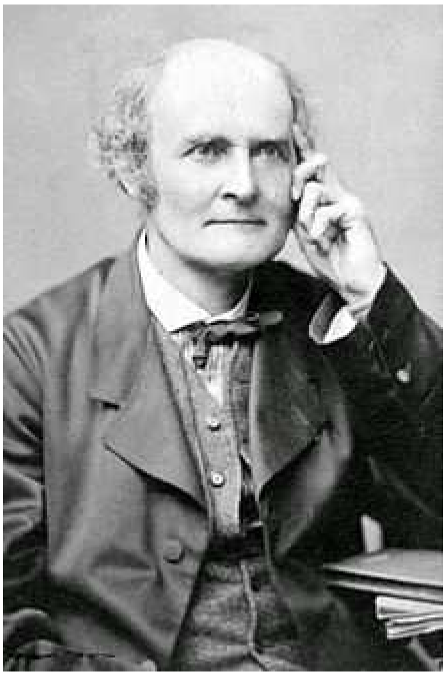
MATRICES y GRAFOS



El inglés Arthur ***Cailey*** *(1821-1895), introductor en 1855 de la notación matricial actual.*

MATEMÁTICAS II 2º Bachillerato

Alfonso González
IES Fernando de Mena
Dpto. de Matemáticas

I.E.S. "Fernando de Mena"
Socuéllamos (Ciudad Real)

I. DEFINICIONES [1]

Definición: «Una **matriz m**x**n** es una ordenación de números dispuestos en **m** filas y **n** columnas»

Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \end{pmatrix}_{3\times4}$$

dimensión (u orden)

nº filas

nº columnas

Definición: «El elemento $\mathbf{a_{ij}}$ de la matriz A es el elemento que ocupa la fila **i** y la columna **j** de dicha matriz»:

Ejemplo: En la matriz del ejemplo anterior, $a_{32}=7$ ¿Cuánto vale a_{14}? ¿Y a_{22}?

En general,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & .. & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & .. & .. & a_{2n} \\ .. & & & & & .. \\ .. & & & & & .. \\ .. & & & & & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & .. & .. & a_{mn} \end{pmatrix}_{mxn}$$

Reseña histórica: Aunque siempre se habían utilizado "cajas" para ordenar datos, el estudio sistemático de matrices lo llevaron a cabo matemáticos ingleses en la 2ª mitad del siglo XIX, en estrecha relación con la Geometría: fue James Joseph Sylvester (1814-1897) quien utilizó por primera vez el término "matriz" en 1848-1850. En 1853, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) hizo importantes aportaciones a la teoría de matrices. Por su parte, Arthur Cayley (1821-1895) introdujo en 1858 la notación matricial, como forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Utilidad de las matrices:
- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Problemas de Geometría.
- Problemas de tablas y grafos (Economía, etc.)

Definición: «Dos **matrices** son **iguales** si tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar son iguales»

Ejemplos: Las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ x & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 1 & y \\ 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

serán iguales sii x=2 e y=–5. En cambio,

$$C=\begin{pmatrix} x & -2 & 2 \\ 7 & 1 & 11 \\ 0 & y & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad D=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 11 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

[1] Para reforzar todo lo tratado en este apartado, ver págs. 50 y ss. del libro de ed. Anaya.

o

$$C=\begin{pmatrix}2 & x & -2 & 7\\ 0 & 1 & y & -5\end{pmatrix} \quad y \quad D=\begin{pmatrix}2 & 2 & z\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

nunca podrán ser iguales ¿Por qué?

II. TIPOS de MATRICES [2]

II.1 Desde el punto de vista de su forma o dimensión:

Matriz fila: «Es aquella que consta de una sola fila». También se suele llamar vector fila. Por ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1 & 5\end{pmatrix}_{1x4}$$

Matriz columna: «Es aquella que consta de una sola columna». También se suele llamar vector columna. Por ejemplo:

$$B=\begin{pmatrix}4\\ 0\\ 3\end{pmatrix}_{3x1}$$

Matriz cuadrada: «Es aquella que tiene mismo número de filas y columnas». Por ejemplo:

$$C=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}_{2x2}$$

Matriz rectangular: «Es aquella que tiene distinto número de filas y columnas (es decir, que no es cuadrada)». Por ejemplo:

$$D=\begin{pmatrix}0 & 4 & 12\\ -5 & 4 & 0\\ 10 & 1/2 & 1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}_{4x3}$$

También, obviamente, toda matriz fila, o columna, es rectangular.

Diagonal de una matriz: «Está formada por los elementos que ocupan el mismo nº de fila y columna». Por ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 0 & -2\\ 4 & 7 & -3 & 9\end{pmatrix}_{3x4}$$

diagonal

:

[2] Ver pág. 50 del libro de ed. Anaya.

II.2 Matriz traspuesta: «Dada una matriz A, se define su traspuesta, que se designa como $\mathbf{A^t}$ (también, a veces, $^{\mathbf{t}}\mathbf{A}$) como aquella que se obtiene cambiando ordenadamente sus filas por sus columnas». Por lo tanto, obviamente si A es mxn, A^t será nxm.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

¿Cómo sería la traspuesta de una matriz fila?

Esta matriz traspuesta jugará un papel fundamental cuando definamos la matriz inversa en el próximo tema.

II.3 Desde el punto de vista de sus elementos:

Matriz nula: «Es aquella que está formada completamente por ceros». Se designa como **0**. Ejemplos de matrices nulas son:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2x2} \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{4x3} \qquad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2x3} \qquad \text{etc.}$$

Matriz opuesta: «Dada una matriz A se define su opuesta, que se designa como **–A**, como aquella que se obtiene cambiando de signo todos sus elementos». Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & -2 \\ 4 & 7 & -3 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow -A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & 0 & 2 \\ -4 & -7 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal: «Es aquella que tiene nulos todos los elementos que no están en la diagonal». Ejemplos de matrices diagonales son:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz identidad o unidad: «Es una matriz diagonal cuadrada cuyos elementos de la diagonal son todos 1. Se designa como $\mathbb{1}$ o $\mathbb{I}$». Ejemplos de matrices identidad:

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{2x2} \qquad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \qquad \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{4x4} \qquad \text{etc.}$$

Esta matriz será importante cuando definamos la matriz inversa en el próximo tema.

Matriz triangular superior: «Es aquella matriz cuyos elementos por encima de la diagonal son todos nulos». Ejemplos de matrices triangulares superiores serían:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz triangular inferior: «Es aquella matriz cuyos elementos por debajo de la diagonal son todos nulos». Ejemplos de matrices triangulares inferiores serían:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz simétrica: «Es aquella matriz que coincide con su traspuesta, es decir, $\mathbf{A=A^t}$». Puede comprobarse que las siguientes matrices son simétricas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1/3 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1/3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es obvio que, para que una matriz sea simétrica, es indispensable que sea cuadrada. Además, cada elemento tiene que ser simétrico respecto a la diagonal.

Matriz antisimétrica: «Es aquella matriz que coincide con la opuesta de su traspuesta, es decir, $\mathbf{A=-A^t}$». Puede comprobarse que las siguientes matrices son antisimétricas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & -3 & -1/3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1/3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Una matriz antisimétrica, evidentemente, ha de ser cuadrada. Además, cada elemento tiene que ser simétricamente opuesto respecto a la diagonal, la cual a su vez tiene que estar formada completamente por ceros.

Ejercicios final tema: 1 y 2

III. OPERACIONES con MATRICES

III.1 SUMA de MATRICES [3]

«Para poder sumar dos matrices: **1º** Ambas tienen que tener la misma dimensión

2º En tal caso, se suman término a término»

[3] Ver págs. 52 y 56 del libro de ed. Anaya.

NOTA: Es obvio que, para restar dos matrices, sumaremos a la primera la opuesta de la segunda, o más sencillamente, restaremos término a término.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

	CONMUTATIVA:	$A+B=B+A$
	ASOCIATIVA:	$(A+B)+C=A+(B+C)$
	ELEMENTO NEUTRO:	La matriz nula, 0, tal que $A+0=A$
	ELEMENTO OPUESTO:	La matriz opuesta, $-A$, tal que $A+(-A)=0$

Todas ellas son de inmediata demostración. Estas propiedades hacen que las matrices sean un **grupo abeliano** con la adición[4].

III.2 PRODUCTO de un NÚMERO por una MATRIZ [5]

Supongamos que nos planteamos cómo sería, por ejemplo, el triple de una matriz, es decir, la operación 3A. Es obvio que sería equivalente a A+A+A. Investiguemos con un ejemplo:

$$3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 0 & -9 & 12 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto: «Para multiplicar una matriz por un número se multiplican por dicho número todos los elementos de la matriz»

Ejemplos:

$$2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$4\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$-3\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

	DISTRIBUTIVA respecto al producto por un número:	$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
	DISTRIBUTIVA respecto al producto por una matriz:	$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
	ASOCIATIVA MIXTA:	$\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$

[4] En honor del matemático noruego Niels Henrik Abel (1802-1829)

[5] Ver págs. 52 y 56 del libro de ed. Anaya.

Todas estas propiedades son de inmediata demostración.

Ejercicio: Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 2\\ 1 & -1 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & -1 & -1\end{pmatrix}$, se pide:

a) Indicar de qué tipo son.

b) Obtener la traspuesta de A

c) Indicar la opuesta de B

d) Hallar: $A+A^t=$ $2A=$

$-3B=$ $3A-2A^t=$ $A+B=$

Ejercicios final tema: 3

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 52: 1 (Comprobación de las propiedades de λA)

III.3 PRODUCTO de MATRICES [6]

El producto de dos matrices no se define, como cabría esperar, multiplicando los elementos que ocupan el mismo lugar. La razón es que la multiplicación así definida no tendría ninguna utilidad. Vamos a explicar a continuación cómo se define el producto de dos matrices. A priori puede parecer una forma caprichosa pero cuando se estudien las aplicaciones lineales en 1º de cualquier estudio universitario de ciencias se entenderá el porqué.

Para poder multiplicar dos matrices:

1º Dimensionalmente, el número de columnas de la 1ª matriz debe ser igual[7] al número de filas de la 2ª; entonces, la matriz resultante tendrá el mismo nº de filas que la 1ª y de columnas que la 2ª. En lenguaje matricial:

$$A_{m\mathrm{x}n}\cdot B_{n\mathrm{x}p}=C_{m\mathrm{x}p}$$

2º En tal caso, «el elemento **ij** de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la fila **i** de la 1ª matriz por cada elemento de la columna **j** de la 2ª, y sumando dichos productos»

[6] Ver págs. 54 y 57 del libro de ed. Anaya.

[7] La razón hay que buscarla en la 2ª condición.

Ejemplo: Vamos a explicar, paso a paso, cómo se multiplican las siguientes dos matrices:

$$\begin{pmatrix}1&-3\\0&2\end{pmatrix}_{2x2}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&4\\-1&3&5\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}*&*&*\\*&*&*\end{pmatrix}_{2x3}$$

Vemos, en primer lugar, que dimensionalmente el producto es posible, y que la matriz producto va a ser 2x3. Pasemos a obtener su primer elemento, el $\mathbf{c_{11}}$, que se obtendrá multiplicando la fila 1 de A y la columna 1 de B:

$$\begin{pmatrix}\boxed{1\quad -3}\\0&2\end{pmatrix}_{2x2}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&4\\-1&3&5\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}\boxed{1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)}&*&*\\ *&*&*\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}1&*&*\\ *&*&*\end{pmatrix}$$

El $\mathbf{c_{12}}$ se obtendrá multiplicando la misma fila 1 de A y la siguiente columna, la 2, de B:

$$\begin{pmatrix}\boxed{1\quad -3}\\0&2\end{pmatrix}_{2x2}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&4\\-1&3&5\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)&\boxed{1\cdot 0+(-3)\cdot 3}&*\\ *&*&*\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}1&-9&*\\ *&*&*\end{pmatrix}$$

El $\mathbf{c_{13}}$ se obtendrá multiplicando la misma fila 1 de A y la última columna de B, la 3:

$$\begin{pmatrix}\boxed{1\quad -3}\\0&2\end{pmatrix}_{2x2}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&4\\-1&3&5\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)&1\cdot 0+(-3)\cdot 3&\boxed{1\cdot 4+(-3)\cdot 5}\\ *&*&*\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}1&-9&-11\\ *&*&*\end{pmatrix}$$

Para obtener $\mathbf{c_{21}}$ pasamos a multiplicar la fila 2 de A por la columna 1 de B:

$$\begin{pmatrix}1&-3\\ \boxed{0\quad 2}\end{pmatrix}_{2x2}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&4\\-1&3&5\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)&1\cdot 0+(-3)\cdot 3&1\cdot 4+(-3)\cdot 5\\ \boxed{0\cdot(-2)+2\cdot(-1)}&*&*\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}1&-9&-11\\ -2&*&*\end{pmatrix}$$

Para obtener $\mathbf{c_{22}}$ multiplicamos la misma fila de A, la 2, por la columna 2 de B:

$$\begin{pmatrix}1&-3\\ \boxed{0\quad 2}\end{pmatrix}_{2x2}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&4\\-1&3&5\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)&1\cdot 0+(-3)\cdot 3&1\cdot 4+(-3)\cdot 5\\ 0\cdot(-2)+2\cdot(-1)&\boxed{0\cdot 0+2\cdot 3}&*\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}1&-9&-11\\ -2&6&*\end{pmatrix}$$

Finalmente, $\mathbf{c_{23}}$ lo obtendremos multiplicando la fila 2 de A por la columna 3 de B:

$$\begin{pmatrix}1&-3\\ \boxed{0\quad 2}\end{pmatrix}_{2x2}\cdot\begin{pmatrix}-2&0&4\\-1&3&5\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)&1\cdot 0+(-3)\cdot 3&1\cdot 4+(-3)\cdot 5\\ 0\cdot(-2)+2\cdot(-1)&0\cdot 0+2\cdot 3&\boxed{0\cdot 4+2\cdot 5}\end{pmatrix}_{2x3}=\begin{pmatrix}1&-9&-11\\ -2&6&10\end{pmatrix}$$

NOTA: No es obligatorio indicar el · entre ambas matrices.

Ejercicio: Efectuar los siguientes productos de matrices, cuando se pueda:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}=$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}=$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

f) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}=$

g) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}=$

h) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}=$

i) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}=$

Propiedades:

NO ES CONMUTATIVO:	$\mathbf{A\cdot B\neq B\cdot A}$ en general
ASOCIATIVA:	$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
ELEMENTO NEUTRO: La matriz identidad o unidad, $\mathbb{1}$ o $\mathbb{I}$:	$A\cdot\mathbb{1}=\mathbb{1}\cdot A=A$
DISTRIBUTIVA: por la dcha.	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
por la izda.	$(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$

Algunas de estas propiedades requieren una demostración relativamente complicada… Nosotros aquí vamos más bien a justificarlas mediante ejemplos prácticos:

Ejercicios final tema: 4 a 11 ← operaciones con matrices
12 a 16 ← potencias n-ésimas de matrices, con posible ley de recurrencia
17 a 20 ← matrices que conmutan
21 a 25 ← miscelánea
26 a 33 ← aplicación de las matrices a tablas y grafos

Ejercicio PAEG: 4B jun 2000 (SSEE matricial sencillo); 3A jun 2011 (potencia n-ésima + SS.EE. matricial)

Ejercicios libro ed. Anaya: pág. 55:2; pág. 57: 2 (comprobar propiedades); pág. 61: 3 a 10; pág. 72 y ss.:1 a 9, 21, 22, 32, 34, **35**, 36 (operaciones con matrices), 10 a 15 (ecuaciones y sistemas matriciales sencillos), 30 y 31 (aplicación de las matrices a tablas y grafos), 37 a 40, 43, 45, 48 (teórico-prácticos)

III.4 USO de DERIVE PARA MATRICES y DETERMINANTES

- **Introducir una matriz:**

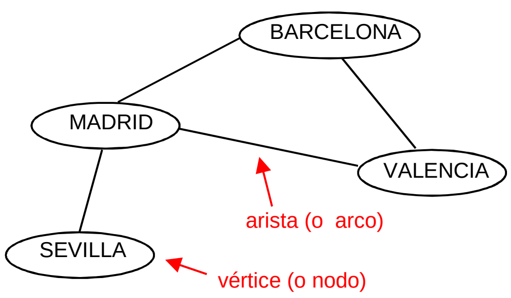
- **Trasponer una matriz:** [ ]\` + =

- Una vez introducidas varias matrices, se pueden operar en la forma usual.

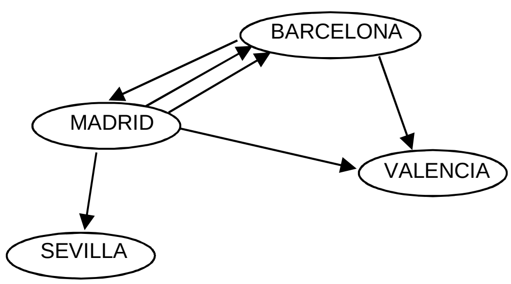
- **Potencia de una matriz:** [ ]^n + =

IV. GRAFOS Y MATRICES DE ADYACENCIA

Un **grafo** (del griego *grafein*, trazar) es una forma de representar de una manera cómoda las posibles relaciones entre objetos:



Ejemplo 1: Hipotética red del AVE



Ejemplo 2: Vuelos diarios de una compañía

Tipos de grafos

- **Dirigidos:** El ejemplo 2, o la red de aguas de una ciudad, o un organigrama con una serie de tareas.
- **No dirigidos:** El ejemplo 1, o la red de carreteras de un país, o la red telefónica. (Pueden verse como un caso particular, bidireccional, de los anteriores).

Matriz de adyacencia de un grafo: Es una matriz cuadrada que se utiliza para representar un grafo, de forma que sus filas y columnas representan ordenadamente los vértices del grafo, y cada elemento **ij** indica el nº de aristas entre el vértice **i** y el vértice **j**.

Observaciones: 1ª) Cada grafo tiene una matriz de adyacencia única, y viceversa. (En el caso de un grafo no dirigido, es importante remarcar que el elemento ij de la matriz de adyacencia indica la relación entre el vértice i y el vértice j, ¡y no al revés!).

2ª) Se denomina matriz de adyacencia, obviamente, porque indica cómo es la relación entre vértices adyacentes.

Veamos cómo son las matrices de adyacencia de los ejemplos anteriores:

Ejemplo 1:

Previamente, ordenamos alfabéticamente las distintas ciudades para situarlas en las filas y columnas:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} B & M & S & V \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ M \\ S \\ V \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ejemplo 2:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} B & M & S & V \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ M \\ S \\ V \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Observaciones: 1ª) Obviamente, la matriz de adyacencia de un grafo no dirigido siempre es simétrica.

2ª) Algunos autores sólo consideran matrices de adyacencia binarias, es decir, compuestas de 0 y 1, por lo que sus elementos sólo indican si hay relación (1) o no (0) entre vértices.

3ª) La diagonal no siempre va a estar compuesta por 0: ¡Puede haber bucles!

Ejercicios final tema: 34, 35 y 36

36 EJERCICIOS de MATRICES y GRAFOS 2º BACH.

1. Hallar x e y para que ambas matrices sean iguales: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & x & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 & 3 & 0 \\ y & 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

2. Indicar tres ejemplos de matriz simétrica de orden 3

Operaciones con matrices:

3. Dadas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & 0 \\ 1/2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

hallar: **a)** A+B **b)** –B **c)** A–B **d)** 2C **e)** –3A **f)** A+3B–4C

4. Dadas: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

hallar: **a)** A·B **b)** B·A **c)** A·C **d)** C·A **e)** B·C **f)** C·B **g)** B^2 **h)** A^2 **i)** $B\cdot B^t$ **j)** B^3 **k)** $B\cdot \mathbb{1}_{3x3}$

(Sol: ***a)*** $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ -4 & 8 & -4 \end{pmatrix}$; ***b)*** *No se puede;* ***c)*** $\begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$; ***d)*** *No se puede;* ***e)*** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$; ***f)*** $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 \\ -5 & 1 & 11 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix}$; ***g)*** $\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ 5 & 11 & -1 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$;
h) *No se puede;* ***i)*** $\begin{pmatrix} 9 & 8 & 10 \\ 8 & 10 & 12 \\ 10 & 12 & 20 \end{pmatrix}$; ***j)*** $\begin{pmatrix} 18 & 30 & -6 \\ 21 & 39 & -3 \\ 12 & 36 & -12 \end{pmatrix}$; ***k)*** *B)*

5. Dada una matriz A, ¿existe una matriz B, tal que el producto AB, o bien el BA, sea una matriz de una sola fila? Indicar ejemplos.

6. Comprobar si existe una matriz B tal que el producto AB sea una matriz de tres filas, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

7. Dadas las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

escribir los productos AB y BA.

8. El producto de dos matrices diagonales es otra matriz diagonal. Comprobarlo para dos matrices de orden 3.

9. Resolver la ecuación matricial siguiente e indicar la dimensión de la matriz **X**:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2X = 3\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Calcular $A^2 - 3A - \mathbb{I}$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

11. Comprobar que, dadas dos matrices cuadradas A y B, se verifica: **a)** $\boxed{(A+B)^t = A^t + B^t}$

b) $\boxed{(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t}$

(Utilizar matrices 3x3)

Potencias n-ésimas de matrices:

12. Demostrar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ satisface la relación $A^n = 2^{n-1} A$

13. Calcular, por inducción, las potencias n-ésimas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\left(\textit{Sol:}\ \textbf{b)}\ B^n = a;\ \textbf{c)}\ C^n = 3^{n-1} C;\ \textbf{e)}\ E^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \textbf{g)}\ G^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \textbf{h)}\ H^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

14. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide: **a)** Calcular A^2, A^3 y A^4, deduciendo una fórmula general para A^n

b) Demostrar que la fórmula anterior también es válida para A^{n+1}

c) ¿Cuánto valdría A^{99}? $\left(\textit{Sol:} \begin{pmatrix} 1 & 99 & 99 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

15. ***(S)*** Calcular A^2, A^3 y A^{428} dada la siguiente matriz: $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ *(Soluc: $A^{428} = A^2$)*

16. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide: **a)** Calcular A^2, A^3 y A^4

b) Razonar cuánto valdría A^{10} $\left(\textit{Sol:} \begin{pmatrix} 1 & 45 & 55 \\ 0 & 1 & 45 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

Matrices que conmutan:

17. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, encontrar la expresión general de la matriz $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ tal que el producto de ambas conmute. $\left(\textit{Soluc}: B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right)$

18. Hallar la forma general de las matrices X que conmutan con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left(\textit{Soluc}: X=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \right)$

19. Hallar la forma general de las matrices que conmutan con $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

20. Ídem con $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\left(\textit{Soluc}: X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \right)$

Problemas varios:

21. ***(S)*** Comprobar que la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ verifica la relación $A^2+\mathbb{1}=0$. Obtener una matriz B_{2x2}, distinta de $\pm A$, que también verifique la relación $B^2+\mathbb{1}=0$

22. ***(S)*** Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, determinar, si es posible, un valor de λ para el que la matriz $(A-\lambda\mathbb{I})^2$ sea la matriz nula. *(Soluc: λ=1)*

23. ***(S)*** Determinar los valores de x, y, z para que se verifique la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & y \\ x & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(Soluc: hay cuatro soluciones posibles: -2,2,1; 2,2,-1; 2,-2,1; -2,-2,-1)

24. **a)** Encontrar dos matrices X e Y que cumplan: $\left.\begin{aligned} 2X+Y&=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X-Y&=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$

b) Ídem con $\left.\begin{aligned} 2X-3Y&=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ X-Y&=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$ $\left(\textit{Sol:}\ X=\begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix};\ Y=\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} \right)$

25. Calcular **x**, **y**, **z**, **t** para que se cumpla que $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\left(\textit{Soluc}: \begin{pmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$

Operaciones con datos en tablas:

26. Las velocidades medias de tres coches *A, B ,C* en km/h, vienen dadas por la matriz

$$V=\begin{pmatrix} 50 \\ 80 \\ 120 \end{pmatrix}$$

El número de horas que cada coche viaja viene dado por la matriz $H = (3 \quad 4 \quad 6)$. Calcular los productos *HV* y *VH*, interpretando los valores de los términos de las matrices resultantes.

(Soluc: El único término de HV representa el total recorrido por los tres coches, 1190 km; cada término de VH representa los km recorridos por el coche a la velocidad que indica la fila en que está situado viajando el número de horas que indica la columna)

27. Se realiza una comparación del precio de cuatro productos en tres supermercados distintos. Los precios por kg de los productos en los distintos supermercados vienen dados por la matriz

$$\begin{array}{c} \\ \text{Verdura} \\ \text{Carne} \\ \text{Pan} \\ \text{Fruta} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S_1 & S_2 & S_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 9 & 10 \\ 40 & 50 & 40 \\ 4 & 4 & 3{,}5 \\ 12 & 15 & 14 \end{pmatrix} \end{array}$$

El número de kg comprados respectivamente de cada producto cierto día por una familia está dado por la matriz $(2 \;\; 3 \;\; 1 \;\; 2)$. Mediante el producto apropiado de matrices, comparar el coste del total de la compra en los tres supermercados. *(Soluc: La matriz del coste total de los productos es (164 202 171,5))*

28. El consumo anual medio en litros de leche desnatada, semi y entera de tres familias F_1, F_2 y F_3 viene dado por la siguiente matriz:

$$A = \begin{array}{c} \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{desn} & \text{semi} & \text{entera} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 430 & 157 & 8 \\ 545 & 210 & 1 \\ 120 & 80 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

mientras que la evolución de los precios en € de tales productos en los últimos años es:

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{desn} \\ \text{semi} \\ \text{ent} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 2006 & 2007 & 2008 & 2009 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 80 & 83 & 90 & 92 \\ 83 & 87 & 88 & 90 \\ 85 & 88 & 90 & 95 \end{pmatrix} \end{array}$$

Calcular e interpretar $A \cdot B$ *(Soluc: Representa el gasto anual de cada familia en leche)*

29. En un centro de estudios de idiomas los alumnos de francés y alemán se distribuyen en 4 niveles como indica la matriz **A**. Los precios que pagan los alumnos por hora de clase dependen del nivel en que se encuentren y de que el aula disponga o no de puestos de laboratorio de idiomas, según figura en la matriz **B**. Calcular lo que percibiría este centro educativo por hora de cada idioma impartido dependiendo de que las aulas estén o no dotadas de los medios mencionados.

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{FR.} & \text{AL.} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 12 & 16 \\ 10 & 11 \\ 15 & 11 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \text{sin lab.} \\ \text{con lab.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 5{,}5 & 8 & 10 \\ 7 & 7 & 10 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

(Soluc: Haciendo BA obtenemos FR sin lab=335 €, FR con lab=424 €, AL sin lab=298,50 € y AL con lab=383 €)

30. Una factoría produce encendedores $\mathbf{P_1}$, rotuladores $\mathbf{P_2}$, y llaveros $\mathbf{P_3}$, para cuya elaboración se precisan materias primas como gas $\mathbf{M_1}$, tinta $\mathbf{M_2}$, plástico $\mathbf{M_3}$ y metal $\mathbf{M_4}$ **.** Dos compañías distribuidoras $\mathbf{D_1}$ y $\mathbf{D_2}$ se encargan de proporcionar a los comercios estos productos. Sea:

$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} D_1 \\ D_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1000 & 650 & 400 \\ 1000 & 600 & 350 \end{pmatrix} \end{array}$$

la matriz de pedido de los tres productos por parte de los distribuidores,

$$B=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 0 & 40 & 10 \\ 0 & 20 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

la matriz que expresa la cantidad de cada una de las materias primas, en gramos, por unidad de cada producto, y

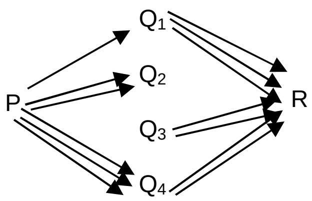
$$C=\begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{array}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

la matriz de costes por gramo de cada material ¿Qué materias primas forman parte de los llaveros, y en qué cantidades por unidad producida? Calcular e interpretar el significado de **AB**, **BC** y **ABC**.

(Soluc: En cada llavero hay 30 gr de plástico y 30 gr de metal; AB expresa la cantidad total de cada materia prima que precisa cada distribuidora; BC es la matriz de costes de cada producto; A BC expresa los beneficios que obtiene cada distribuidora)

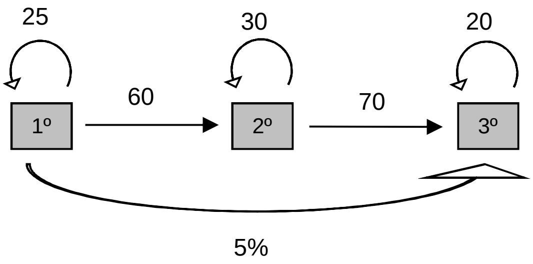
Operaciones con datos en grafos:

31. *(pág. 53 libro ed. Anaya)* Para viajar de P a R no hay vuelo directo, sino que hay que hacer escala en alguno de los cuatro aeropuertos de la ciudad Q, según el siguiente grafo:



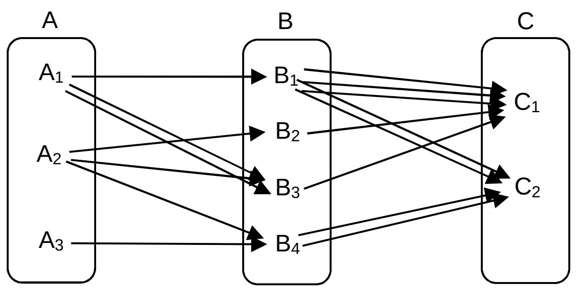
(Por ejemplo, para ir de P a Q_2 hay dos vuelos, mientras que no hay ninguno de Q_2 a R). Construir la matriz fila que representa los vuelos de P a Q_i y la matriz columna de los vuelos de Q_i a R ¿Qué debemos hacer con ambas matrices para obtener el número de combinaciones de vuelos de P a R? ¿Cuántas formas hay de ir de P a R? *(Soluc: Multiplicarlas; 9 formas distintas)*

32. En una academia de idiomas hay 100 alumnos en 1º, 90 en 2º y 80 en 3º. Al final de curso se dan los resultados que se resumen en el siguiente grafo:



Por ejemplo, el 25% de los alumnos de 1º repite, el 60% pasa a 2º y el 5% pasa directamente a 3º (el resto abandona). Formar adecuadamente la matriz 3x3 que representa el % de alumnos que pasan a los diferentes cursos. ¿Cómo debe operarse con la matriz columna que recoge el nº de alumnos por nivel en el presente curso para obtener el nº de alumnos por nivel el próximo curso? *(Soluc: Hay que multiplicar la matriz cuadrada por la matriz columna, y el resultado será 25 87 84)*

33. *(pág. 55 libro ed. Anaya)* En una ciudad A hay tres aeropuertos A_1, A_2 y A_3, en B hay cuatro y en C dos. Una persona que quiera ir de A a B un cierto día de la semana, y de B a C al día siguiente, dispone de los vuelos que se recogen en el siguiente grafo:

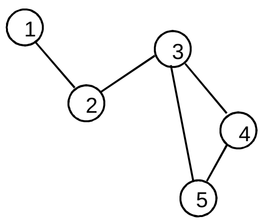


Construir sendas matrices que representen los vuelos de A a B y de B a C. ¿Qué operación debe hacerse entre ellas para obtener el número de formas distintas de ir de A a C?

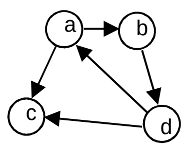
Matriz de adyacencia:

34. Dados los siguientes grafos, indicar de qué tipo se tratan y obtener su matriz de adyacencia:

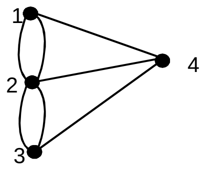
a)



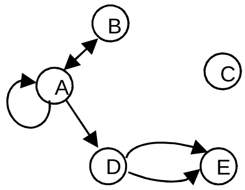
b)



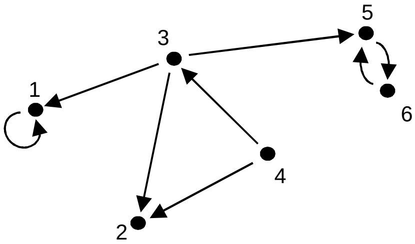
c)



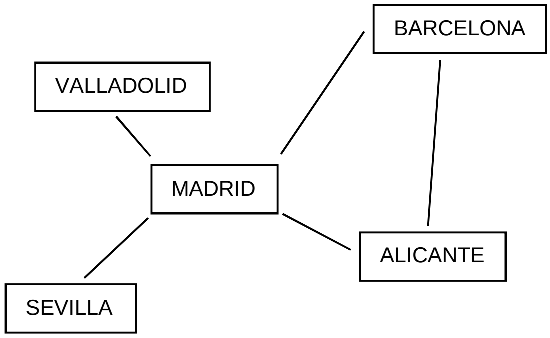
d)



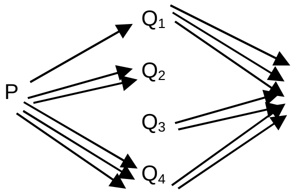
e)



f)



g)



35. Dadas las siguientes matrices de adyacencia, dibujar los grafos que representan, e indicar de qué tipo se tratan:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **g)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

36. Los distintos vuelos de una compañía a aeropuertos de 4 países A, B, C y D vienen definidos por la siguiente matriz de adyacencia:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Dibujar el grafo correspondiente.