TEMA 11 – DISTRIBUCIONES DE VARIABLE CONTINUA

11.1 – DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DE VARIABLE CONTINUA

Las distribuciones de probabilidad de variable continua son idealizaciones de las distribuciones estadísticas de variable continua. Estas se obtienen empíricamente (experimentando u observando). Aquellas son distribuciones teóricas.

Las distribuciones de probabilidad de variable continua se definen por medio de una función y = f(x) que se llama **función de probabilidad** o **función de densidad**. Ha de ser $f(x) \geq 0$ para todo x.

Las probabilidades vienen dadas por el área bajo la curva. Por tanto, el área encerrada bajo la totalidad de la curva es 1. Es decir, tomamos como unidad el área bajo la curva completa.

Para que f(x) sea la función de densidad o de probabilidad de una variable aleatoria es necesario que:
- **f(x) se no negativa para todo x**
- **El área bajo la curva y = f(x) sea igual a 1**

Para hallar la probabilidad $P[a \leq x \leq b]$, obtendremos el área que hay bajo la curva en el intervalo [a,b]
Las probabilidades de sucesos puntuales son cero: $P[x = a] = 0$.
Por tanto: $P[a \leq x \leq b] = P[a < x < b]$

La media y la desviación típica tienen los mismos significados que en las distribuciones estadísticas pero su cálculo exacto no corresponde a este curso.

11.1.1 - CÁLCULO DE PROBABILIDADES A PARTIR DE LA FUNCIÓN DE DENSIDAD

Para calcular probabilidades en distribuciones de probabilidad de variable continua, hay que hallar las áreas bajo la curva que representa la función de densidad y = f(x) . Si las distribuciones son uniformes (rectángulos f(x) = k)

$$P[a \leq x \leq b] = (b-a).k \qquad (k = \text{altura del rectángulo})$$

11.1.2 - FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN

Se llama función de distribución de una variable aleatoria, t, a la función F(x) que describe los valores que toma la probabilidad acumulada hasta la abscisa x : $F(x) = P[t \leq x]$. Es una función continua creciente que cumple que $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Si la función de densidad sólo toma valores no nulos en el intervalo [a,b], entonces $F(x) = 0$ para $x \leq a$ y $F(x) = 1$ para $x \geq b$.

11.2 – LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

La campana de Gauss o curva normal es una función de probabilidad continua , simétrica, cuyo máximo coincide pues con la media μ

Para cada valor de μ (media) y cada valor de σ (desviación típica) hay una curva normal, que se denomina N (μ, σ)

11.3 – CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN DISTRIBUCIONES NORMALES

11.3.1 - TABLA DE ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL N(0,1)

En la distribución N(0,1), a la variable se le suele representar por la letra z. La tabla nos da las probabilidades $P[z \leq k]$ para valores de k de 0 a 4, de centésima en centésima. A estas probabilidades se las llama $\phi(k)$:

$\phi(k) = P[z \leq k]$ z se distribuye N(0,1)

$\phi(k)$ es la función de distribución de esta variable aleatoria.

El valor de k se busca así:

- Unidades y décimas en la columna de la izquierda
- Centésimas en la fila de arriba
- El número que nos da la tabla es el valor de : $\phi(k) = P[z \leq k]$

11.3.2 - CÁLCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN N(0,1)

- Si $k \geq 0$, las probabilidades $\phi(k) = P[z \leq k] = P[z < k]$ se encuentran directamente en la tabla.
- $P[z \geq k] = 1 - P[z < k] = 1 - \phi(k)$
- Para abscisas negativas: $P[z \leq -k] = P[z \geq k] = 1 - \phi(k)$
- $P[a \leq z \leq b] = P[z \leq b] - P[z \leq a]$

11.3.3 - CALCULO DE PROBABILIDADES EN UNA DISTRIBUCIÓN N(μ,σ)

Como ya sabemos, las probabilidades en dos distribuciones normales cualesquiera se reparten de forma análoga. Por tanto, para calcular probabilidades en una distribución N(μ,σ), la relacionaremos con la N(0,1) para la cual disponemos del recurso de las tablas.

Si x es N(μ,σ), para calcular la probabilidad $P[b < x < k]$ se procede del siguiente modo: $P[b < x < k] = P\left[\frac{b-\mu}{\sigma} < z < \frac{k-\mu}{\sigma}\right]$. El cambio $k \Rightarrow \frac{k-\mu}{\sigma}$ se llama tipificación de la variable. La variable ya tipificada sigue una distribución N(0,1)

11.4 – LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL SE APROXIMA A LA NORMAL

Para ciertos valores de n y p, las distribuciones binomiales tienen un extraordinario parecido con las correspondientes distribuciones normales.

En general, una binomial B(n,p) se parece a una curva normal tanto más, cuanto mayor es el producto np (o nq si q < p) Cuando np y nq son ambos mayores que 3, la aproximación es bastante buena. Y si superan a 5, la aproximación es casi perfecta. Naturalmente, la curva normal a la cual se aproxima tiene la misma media y la misma desviación típica que la binomial, es decir: $\mu = np \quad \sigma = \sqrt{npq}$

11.4.1 - REGLA PRÁCTICA PARA CALCULAR PROBABILIDADES MEDIANTE EL PASO DE UNA BINOMIAL A UNA NORMAL

Si x es B(n,p) y se parece mucho a x' N(np, $\sqrt{npq}$), el cálculo de probabilidades de x puede hacerse a partir de x' del siguiente modo:

$P\,[x = k] = P[k - 0,5 < x' < k + 0,5]$

$P\,[a \le x < b] = P\,[a - 0,5 < x' < b - 0,5]$

$P\,[a < x \le b] = P\,[a + 0,5 < x' < b + 0,5]$

$P\,[a < x] = P\,[a + 0,5 < x']$

11.5 – AJUSTE DE UN CONJUNTO DE DATOS A UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Para estudiar si una serie de n datos obtenidos experimentalmente pueden provenir de una distribución normal, procedemos del siguiente modo:

- Calculamos los parámetros; media ($\bar{x}$) y desviación típica (s) de la distribución empírica.
- Comparamos la distribución empírica con una normal N(μ,σ) (Media con media, $\bar{x} = \mu$; desviación típica con desviación típica $s = \sigma$)
    - Para efectuar la comparación, partimos el recorrido de la variable en intervalos, $[x_k, x_{k+1}]$, y averiguamos cómo se repartirían en esos intervalos n individuos de una distribución N(μ,σ).
    - Hallamos la diferencia, en cada intervalo, de los números teórico y empírico.
    - Si la mayor de las diferencias es suficientemente pequeña, aceptamos la hipótesis de normalidad, pues suponemos que las diferencias son debidas al azar.
    - Si la mayor de las diferencias es grande, rechazamos la hipótesis de normalidad.