces:

1) Si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ se dice que $f(x)$ es un infinitésimo de mayor orden que $g(x)$. Esto significa que $f(x)$ tiende a 0 a mayor velocidad que $g(x)$ cuando $x\to a$. O de otra manera más precisa: $f(x)$ es infinitamente más pequeño que $g(x)$ cuando $x\to a$.

2) Si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ se dice que $g(x)$ es un infinitésimo de mayor orden que $f(x)$.

3) Si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=l$ se dice que $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos del mismo orden.

4) Si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ se dice que $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes.

Ejemplos:

a) $f(x)=x^2-3x+2$ y $g(x)=(x-1)^2$ son infinitésimos en $x = 1$.

Como el $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{(x-1)^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-2}{x-1}=\left[\frac{-1}{0}\right]=\infty$, se concluye que $g(x)$ es un infinitésimo de mayor orden que $f(x)$.

b) En $x = 0$, los infinitésimos $f(x) = \sin x$ y $g(x) = x$ son equivalentes, pues $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

c) Las funciones $f(x) = x - 2$ y $g(x) = \frac{x}{2} - \cos(x-2)$ son infinitésimos del mismo orden en el punto $x = 2$, pues $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-2}{\frac{x}{2} - \cos(x-2)} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{\frac{1}{2} - \sin(x-2)} = \frac{1}{1/2} = 2$.

8.3. Regla de L´Hôpital para resolver la indeterminación $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

En el caso de que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ la regla puede formularse como sigue:

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, si existe $\lim\limits_{x\to a} \frac{f´(x)}{g´(x)}$, entonces también existe $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y se cumple que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f´(x)}{g´(x)}$.

(Es igualmente válido para los límites laterales o en el infinito: si $x \to a^+$, a^-, $+\infty$ o $-\infty$).

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Aplicando L´Hôpital: $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x}{\ln x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{1/x} = \frac{1}{0} = \infty$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \to (L´H) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$.

c) También se puede aplicar para funciones racionales:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2 - 3x + 1}{4x^2 + 5x - 2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \to (L´H) = \lim_{x\to +\infty} \frac{6x - 3}{8x + 5} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = (L´H) = \lim_{x\to +\infty} \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

8.4. Resolución de las formas [0 · ∞] e [∞ – ∞]

Para resolver las indeterminaciones del tipo [0 · ∞] e [∞ – ∞] hay que transformarlas, operando previamente, en alguna de las formas $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Si ese propósito se consigue, entonces se aplica la regla de L´Hôpital.

Ejemplos:

a) $\lim\limits_{x\to 0} ((1 - \cos x)\text{cotan } x) = [0\cdot\infty]$. (Recuerda que cotan 0 = 1/tan 0 = 1/0 = ∞).

Sustituyendo cotan x por 1/tan x se tiene:

$$\lim_{x\to 0} ((1 - \cos x)\text{cotan } x) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\tan x} = \left[\frac{0}{0}\right] = (L´H) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1 + \tan^2 x} = \frac{0}{1} = 0.$$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$ = [∞ – ∞]. Haciendo la resta indicada se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x-e^x+1}{(e^x-1)x}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{e^x x+e^x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{e^x x+2e^x}=-\frac{1}{2}.$$

8.5. Resolución de las formas [1^∞], [0^0] y [∞^0]

Si al intentar calcular $\lim_{x\to a} f(x)$ aparece alguna de estas formas (esto es: $\lim_{x\to a} f(x)=\left[1^\infty\right]$, o $\lim_{x\to a} f(x)=\left[0^0\right]$, o $\lim_{x\to a} f(x)=\left[\infty^0\right]$) se calculará, si se puede, el límite $\lim_{x\to a}\left(\ln\left(f(x)\right)\right)$.

Con esto, la indeterminación inicial se transforma en otra del tipo [0 · ∞], que se resolverá como se ha indicado antes.

Una vez resuelto, si $\lim_{x\to a}\left(\ln\left(f(x)\right)\right)=L$, se tiene que el límite buscado vale $\lim_{x\to a} f(x)=e^L$.

Recuerda:

1) Los límites cumplen la siguiente propiedad: $\lim_{x\to a}\ln\left[f(x)\right]=\ln\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$.

2) Por definición: ln $A = L \Leftrightarrow A = e^L$; y también: $\ln\left(B^p\right)=p\cdot\ln B$.

Ejemplos:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left[1^\infty\right]\to$ Aplicando logaritmos: $\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\left[\infty\cdot 0\right]=$

$$=\text{(transformando)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=(L´H)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-1/x^2}{1+1/x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1.$$

Por tanto, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^1=e\to$ (Este resultado suele tomarse como definición de e).

b) $\lim_{x\to 0^+}x^x=\left[0^0\right]\to$ Aplicando logaritmos: $\lim_{x\to 0^+}\ln x^x=\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\left[0\cdot(-\infty)\right]=$

$$=\text{(transformando)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L´H)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0^+}x^x=e^0=1$.

c) $\lim_{x\to\infty}\left(x^2+4\right)^{1/\ln x}=\left[\infty^0\right]\to$ Aplicando logaritmos:

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(x^2+4\right)^{1/\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(x^2+4\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2+4\right)}{\ln x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L´H)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x/(x^2+4)}{1/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=(L´H)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{2x}=2.$$

Por tanto, $\lim_{x\to\infty}\left(x^2+4\right)^{1/\ln x}=e^2$.

Problemas Propuestos

Derivada de una función en un punto

1. Utilizando la definición, calcula la derivada de $f(x)=x^3-3x$ en el punto $x = 1$.

2. Utilizando la definición, halla la derivada de la función $f(x)=\dfrac{3+x}{x-2}$ en el punto $x = 3$. Comprueba, mediante las reglas de derivación que tu resultado es correcto.

3. Aplicando la definición, estudia si la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+4x, & x\le 3\\ -2x+9 & x>3\end{cases}$ es derivable en el punto $x = 3$.

4. Aplicando la definición, estudia si la función $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0\\ x+1, & x\ge 0\end{cases}$ es derivable en $x = 0$.

5. En qué puntos no son derivables las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$ b) $f(x)=\sqrt{x}$

En cada caso indica el porqué.

6. Determina los puntos en los que no son derivables las funciones:

a) $f(x)=|x+1|$ b) $f(x)=|x^2-2x|$

7. Comprueba que la función $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{si } x\le 0\\ \ln(1+x^2), & \text{si } x>0\end{cases}$, es derivable en todo **R**.

8. Comprueba que la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+x^2, & x<0\\ -1+\sqrt{x+1}, & 0\le x\end{cases}$ es continua y derivable en todo **R**.

Haz un esbozo de su gráfica dando valores.

9. Estudia la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases}-x^2+x, & x\le 0\\ \sin x, & x>0\end{cases}$.

Derivabilidad de funciones definidas a trozos. Casos con parámetros

10. Dada la función $f(x)=\begin{cases}3-ax^2 & \text{si } x\le 1\\ \dfrac{2}{ax} & \text{si } x>1\end{cases}$ halla:

a) El valor o valores de *a* para que *f* sea continua.
b) El valor o valores de *a* para que *f* sea derivable.

11. ¿Qué valor hay que asignar a *a* para que la función $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & \text{si } x\le 0 \\ 2x+1, & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea derivable en $x = 0$?

12. Halla el valor de *a* que hace que la función $f(x)=\begin{cases} ax(x+1) & \text{si } x\le 0 \\ x(x-1)^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea derivable en todo **R**. Para el valor hallado haz un esbozo de su gráfica en el intervalo [–2, 2].

13. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & \text{si } x<2 \\ 2x & \text{si } x\ge 2 \end{cases}$:

a) ¿Pará qué valores de *a* y *b* es continua en $x = 2$?
b) ¿Pará qué valores de *a* y *b* es derivable en $x = 2$?

14. Determina los valores de *a* y *b* para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+2x & \text{si } x\le 0 \\ ax+b & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea derivable en el punto $x = 0$.

15. Determina los valores de *a* y *b* para que la función $f(x)=\begin{cases} 5+2\sin(ax) & \text{si } x\le 0 \\ ax^2+bx+b & \text{si } x>0 \end{cases}$ sea derivable en $x = 0$.

16. Demuestra que la función $f(x)=\begin{cases} \sin x & \text{si } x\le 0 \\ x-ax^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$ es derivable en toda la recta real.

<u>Tangente a una curva</u>

17. Halla la ecuación de la recta tangente a cada una de las curvas siguientes en los puntos que se indica:

a) $f(x)=-x^2+4x$ en el punto $x = 3$.
b) $y=\dfrac{2}{x+3}$ en el punto de abscisa $x = 1$.
c) $f(x)=\dfrac{4}{x}$ en el punto de abscisa $x = 2$.
d) $f(x)=\dfrac{6x}{4x^2+1}$ en el punto $x = 1$.
e) $f(x)=e^{-x+2}$ en el punto $x = 2$.
f) $f(x)=\ln(x-3)$ en el punto $x = 4$.

18. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ en el punto (0, *f*(0)).

19. La curva de ecuación $y=3x^2-1$ y la recta $y=4x+b$ son tangentes en el punto $x=\dfrac{2}{3}$. ¿Cuál debe ser el valor de *b*?

20. Halla la ecuación de la parábola $y=x^2+bx+c$ que es tangente a la recta $y=x$ en el punto (1, 1).

21. Determina los puntos de la curva $y=x^3-3x^2+2$ en los cuales la recta tangente es paralela $y=9x+5$. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes en esos puntos.

22. Determina el valor de *p* para que la recta tangente a la curva $y=e^{px}$, en el punto de abscisa $x = 1$, pase por el origen de coordenadas.

Cálculo de derivadas

23. Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado y calcula en cada caso $f'(-1)$, si existe.

a) $f(x)=(1+2x)\cdot(x-x^2)^3$ b) $f(x)=\ln\sqrt{2x^2-2x}$

24. Dada $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2-3)^3}$, halla los valores de $f'(1)$ y $f''(1)$.

25. Halla los puntos en los que se anulan las derivadas primera y segunda de $f(x)=\dfrac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$.

26. Halla el valor de las derivadas primera y segunda de $g(x)=\dfrac{e^{2x+1}}{(x-1)^2}$ en el punto $x=-\dfrac{1}{2}$.

27. Deriva las siguientes funciones simplificando el resultado. Calcula, si es posible, su valor en el punto $x = 0$:

a) $f(x)=-2xe^{x^2}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{2}\cos^2\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ c) $f(x)=(1-x)^2e^x$ d) $f(x)=\ln(2x^2+2)$

28. Deriva, simplificando los resultados, las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-x}{(2x-1)^2}$ b) $f(x)=(5x-4)^2e^{3x}$ c) $f(x)=\ln(3x^2+2x)-\cos\left(\dfrac{x-3}{3}\right)$

29. Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado cuando se pueda; calcula en todos los casos $f'(1)$, si existe.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3+x^2}{x-1}$ b) $f(x)=(2-3x)\sqrt{3x^4-2x}$ c) $f(x)=\sin^2\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$

30. Deriva las siguientes funciones. Simplifica el resultado y calcula en cada caso $f'(-1)$, si existe.

a) $f(x)=\dfrac{2x^3-3x}{x^2-1}$ b) $f(x)=x^2e^{2x-2}$ c) $f(x)=\sin(1+x)^2-\cos(\pi x)$

31. Halla la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $y=2^{3x^2-x}$ b) $f(x)=(\cos x^2)^3$ c) $f(x)=(\cos 2x)^3$ d) $y=\operatorname{tag}(3x+2)$

e) $y=\operatorname{tag}(x^3+2)$ f) $y=\operatorname{tag}(x+2)^3$ g) $y=\arcsin 3x$ h) $y=\arcsin\dfrac{x}{3}$

i) $y=\sqrt{9-x^2}$ j) $y=\arcsin x^3$ k) $y=\sqrt{1-x^6}$ l) $y=\arccos(1+x)$

m) $y=\arctan 4x$ n) $y=\arctan\dfrac{x}{4}$ o) $y=\ln(16+x^2)$ p) $y=\arctan\sqrt{x}$

Derivación logarítmica

32. Aplicando las propiedades de los logaritmos, halla y simplifica la derivada de las funciones:

a) $y = \ln\left(x^2 + 5x\right)^3$ b) $f(x) = \ln\sqrt{2x^2 - 2x}$ c) $y = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

33. Aplicando logaritmos halla la derivada de:

a) $f(x) = \left(x^2+1\right)^{(3x-2)}$ b) $f(x) = x^{\sin x}$ c) $f(x) = x^{\ln x}$ d) $f(x) = \left(e^x\right)^{e^x}$

34. A partir de las fórmulas de las derivadas de $f(x) = \sin x$ y $f(x) = \cos x$ halla las fórmulas de las derivadas de las funciones:

a) $f(x) = \operatorname{cosec} x$ b) $f(x) = \sec x$ c) $f(x) = \operatorname{cotan} x$

35. Partiendo de la definición de arco coseno y arco tangente deduce las funciones derivadas de:

a) $f(x) = \arccos x$ b) $f(x) = \operatorname{arctag} x$

36. Halla la derivada *n*-ésima de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln x$ b) $f(x) = \ln(2x-1)$ c) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

37. Halla la derivada *n*-ésima de las funciones:

a) $f(x) = e^{2x}$ b) $f(x) = xe^x$ c) $f(x) = e^{-x}$

Diferencial de una función

38. Halla la diferencial de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$ b) $y = e^{-x}$ c) $u = \cos^2 x$ d) $u = \sqrt{x+1}$

39. ¿Cuál es el incremento (la variación aproximada) de cada una de las siguientes funciones cuando, partiendo de $x = 2$, la variable x se incrementa en 0,2?

a) $f(x) = \ln(x-1)$ b) $f(x) = xe^{2-x}$ c) $f(x) = \sqrt{x-1}$

40. Teniendo en cuenta que $\sqrt{64} = 8$, utilizando la diferencial de la función $f(x) = \sqrt{x}$, halla el valor aproximado de $\sqrt{65}$.

Derivación implícita

41. Para cada una de las siguientes ecuaciones, halla el valor de y' en el punto (1, 2) de su gráfica:

a) $x^2 + 2y^2 = 9$ b) $\sqrt{x} + \sqrt{2y} - 3 = 0$ c) $y^2 - 2xy + x^2 - 2x + 1 = 0$

42. Dada la circunferencia de ecuación $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$, halla la ecuación de la recta tangente a ella en el punto (4, –1).

Propiedades de las funciones derivables. Teoremas de Rolle y del valor medio

43. ¿Verifica la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$ el teorema de Rolle en el intervalo [–1, 3]? En caso afirmativo halla el punto que afirma el teorema.

44. (Propuesto en Selectividad)
¿Se verifica el teorema de Rolle para la función $f(x) = |2x - 3| - 7$, $-2 \le x \le 5$?

45. Halla el punto que verifica el teorema del valor medio para la función $f(x) = x^3 - 3x$, en el intervalo [–2, 0].

46. Halla el punto que verifica el teorema del valor medio para la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en el intervalo (a, $2a$), $a \ne 0$. Concrétalo cuando $a = 2$.

47. (Propuesto en Selectividad)
Aplica el teorema del valor medio a la función $f(x) = \ln x$ en el intervalo (1, e^2), determinando el valor de c, $1 < c < e^2$, para el que se verifica dicho teorema.

48. Demuestra que el valor que verifica el teorema del valor medio para $f(x) = x^2 - ax + 3$, en el intervalo (1, 4), no depende de a. ¿Cuál es ese valor?

49. (Propuesto en EBAU 2018, Navarra)
Demuestra que existe $\alpha \in (0, 2)$ tal que $f'(\alpha) = 1$, siendo

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi + \pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \ln\left(2e^x + 2x - x^2\right).$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

50. (Propuesto en EvAU 2017, Castilla–La Mancha)
Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & \text{si } x \le 2 \\ -x^2 + bx - 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Calcula razonadamente los parámetros a y b para que $f(x)$ sea derivable en todo **R**.
b) Enuncia el teorema de Rolle y comprueba si, para los valores hallados en el apartado anterior, la función $f(x)$ verifica las hipótesis del teorema en el intervalo [–2, 6].

Aplicación al cálculo de límites. Regla de L´Hôpital

51. Aplicando la regla de L´Hôpital halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{(2x-1)^2}{4x^2 + 1}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{4x}$

52. Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{x \sin x}{\sqrt{3 - \cos 2x}}$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - x - \cos x}{\sin^2 x}$

53. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x \cdot \ln x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{xe^{1/x}}{2}$

54. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} \right)$ b) $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{e^x}{1-x} - \dfrac{x}{\ln x} \right)$

55. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x-e^x}{\sin^2 x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-2x-\cos x}{x \cdot \sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)^2}{e^{x^2}-1}$

56. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\ln(x)}{e^x}$ b) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-\ln(3-x)}{(2-x)^2}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{x^2}}{x}$

57. Halla el valor de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} (2x+1)^{1/x}$ b) $\lim\limits_{x\to 1/2} 3^{1/(2x-1)}$

58. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x - 2\sin x)^{1/2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x)^{2/\sin x}$

59. Calcula, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

60. Halla los valores de a y b para que los infinitésimos en $x = 1$, $f(x) = \dfrac{x-1}{ax}$ y $g(x) = \dfrac{x^2-1}{bx^2}$, sean equivalentes.

61. Determina el valor de p para que los infinitésimos, en $x = 1$, $f(x) = px\ln x$ y $g(x) = x - e^{1-x}$ sean equivalentes.

62. ¿Existe algún valor de x en el que las funciones $f(x) = x^2 - p^2$ y $g(x) = x^2 + (1-p)x - p$, sean infinitésimos del mismo orden?

<u>Otras aplicaciones de los límites</u>

63. ¿Qué valor hay que asignar a p para que la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ p & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sea continua en $x = 0$.

64. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{\sin(x-1)}{x^2-3x+2}$.

65. Halla las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{\ln x^2}{x}$. Indica también la posición de la curva respecto de las asíntotas.

66. Dependiendo de los valores de p, estudia la continuidad de la función dada por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^x-1}{px} & \text{si } x<0\\[2mm] \dfrac{\cos x}{x^2+1} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$$

Soluciones

1. 0. **2**. –5. **3**. Si. **4**. No.

5. a) $x=-3$. b) $x\leq 0$. **6**. a) $x=-1$. b) $x=0$; $x=2$.

9. Derivable siempre. **10**. a) $a=1$ o $a=2$. b) $a=1$.

11. $a=2$. **12**. $a=1$. **13**. a) $b=-2a$, con a arbitrario. b) $a=-2$ y $b=4$.

14. $a=2$ y $b=0$. **15**. $b=5$; $a=\dfrac{5}{2}$.

17. a) $y=-2x+9$. b) $y=-\dfrac{1}{8}x+\dfrac{5}{8}$. c) $y=-x+4$. d) $y=-\dfrac{18}{25}x+\dfrac{48}{25}$. e) $y=-x+3$. f) $y=x-4$.

18. $y=2x$. **19**. $b=-\dfrac{7}{3}$ **20**. $y=x^2-x+1$.

21. (–1, –2) y (3, 2). $y=9x+7$; $y=9x-25$.

22. $p=1$.

23. a) $f'(x)=\left(3+2x-14x^2\right)\left(x-x^2\right)^2$; –52. b) $f'(x)=\dfrac{2x-1}{2x^2-2x}$; –3/4.

24. $f'(x)=\dfrac{-10x^2-6}{(x^2-3)^4}$; $f''(x)=\dfrac{60x^3+108x}{(x^2-3)^5}$; –1; –21/4.

25. $x=\pm\dfrac{1}{2}$; $x=0$ o $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **26**. $\dfrac{40}{27}$; $\dfrac{16}{3}$.

27. a) $f'(x)=-2e^{x^2}(1+2x^2)$; –2. b) $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cos\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\cdot\left(-\sin\left(\dfrac{x}{x-1}\right)\right)\cdot\left(\dfrac{x-1-x}{(x-1)^2}\right)$; 0.

c) $f'(x)=\left(x^2-1\right)e^x$; –1. d) $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$; 0.

28. a) $f'(x)=\dfrac{1}{(2x-1)^3}$. b) $f'(x)=(15x-2)(5x-4)e^{3x}$. c) $f'(x)=\dfrac{6x+2}{3x^2+2x}+\sin\left(\dfrac{x-3}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{3}$.

29. a) $f'(x)=\dfrac{4x^3-5x^2-2x}{(x-1)^2}$; no existe. b) $f'(x)=-3\sqrt{3x^4-2x}+(2-3x)\cdot\dfrac{6x^3-1}{\sqrt{3x^4-2x}}$; –8.

c) $f'(x)=\sin\dfrac{x-1}{2}\cdot\cos\dfrac{x-1}{2}$; 0.

30. a) $f'(x)=\dfrac{2x^4-3x^2+3}{\left(x^2-1\right)^2}$; no existe. b) $f'(x)=2x(1+x)e^{2x-2}$; 0.

c) $f'(x)=2(1+x)\cdot\cos(1+x)^2+\pi\cdot\sin(\pi x)$; 0.

31. a) $y'=(6x-1)\cdot 2^{3x^2-1}\ln 2$. b) $f'(x)=-6x\cdot\sin x^2\cdot\left(\cos x^2\right)^2$. c) $f'(x)=-6\cdot\sin 2x\cdot(\cos 2x)^2$.

d) $y'=\dfrac{3}{\cos^2(3x+2)}$. e) $y'=\dfrac{3x^2}{\cos^2(x^3+2)}$. f) $y'=3(x+2)^2\left(1+\text{tag}^2\,(x+2)^3\right)$.

g) $y'=\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$. h) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$. i) $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{9-x^2}}$. j) $y'=\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$. k) $y'=\dfrac{-3x^5}{\sqrt{1-x^6}}$.

l) $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{x(-x-2)}}$. m) $y'=\dfrac{4}{1+16x^2}$. n) $y'=\dfrac{4}{16+x^2}$. o) $y'\dfrac{2x}{16+x^2}$. p) $y'=\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

32. a) $y'=\dfrac{6x+15}{x^2+5x}$. b) $f'(x)=\dfrac{2x-1}{2x^2-2x}$. c) $y'=\dfrac{-4x}{x^4-1}$.

33. a) $f'(x)=\left(x^2+1\right)^{3x-2}\cdot\left(3\ln(x^2+1)+(3x-2)\cdot\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$. b) $f'(x)=x^{\sin x}\cdot\left((\cos x)\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

c) $f'(x)=x^{\ln x}\cdot\dfrac{2}{x}\ln x$. d) $f'(x)=\left(e^x\right)^{e^x}(e^x+xe^x)$.

34. a) $f'(x)=-\text{cotag}\,x\cdot\text{cosec}\,x$. b) $f'(x)=\tan x\cdot\sec x$. c) $f'(x)=-(\text{cosec}\,x)^2$.

36. a) $f^{n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}$. b) $f^{n)}(x)=\dfrac{(-1)^n\cdot((n-1)!)\cdot 2^n}{(2x-1)^n}$. c) $f^{n)}(x)=\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.

37. a) $f^{n)}(x)=2^n e^{2x}$. b) $f^{n)}(x)=ne^x+xe^x$. c) $f^{n)}(x)=-e^{-x}$, n impar; $f^{n)}(x)=e^{-x}$, n par.

38. a) $dy=\left(6x^2-6x\right)dx$. b) $dy=-e^{-x}dx$. c) $du=2\cos x\cdot(-\sin x)dx$. d) $du=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}dx$.

39. a) 0,2. b) –0,2. c) 0,1.

40. 8,0625.

41. a) $y'=-\dfrac{x}{2y}$; –1/4. b) $y'=-\dfrac{\sqrt{2y}}{2\sqrt{x}}$; –1. c) $y'=\dfrac{y-x+1}{y-x}$; 2.

42. $y+1=\dfrac{3}{4}(x-4)$. **43**. c = 1. **44**. No.

45. $x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **46**. $c=a\sqrt{2}$; $c=2\sqrt{2}$.

47. $x=\dfrac{e^2-1}{2}$. **48**. $x=\dfrac{5}{2}$.

49. Teorema del valor medio. **50**. a) a = –1; b = 8. b) Sí.

51. a) 1. b) 1/2. c) 3/2. **52**. a) π/4. b) 2. c) 1.

53. a) 0. b) +∞. **54**. a) 1/2. b) ∞.

55. a) –1/2. b) 5/2. c) 1. **56**. a) 0. b) +∞. c) +∞. d) +∞.

57. a) e^2. b) 0; +∞. **58**. a) e^{-1}. b) 1.

59. a) 1. b) 1. **60**. $b = 2a$. **61**. p = 2.

62. Infinitésimos del mismo orden en $x = p$ siempre que $p \neq 0$ y –1.

63. p = 0. **64**. x = 2; $y=0$.

65. x = 0; y = 0. **66**. p = ln 2.