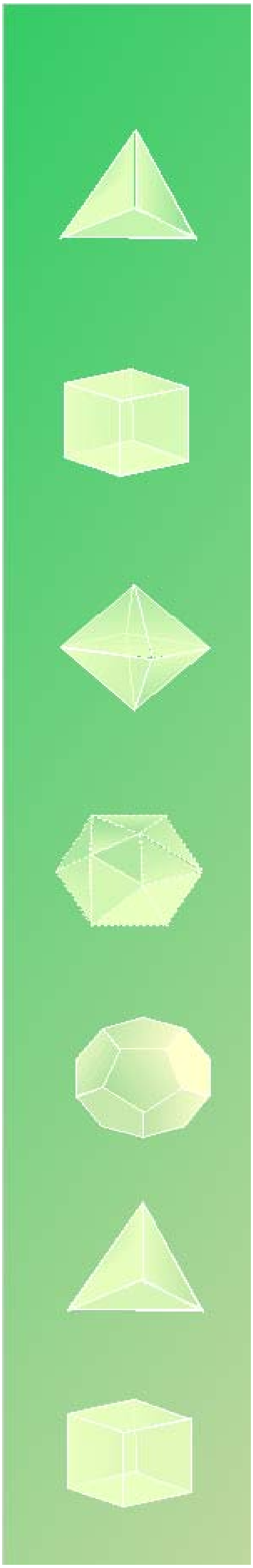


MATEMÁTICAS I: 1º de Bachillerato

Capítulo 4: Trigonometría

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José Luis Lorente Aragón y Andrés García Mirantes

Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

RESOLUCIÓN GENERAL DE TRIÁNGULOS

En el curso anterior ya te habrás familiarizado con los conceptos más importantes de la trigonometría y hasta es posible que conozcas su historia.

Instrumento para medir ángulos
Museo Arqueológico de Madrid

Como seguramente sabes, la palabra trigonometría significa “medición de triángulos”. Más concretamente, viene del griego "τριγωνομετρία" ("trigonometria"), donde "τρίγωνο" significa triángulo y "μετρεῖν" significa medir.

Es una de las disciplinas de las Matemáticas más antiguas. Hay tablillas babilónicas del siglo XX (¡antes de Cristo!) y papiros egipcios del XVII a.C. que tratan temas de trigonometría.

No sólo son antiguos sus orígenes, también su desarrollo. Prácticamente todo lo que vamos a ver en este capítulo (que es esencialmente todo lo que se sabe) acerca de resolución de triángulos ya lo conocían los griegos en el siglo II antes de Cristo. El enfoque suyo, sin embargo era fundamentalmente geométrico y muchos teoremas que nosotros vemos en forma algebraica se escribían de manera muy diferente. ¡Pero ya eran conocidos!

¿Por qué este desarrollo tan rápido? La explicación no es muy sorprendente. La trigonometría se utiliza muchísimo en Astronomía, medida de terrenos (agrimensura) y navegación, tres campos muy necesarios en las civilizaciones antiguas. Y no pienses que la Astronomía se hacía por curiosidad, era vital saber los movimientos de los astros para las crecidas del Nilo y para guiar barcos por las estrellas.

Por eso existen instrumentos realmente antiguos de medidas de ángulos, como la ilustración que puedes ver del Museo Arqueológico de Madrid.

En este capítulo no sólo veremos resolución de triángulo. También se estudiarán las identidades y ecuaciones donde aparecen razones trigonométricas. El estudio de estas fórmulas se lo debemos fundamentalmente a la civilización hindú (siglo X fundamentalmente). De hecho seno y coseno vienen del sáncrito. Seno viene de *jyā* (cuerda de arco) y *koṭi-jyā* (*jyā* del complementario).

4. RESOLUCIÓN GENERAL DE TRIÁNGULOS

En este apartado, nos ocuparemos de un problema muy concreto, la resolución de triángulos. Resolver un triángulo es calcular todos sus lados y sus ángulos.

En un triángulo hay seis datos: tres lados y tres ángulos. Como veremos, un triángulo puede resolverse, en general (con las excepciones que citaremos) si de los seis datos conocemos tres cualesquiera.

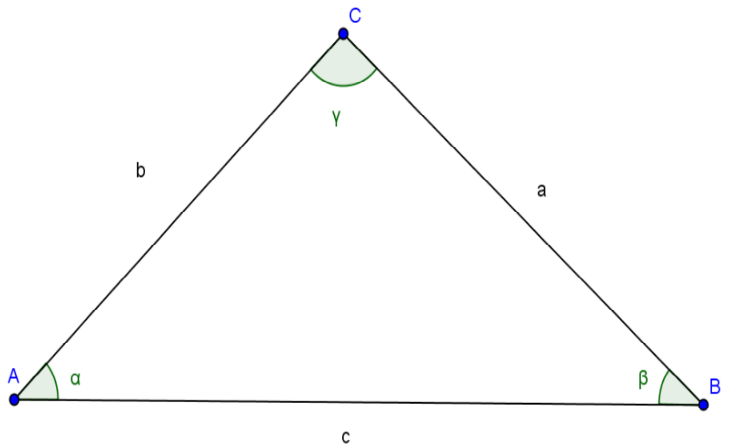
Es muy posible que de cursos anteriores ya conozcas gran parte de lo que vamos a ver en este apartado. En cualquier caso, nosotros comenzaremos desde el principio.

Notación general

Por comodidad, vamos a representar los triángulos siempre de la misma manera, como ya habíamos visto en el apartado 1.2 para ángulos agudos. Para mayor comodidad lo vamos a repetir aquí.

1. Los vértices se representarán con letras mayúsculas, A, B, C …
2. El lado opuesto a un vértice se representará con la letra minúscula correspondiente a, b, c …
3. El ángulo correspondiente a un vértice se representará con la letra griega (minúscula) correspondiente. Pondremos α (alfa) para el vértice A, β (beta) para el vértice B y γ (gamma) para el vértice C. No utilizaremos más letras griegas, si necesitáramos representar más ángulos usaremos primas como en α' (alfa prima) o α'' (alfa segunda).

Puedes ver a continuación un esquema.



Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

4.1. Teorema del coseno

El teorema del coseno a veces recibe el nombre de *Teorema de Pitágoras Generalizado*, que es una descripción más exacta. Es esencialmente el teorema de *Pitágoras* para triángulos no rectángulos (y además incluye como caso especial los triángulos rectángulos).

Su enunciado es sencillo:

Teorema del coseno

Si a, b y c son los lados de un triángulo cualquiera y α es el ángulo entre b y c se cumple la igualdad:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

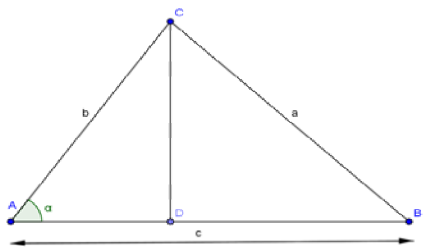
Notas

- Cuando el triángulo es rectángulo y a es la hipotenusa entonces $\alpha = 90^{\text{o}}$. Si sustituimos en la fórmula tenemos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 90$. Pero al ser $\cos 90 = 0$ la fórmula se reduce al **teorema de Pitágoras** $a^2 = b^2 + c^2$. Todos los problemas que se resuelven con el teorema de Pitágoras se resuelven con el teorema del coseno (pero, obviamente, no al revés).
- El teorema del coseno vale para CUALQUIER ángulo α, no es necesario que sea agudo. Por ejemplo puede ser α = 110^{o}, lo único que el coseno sería negativo. Pero la fórmula es la misma.
- Podemos utilizar el teorema de los cosenos si en un triángulo conocemos:
  - Los tres lados.
  - Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
  - Dos lados y el ángulo que forman.

Demostración del teorema

Vamos a hacerlo para un triángulo acutángulo. Dejaremos como ejercicio el caso obtusángulo (el rectángulo lo suponemos conocido, es el *Teorema de Pitágoras*).

Dibujemos un triángulo ABC y tracemos la altura correspondiente al vértice C. Esta altura puede caer sobre el lado AB o fuera de él. Vamos a considerar el primer caso, el segundo quedará como ejercicio.



Queremos calcular el lado a = BC. Por el teorema de *Pitágoras* es $a^2 = BC^2 = CD^2 + DB^2$. El problema es que no tenemos ni CD ni DB. Lo que sí tenemos es b = AC, c = AB y el ángulo α.

Sabemos que $sen\ (\alpha) = \dfrac{CD}{AC} \Rightarrow CD = AC\ sen(\alpha)$.

Sabemos también $\cos(\alpha) = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AD = AC\cos(\alpha)$.

Pero, por construcción $AD + DB = AB$ y AB sí lo tenemos. Luego es $DB = AB - AD$.

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

Recapitulando y escribiendo en función de a, b y c que son los datos originales:

$$CD = AC\,sen(\alpha) \Rightarrow CD = b\,sen(\alpha)$$

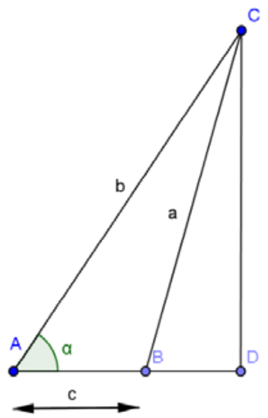
$$DB = AB - AD = c - AC\cos(\alpha) = c - b\cos(\alpha)$$

Finalmente $a^2 = BC^2 = CD^2 + DB^2 = [b\,sen(\alpha)]^2 + [c - b\cos(\alpha)]^2$. Basta operar un poco:

$$a^2 = [b\,sen(\alpha)]^2 + [c - b\cos(\alpha)]^2 = b^2 sen^2(\alpha) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) + b^2\cos^2(\alpha)$$

$$a^2 = b^2 sen^2(\alpha) + b^2\cos^2(\alpha) + c^2 - 2bc\cos(\alpha) = b^2\left[sen^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)\right] + c^2 - 2bc\cos(\alpha)$$

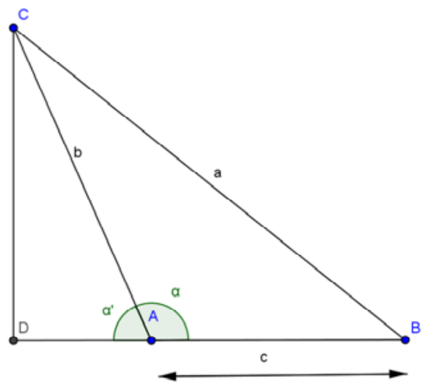
Pero $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ con lo que finalmente tenemos el resultado deseado.



Actividades propuestas

35. ¿Qué ocurre cuando la altura cae FUERA del segmento AB? En otras palabras si tenemos la figura que ves a la derecha. Demuestra el teorema del coseno en ese caso [***Pista:*** los únicos cambios aparecen al despejar AD que se suma en vez de restar].

36. Demuestra que el teorema del coseno también vale para ángulos entre 90 y 180 grados. Para ello, procede como sigue:



a) En la figura que tienes a tu izquierda considera el ángulo α'. Se cumple que $\cos(\alpha') = -\cos(\alpha)$ ¿Por qué?

b) Considera el triángulo rectángulo DBC y pon *a* en función de CD y DB.

c) De la misma manera que antes, pon CD y DB en función de b, c y α'.

d) Sustituye en la expresión para a hasta llegar a una fórmula para a en función de b, c y α'. Al sustituir el $\cos(\alpha') = -\cos(\alpha)$ tienes el resultado.

37. Dibuja un triángulo con b = 5, c = 8 y el ángulo entre ellos $\alpha = 40°$ (usa una regla y un transportador). Calcula el otro lado con el teorema del coseno y comprueba que coincide con el resultado medido. No te saldrá exactamente por el redondeo y el error de medición pero debería ser muy similar.

38. Un triángulo tiene de lados 3, 5 y 7. Calcula sus ángulos.

39. En un triángulo ABC, los lados AB y AC miden 3 y 2 cm respectivamente. El ángulo β correspondiente al vértice B mide 30 grados.

a) Utiliza el teorema del coseno para calcular el otro lado. Obtendrás dos soluciones.

b) Las dos soluciones se deben a que hay dos triángulos ¿serías capaz de dibujarlos?

4.2. Teorema del seno

El teorema del coseno es sólo la mitad de las herramientas que necesitamos para resolver triángulos. La otra mitad es el teorema del seno, que vamos a definir a continuación. Su enunciado y demostración son más sencillos que el teorema del coseno.

Teorema del seno:

En todo triángulo los lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} = \frac{c}{sen(\gamma)}$$

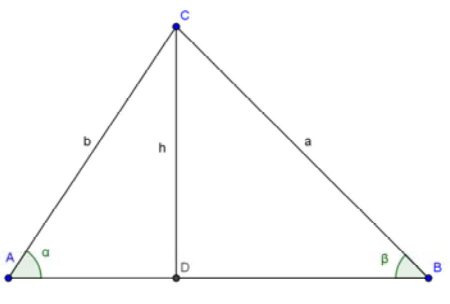
Notas

- Como antes el teorema del seno vale para CUALQUIER ángulo α, no es necesario que sea agudo. En este caso además el seno es siempre positivo pues los lados de un triángulo suman 180 grados. Y obviamente ningún ángulo puede ser 0 o 180, porque nos quedamos sin triángulo.
- El teorema del seno es preferible al del coseno si conocemos:
    a) Dos ángulos (es decir, tres ángulos) y un lado.
    b) Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Demostración del teorema

Como antes, vamos a hacerlo para un triángulo acutángulo y dejaremos como ejercicio los otros casos, el caso obtusángulo (el rectángulo lo suponemos conocido, es el Teorema de *Pitágoras*).

Dibujemos un triángulo ABC y tracemos la altura correspondiente al vértice C. Esta altura puede caer sobre el lado AB o fuera de él. Vamos a considerar el primer caso, el segundo quedará como ejercicio.



Por definición de seno, tenemos $sen(\alpha) = \frac{h}{b}$ y también $sen(\beta) = \frac{h}{a}$. De este modo, despejando h en los dos lados e igualando $b\,sen(\alpha) = h = a\,sen(\beta)$.

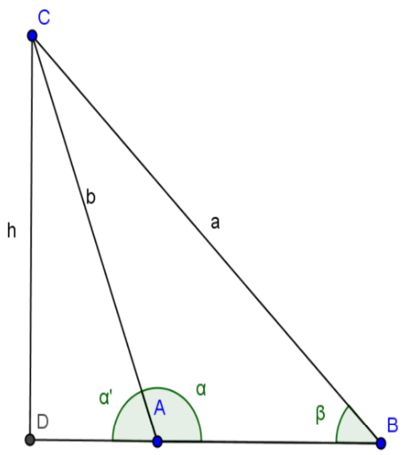
En otras palabras $b\,sen(\alpha) = a\,sen(\beta) \Rightarrow \frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)}$.

Con el mismo razonamiento para el ángulo γ correspondiente al vértice C se tiene la otra igualdad.

Al igual que en el teorema anterior, en las actividades propuestas veremos el otro caso.

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas



40. ¿Qué ocurre cuando la altura cae FUERA del segmento AB? En otras palabras si tenemos la figura que ves a la derecha. Demuestra el teorema del seno en ese caso [***Pista:*** hay que utilizar α' en vez de α y ver la relación entre el seno de ambos ángulos]

41. El ejercicio anterior ya demuestra que el teorema del seno vale para triángulos obtusángulos ¿por qué? Demuestra el teorema para un triángulo rectángulo usando que $sen 90 = 1$

42. Como antes, dibuja un triángulo con b = 5, c = 8 y el ángulo entre ellos $\alpha = 40^{o}$. Calcula con el teorema del seno el ángulo opuesto al lado b y calcula, SIN UTILIZAR EL TEOREMA DEL COSENO el otro ángulo y el lado que falta. Comprueba que te sale lo mismo que si hubieras utilizado el teorema del coseno para calcular a.

43. Un triángulo dos ángulos que valen 40 y 60 grados respectivamente. El lado entre ellos es de 8 cm. Calcula todos sus ángulos y lados.

44. En un triángulo ABC, los lados AB y AC miden 3 y 2 cm respectivamente. El ángulo β correspondiente al vértice B mide 30 grados.

a) Utiliza el teorema del seno para calcular el otro ángulo. Hay dos soluciones porque hay dos ángulos con el mismo seno. Calcula los dos.

b) Las dos soluciones se deben a que hay dos triángulos, ¿serías capaz de dibujarlos?

Problemas con el teorema del seno. Las soluciones obtusa y aguda

Si sabemos que un ángulo α está entre 0º y 180º y conocemos su coseno, el ángulo está determinado. Eso significa que, con el teorema del coseno, siempre podemos calcular ángulos de un triángulo sin ambigüedad.

Pero no ocurre lo mismo con el teorema del seno. Dado el seno de un ángulo, hay dos ángulos entre 0º y 180º cuyo seno coincida. En efecto, *sen*(30) = *sen*(150), *sen*(40) = *sen*(140) y en general $sen(\alpha) = sen(180 - \alpha)$. Sólo lo tenemos identificado cuando $sen(\alpha) = 1$ que da únicamente $\alpha = 90^{o}$.

Por eso, si utilizamos el teorema del seno para calcular ángulos, hay dos soluciones, la solución aguda y la solución obtusa. En algunas ocasiones esto está bien porque hay dos triángulos posibles pero en otras simplemente estamos introduciendo soluciones falsas.

¿Cómo arreglar este problema? Hay dos maneras. La más fácil es no utilizar nunca el teorema del seno para calcular ángulos, sino sólo lados.

La otra manera es utilizarlo para el cálculo de ángulos PERO ASEGURÁNDONOS DE QUE EL ÁNGULO ES AGUDO, ¿y cómo saber esto? Pues con el siguiente resultado.

Si un triángulo es obtusángulo, el ángulo obtuso es opuesto al lado más grande.

Demostración del teorema

Supongamos un triángulo obtusángulo de lados a, b y c con α el ángulo opuesto a "*a*" obtuso. Debemos ver $a > b$ y $a > c$.

Por el teorema del coseno $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos(\alpha)$. Como el ángulo α es obtuso entonces $\cos(\alpha) < 0$ y $2ab\cos(\alpha) > 0$. Eso significa $c^2 + 2ab\cos(\alpha) > 0$ y por tanto $a^2 > b^2$. Como los dos son positivos, tomando raíces se deduce $a > b$. Del mismo modo se demuestra que $a > c$.

4.3. Resolución general de triángulos

Con las herramientas de que disponemos, ya podemos solucionar el problema general de la trigonometría, es decir, resolver triángulos cualesquiera.

Un triángulo tiene seis datos. Para resolverlo necesitamos tres de ellos y al menos uno de ello debe ser un lado.

Herramientas fundamentales

- ✓ Teorema del seno
- ✓ Teorema del coseno
- ✓ La suma de los ángulos del triángulo es 180º

Para evitar que los errores se propaguen es recomendable utilizar los datos que nos dan inicialmente, y no los que hemos ido calculando.

No siempre un triángulo se puede resolver pues con los datos dados nos pueden aparecer soluciones imposibles. También a veces con los datos dados tendremos dos soluciones. El caso más problemático es cuando se conocen dos lados y uno de los ángulos que no formen los dos lados.

Vamos a continuación a describir la situación con todo el detalle en todos los casos.

Conocidos tres lados

Puede ocurrir:

- Una única solución
- Ninguna solución: esto ocurre cuando un lado es mayor o igual que la suma de los otros dos, o menor o igual que la resta de los otros dos.

Método recomendado para tres lados

- ✓ Si a es el lado mayor, calcular α (el ángulo opuesto) planteando el teorema del coseno en la forma $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos(\alpha)$. Si sale $\cos\alpha \geq 1$ o $\cos\alpha \leq 1$ es que no hay solución.
- ✓ Calcular cualquiera de los otros dos ángulos con el teorema del seno.
- ✓ Calcular el tercer ángulo usando que la suma de los ángulos del triángulo es 180º.

Actividad resuelta

- *Resolver un triángulo si sus lados son a = 2 cm, b = 4 cm, c = 5 cm.*

Solución:

El lado más grande es c de modo que lo ponemos a la izquierda en el planteamiento del teorema del coseno. Así pues $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$.

Sustituyendo tenemos. $5^2 = 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cdot \cos\gamma \Rightarrow 25 - 4 - 16 = -16\cos\gamma$

Queda $\cos\gamma = \frac{5}{-16} \Rightarrow \gamma = arc\cos\left(-\frac{5}{16}\right) = 108'21^{o}$

Fíjate que no hemos tenido ningún problema porque el ángulo fuera obtuso. Con el seno habríamos tenido que distinguir casos.

Podemos ahora calcular cualquiera de los otros ángulos con el teorema del seno. Como ya sabemos que son agudos (porque ya hemos calculado el único que podía ser obtuso) no hay problema. Por ejemplo, vamos a calcular β. Podríamos haber calculado α igualmente.

$\frac{sen(\gamma)}{c} = \frac{sen(\beta)}{b}$. Sustituyendo $\frac{sen(108'21)}{5} = \frac{sen(\beta)}{4} \Rightarrow sen(\beta) = \frac{4sen(108'21)}{5} = 0'76$

De ahí obtenemos $\beta = arc\,sen(0'76) = 49'46^{o}$.

Finalmente $\alpha + \beta + \gamma = 180 \Rightarrow \alpha = 180 - 108'21 - 49'46 = 22'33^{o}$

Con este método no estamos utilizando los datos iniciales en cada momento y por eso podemos tener errores de redondeo. Recomendamos tomar al menos dos decimales.

De una manera un poco más lenta, podemos usar sólo los datos iniciales.

Método para tres lados sólo con datos iniciales

Calcular TODOS los ángulos despejando con el teorema del coseno.

Actividad resuelta

- *Resolver un triángulo si sus lados son a = 2 cm, b = 4 cm, c = 5 cm.*

Solución:

Ahora podemos hacerlo en el orden que queramos, porque cada uno de ellos no afecta a los de antes. Lo único, que si empezamos por el más grande sabemos antes si no hay solución. Pero como ya hemos visto antes que sí la hay, empezamos calculando α para ver que sale lo mismo.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \Rightarrow 2^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cdot \cos\alpha \Rightarrow 4 - 16 - 25 = -40\cos(\alpha)$ o, lo que es lo mismo

$\cos\alpha = \frac{-37}{-40} \Rightarrow \alpha = arc\cos\left(\frac{37}{40}\right) = 22'33$

De la misma manera $\cos(\beta) = arc\cos\left(\frac{4^2 - 2^2 - 5^2}{-2\cdot 5\cdot 2}\right) = arc\cos\left(\frac{-13}{-20}\right) = 49'46$.

Finalmente $\cos(\gamma) = arc\cos\left(\frac{5^2 - 2^2 - 4^2}{-2\cdot 2\cdot 4}\right) = arc\cos\left(\frac{5}{-16}\right) = 108'21^{o}$.

Observa que APARENTEMENTE no hay ninguna diferencia con la solución anterior. Sin embargo, sí que la hay si mostramos todas las cifras. En este ejercicio, por ejemplo hemos calculado $\beta = \arccos\left(\frac{-13}{-20}\right) = 49'458$ pero en el anterior hemos hecho $\beta = \arccos(0'76) = 49'464$.

El error, en cualquier caso, es pequeño.

Conocidos dos lados y el ángulo entre ellos

En este caso SIEMPRE hay una única solución. El método es simple.

Método recomendado para dos lados y el ángulo que forman

- ✓ Calcular el otro lado con el teorema del coseno.
- ✓ Usar el teorema del seno para calcular un ángulo. Hay dos posibilidades, tenemos que escoger siempre la que corresponda al lado MENOR. De este modo evitamos la solución obtusa.
- ✓ Calcular el tercer ángulo usando que la suma de los ángulos del triángulo es 180º.

Actividad resuelta

- *Resolver un triángulo con lados a = 20 cm, b = 10 cm y ángulo* $\gamma = 60^{\circ}$

Solución:

Lo primero, observa que el ángulo γ corresponde al vértice c y por tanto es el ángulo entre a y b.

Por el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot cos\ \gamma \rightarrow c^2 = 400 + 100 - 400\cdot cos(60) \rightarrow c = \sqrt{300} = 17'32 \text{ cm}$$

Podemos aplicar el teorema del seno al ángulo α, correspondiente al lado a = 20 cm o al ángulo β, correspondiente al lado b = 10 cm. Para evitar la solución obtusa escogemos β pues es agudo (recuerda, si hay un ángulo obtuso debe corresponder al lado más grande).

$$\frac{sen(\beta)}{b} = \frac{sen(\gamma)}{c} \Rightarrow \frac{sen(\beta)}{10} = \frac{sen(60)}{\sqrt{300}} \Rightarrow sen(\beta) = 0'5 \Rightarrow \beta = 30^{\circ}$$

Finalmente, restando tenemos $\alpha = 180 - \beta - \gamma = 180 - 30 - 60 = 90^{\circ}$. No habríamos tenido problemas si hubiéramos aplicado el teorema del seno a α pero "más vale prevenir"

Conocidos dos lados y un ángulo que no esté entre ellos

En este caso pueden ocurrir tres cosas:

- Una única solución (es un triángulo rectángulo).
- Dos soluciones.
- Ninguna solución.

Es muy parecido al otro caso, pero hay que discutir todas las posibilidades.

Método recomendado para dos lados y un ángulo que no esté entre ellos

- ✓ Plantear el teorema del coseno. Nos aparecerá una ecuación de segundo grado.
  - a) Si no tiene solución hemos terminado. No hay tal triángulo.
  - b) Si tiene solución única procedemos con los siguientes pasos.
  - c) Si tiene dos soluciones procedemos con los siguientes pasos para cada una de ellas. Son dos triángulos.
- ✓ Usar el teorema del seno para calcular un ángulo. Hay dos posibilidades, tenemos que escoger siempre la que corresponda al lado MENOR. De este modo evitamos la solución obtusa.

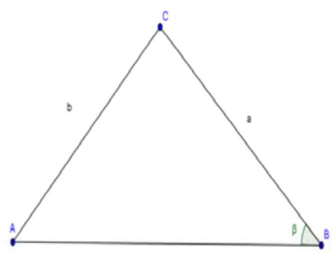
Calcular el tercer ángulo usando que la suma de los ángulos del triángulo es 180º

Actividad resuelta

- *Resolver un triángulo con lados a = 20 cm, b = 10 cm y ángulo* $\beta = 20^{\circ}$

Solución:

Observa que, aunque el problema es muy similar, en este caso el ángulo está en otro lugar. Y esa diferencia, que parece mínima, nos cambia todo el problema.



Sabemos que el triángulo tiene que ser de la forma que aparece a la derecha. El triángulo no está a escala, es simplemente un esquema.

Puesto que sólo conocemos un ángulo, debemos aplicar el teorema del coseno a ese ángulo. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

Sustituyendo obtenemos $10^2 = 20^2 + c^2 - 2\cdot 20\cdot c\cdot\cos(50)$, es decir $100 = 400 + c^2 - 40\cdot c\cdot 0'94$ o, expresado como ecuación de segundo grado $c^2 - 37'60c + 300 = 0$.

Resolviendo $c = \dfrac{37'6 \pm \sqrt{37'6^2 - 4\cdot 300}}{2}$ nos da dos soluciones, $c = 26'11$ y $c = 11'49$.

Hay por tanto dos triángulos. Uno con *a* = 20, *b* = 10, *c* = 26’11 y otro con *a* = 20, *b* = 10, *c* = 11’49. Vamos a resolver el primero.

El único ángulo que puede ser obtuso es el γ. Por tanto vamos a calcular el α. Con el teorema del seno

$$\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\beta)}{b} \Rightarrow \frac{sen(\alpha)}{20} = \frac{sen(20)}{10} \Rightarrow sen(\alpha) = \frac{20}{10}sen(20) = 0'68 \Rightarrow \alpha = arc\,sen(0'68) = 42'84^{\circ}$$

Finalmente, $\gamma = 180 - 42'84 - 20 = 117'16^{\circ}$

El segundo es diferente puesto que ahora α puede ser obtuso. Así pues tenemos que calcular γ.

$$\frac{sen(\gamma)}{c} = \frac{sen(\beta)}{10} \Rightarrow \frac{sen(\alpha)}{11'49} = \frac{sen(20)}{10} \Rightarrow sen(\alpha) = \frac{11'49}{10}sen(20) = 0'39 \Rightarrow \alpha = arc\,sen(0'39) = 22'95^{\circ}$$

Finalmente, $\alpha = 180 - 22'95 - 20 = 137'05^{o}$

En resumen dos triángulos solución:

a = 20 cm, *b* = 10 cm, *c* = 26'11 cm, α = 42'84º, β = 20 º, γ = 117'16º.

a = 20 cm, *b* = 10 cm, *c* = 11'49 cm, α = 137'05º, β = 20 º, γ = 22'95º.

Conocido un lados y dos ángulos

En este caso pueden ocurrir son cosas:

1. Ninguna solución (si los dos ángulos suman 180 grados o más).
2. Una única solución.

Este caso es especialmente sencillo.

Método recomendado para dos ángulos y un lado

- ✓ Calcular el tercer ángulo usando que la suma de los ángulos del triángulo es 180º. Si los dos ángulos que nos dan suman 180 grados o más no hay solución.
- ✓ Usar el teorema del seno para calcular los otros lados.

Actividad resuelta

- *Resolver un triángulo con lado a = 10 cm y ángulos* $\gamma = 60^{o}$ *y* $\alpha = 80^{o}$

Solución:

El ángulo β se calcula sin dificultad como $\beta = 180 - 60 - 80 = 40^{o}$.

Podemos ahora usar el teorema del seno:

$$\frac{sen(\alpha)}{a} = \frac{sen(\gamma)}{c} \Rightarrow \frac{sen(80)}{10} = \frac{sen(60)}{c} \Rightarrow c = \frac{sen(60)}{sen(80)} \cdot 10 = 8'79\ cm$$

Es conveniente, al calcular el ángulo, poner las proporciones el revés. Desde luego, no es obligatorio, ya ves que el anterior lo hemos hecho sin cambiar. Lo dejamos a tu elección cómo quieras hacerlo.

$$\frac{a}{sen(\alpha)} = \frac{b}{sen(\beta)} \Rightarrow \frac{10}{sen(80)} = \frac{b}{sen(40)} \Rightarrow b = \frac{sen(40)}{sen(80)} \cdot 10 = 6'53\ cm$$

Observa que con los tres ángulos no se pueden calcular los lados. Dos triángulos con los ángulos iguales son semejantes, pero los lados no se pueden calcular sin tener algún otro lado.

4.4. Problemas de trigonometría con medidas simples y dobles.

Ahora que ya sabemos resolver cualquier tipo de triángulo, podemos también resolver problemas con varias medidas y no estamos restringidos a triángulos rectángulos. Por eso tenemos mucha libertad para resolverlos.

El problema típico de doble medida es tener dos ángulos [de ahí la doble medida] y una distancia y buscar calcular otra. Algunos ejemplos son:

- Desde un punto vemos el punto más alto de una torre con un ángulo de 30 grados y al acercarnos 5 metros se ve con un ángulo de 40 grados. Calcular la altura de la torre.
- Un globo está en la vertical entre dos observadores separados por 40 m. El primero lo ve con un ángulo de 30 grados y el segundo con un ángulo de 50 grados, ¿a qué altura está el globo?
- En un viaje de alumnos de 4º de E.S.O. a Londres, algunos de los viajeros hicieron prácticas de trigonometría. Al conocer que las torres de la Abadía de Westminster tienen 30 metros de altura, decidieron aprovechar sus conocimientos para calcular la altura de la conocida torre Big Ben. Desde un punto intermedio entre ambos edificios se divisa el punto más alto de la Abadía con ángulo de 60º, y el Big Ben con un ángulo de 45º. Si la distancia entre las bases de las torres de los dos edificios es de 50 metros, ¿cuál fue el resultado de sus cálculos?, ¿a qué distancia se encontraba de cada edificio? (***Nota:*** Los datos son totalmente ficticios y este problema está sacado de un libro de cuarto de la ESO también de Marea Verde).

Usualmente hay dos maneras de resolver un problema:

- Dividiendo el problema en varios triángulos rectángulos y planteando un sistema.
- Ir calculando una a una las medidas mediante dos triángulos no necesariamente rectángulos.

Vamos a resolver el primero. Los demás los dejaremos como ejercicio al final de esta misma sección.

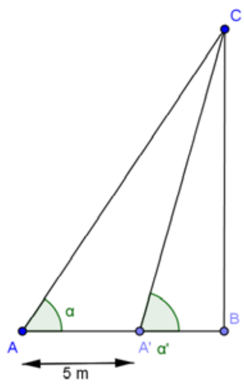
Actividad resuelta

- *Desde un punto vemos el punto más alto de una torre con un ángulo de 30 grados y al acercarnos 5 metros se ve con un ángulo de 40 grados. Calcular la altura de la torre de dos maneras distintas.*

Solución:

En primer lugar vamos a resolverlo con un sistema. Antes de nada, dibujaremos la figura y pondremos nombre a las cosas.

El punto alejado lo llamamos A y a su ángulo α. El punto más cercano lo llamamos A' y a su ángulo α'. B es el pie de la torre y C su punto más alto.



Planteando un sistema tenemos:

$$tg(\alpha)=\frac{BC}{AB}=\frac{BC}{5+A'B} \qquad tg(\alpha')=\frac{BC}{A'B},$$

Pero las tangentes las tenemos. $tg(\alpha)=tg(30)=0'58$ y $tg(\alpha')=tg(40)=0'84$. Por comodidad llamamos $y=BC$, $x=A'B$.

Así pues tenemos el sistema: $\begin{cases} 0'58=\dfrac{y}{5+x} \\ 0'84=\dfrac{y}{x} \end{cases}$.

Para resolverlo, lo más fácil es dividir miembro a miembro las dos ecuaciones.

$$\frac{0'84}{0'58}=\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{5+x}}\Rightarrow 1'45=\left(\frac{y}{x}\right)\div\left(\frac{y}{x+5}\right)=\frac{y(x+5)}{yx}=\frac{x+5}{x}.$$

$$1'45x=x+5\Rightarrow 0'45x=5\Rightarrow x=\frac{5}{0'45}=11'11.$$

Pero lo que nos interesa es y. Así pues $0'84=\frac{y}{11'11}\Rightarrow y=11'11\cdot 0'84=9'33m$.

Vamos ahora a resolverlo directamente. En el triángulo $A'BC$ tenemos sólo dos ángulos ($\alpha'=40^o$ y el otro de 90º). Necesitamos un lado para resolverlo. Y nos vale cualquier lado.

Así pues, vamos a calcular el lado común con otro triángulo. Del triángulo $AA'C$ tenemos un lado (AA') y el ángulo $\alpha=30^o$. Necesitamos algo más. Pero tenemos $\alpha'=40^o$ así que también tenemos su complementario, al que llamaremos α'' y que obviamente vale 140 = 180 – 40. Por tanto en $AA'C$ tenemos dos lados y un ángulo. Podemos resolverlo.

No nos interesa el triángulo entero, solamente el lado común con $A'BC$. Aplicamos el método recomendado.

En primer lugar, el ángulo que queda, γ, vale 10º pues es 10 = 180 – 140 – 30.

Plantemos el teorema del seno. $\frac{A'C}{sen(\alpha)}=\frac{AA'}{sen(\gamma)}$

Sustituyendo $\frac{A'C}{sen(30)}=\frac{5}{sen(10)}\Rightarrow AC=\frac{sen(30)}{sen(10)}5=14'38\,m$

Por tanto, ya tenemos dos lados y dos ángulos. Podemos aplicar el teorema del seno a $A'BC$:

$$\frac{BC}{sen(\alpha')}=\frac{A'C}{sen(90)}\Rightarrow\frac{BC}{sen(40)}=\frac{14'38}{1}\Rightarrow BC=14'38\,sen(40)=9'24\ m$$

Hay una pequeña diferencia debido al redondeo. Si haces los cálculos usando todos los decimales de la calculadora puedes comprobar que sale 9’25416578 en los dos casos.

Actividades propuestas

45. Un globo está en la vertical entre dos observadores separados por 40 m. El primero lo ve con un ángulo de 30 grados y el segundo con un ángulo de 50 grados, ¿a qué altura está el globo?

46. En un viaje de alumnos de 4º de E.S.O. a Londres, algunos de los viajeros hicieron prácticas de trigonometría. Al conocer que las torres de la Abadía de Westminster tienen 30 metros de altura, decidieron aprovechar sus conocimientos para calcular la altura de la conocida torre Big Ben. Desde un punto intermedio entre ambos edificios se divisa el punto más alto de la Abadía con ángulo de 60º, y el Big Ben con un ángulo de 45º. Si la distancia entre las bases de las torres de los dos edificios es de 50 metros, ¿cuál fue el resultado de sus cálculos?, ¿a qué distancia se encontraba de cada edificio?

CURIOSIDADES. REVISTA

Sobre la redondez de la Tierra

¿Desde cuándo sabemos que la Tierra es redonda y no plana? (más bien habría que decir esférica pero todo el mundo dice redonda). Un error relativamente común es, pensar que todo el mundo opinaba que la Tierra era plana hasta el siglo XV. Entonces Colón descubrió América en el siglo XV y convenció a casi todo el mundo. Y luego Fernando de Magallanes y Juan Sebastián Elcano dieron la primera vuelta al mundo y disiparon todas las dudas.

Bien, pues ¡¡no es cierto!! Se sabe que la Tierra es redonda desde la Antigüedad. No sólo eso. Desde el siglo III a.C. se conoce su radio y por tanto su circunferencia. Así que ya antes de Cristo se sabía cuánto tenía que navegar Colón para dar la vuelta al mundo.

Entonces, ¿de qué tuvo que convencer Colón a sus patrocinadores? Ciertamente no de la redondez de la Tierra. Colón pensaba que la circunferencia de la Tierra era más pequeña y que Japón estaba más cerca de los datos más precisos que tenían los científicos de la época. De hecho afirmaba que sólo había unos 3.700 km de las islas Canarias a Japón (la cifra real son 12.500 Km).

Hay cierto debate sobre si realmente Colón pensaba eso o si simplemente sabía que había tierra a esa distancia y se limitó a coger las estimaciones que más se ajustaban a su idea. Pero todo eso nos aleja de la pregunta fundamental que queríamos responder, ¿cómo sabían los antiguos que la Tierra era redonda?

Retrato de Colón.

Fuente: [Imagen en wikipedia]

Mapa de Toscanelli

Posible mapa en que se basó Colón para planear su viaje.

Fuente: [Imagen en wikipedia]

Erastóstenes y el radio de la Tierra

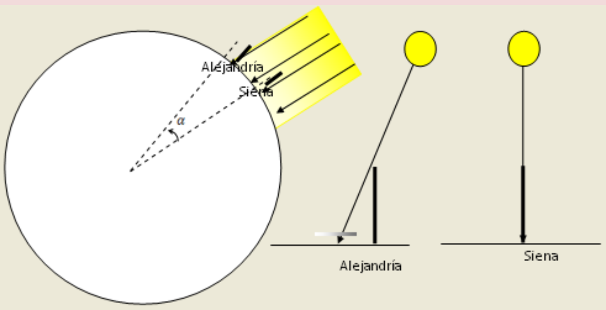
No está claro desde cuándo se sabe que la Tierra es redonda. Algunos dicen que fue *Pitágoras* (siglo VI a.C.) el primero en afirmarlo. También se afirma de otros griegos más o menos de la misma época como *Parménides*, *Zenón* o *Hesiodo*. Lo que sí se sabe es que a partir del siglo V a.C. la idea generalizada era que la Tierra era redonda.

La evidencia venía, entre otros factores, del hecho de que algunas estrellas que se ven desde *Egipto* no se veían desde *Grecia*. Eso sólo puede ocurrir si la Tierra es curva. También en los eclipses, la sombra de la Tierra sobre la Luna es siempre circular independientemente de cómo sea el eclipse. La única figura que siempre da sombras circulares es la esfera.

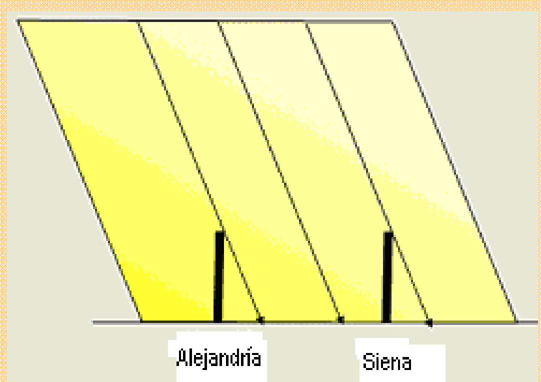
Sin embargo, hasta el siglo III a.C. sólo era una cuestión filosófica. El primero que midió realmente el radio de la Tierra y por tanto calculó su tamaño fue *Erastótenes de Cirene*.

El griego *Eratóstenes* vivió en Alejandría entre los años 276 a. C. y 194 a.C. Era un conocido matemático, astrónomo y geógrafo de la época. Entre otros trabajos uno de los más conocidos y aplicados en la actualidad es la denominada "Criba de *Eratóstenes*" para el cálculo de números primos.

El experimento realizado por *Eratóstenes* era genial en su sencillez: se sabía que en *Siena* (hoy *Asuán* en Egipto) los días próximos al solsticio de verano el Sol al mediodía no proyectaba sombras, es decir estaba en el perpendicular con la horizontal terrestre. En cambio el mismo día a la misma hora en *Alejandría* esto no ocurría y los palos tenían sombra. Mediante esta observación *Eratóstenes* no sólo le valió para darse cuenta de que la Tierra no era plana sino para ¡¡¡calcular el radio de la Tierra!!! Vamos a ver gráficamente el experimento a fin de entenderlo mejor. En la siguiente sección te proponemos realizar con tu clase otra práctica similar.



Situación si la Tierra es redonda



Situación si la Tierra fuese plana

Autores: Andrés García Mirantes y José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF

REPLICA EL EXPERIMENTO

Replicando los cálculos originales

Simplemente observando que lo que ocurre es que dos palos separados dan sombras distintas, ya puedes deducir que la Tierra tiene curvatura. Pero el experimento nos da mucho más que eso. Podemos calcular también el radio de la esfera.

Si te fijas bien en el esquema primero (donde la Tierra es esférica) podemos observar que los ángulos que marcan la diferencia de latitud entre las dos ciudades ( ) y el ángulo de los rayos solares con el palo en *Alejandría* son iguales, pues los lados que forman ambos ángulos son paralelos. De esta forma calculando el ángulo que forma el palo de *Alejandría* con los rayos solares (con el arco tangente del cociente del tamaño de la sobra y el del palo) hemos calculado la diferencia de latitud.

Así lo hizo *Eratóstenes* y calculó este ángulo cuyo resultado fue 1/50 parte de la circunferencia, es decir, 7^{o} 12'. Posteriormente, tomó la distancia estimada por las caravanas que comerciaban entre ambas ciudades, aunque bien pudo obtener el dato en la propia *Biblioteca de Alejandría*, fijándola en 5000 estadios, un estadio 174'25 m. Con estos resultado con una simple regla de tres llegó a la siguiente conclusión, que te pedimos que compruebes con calculadora:

Diferencia Latitud →	**Distancia**
1/50 partes circunferencia	174'25*5000/1000 = 871'25 km
1 circunferencia	x = longitud circunferencia

x = 871'25 · 50 = 43562'5 km.

Radio Tierra = longitud(x)/(2) = 6933 m (radio real 6370 m, error inferior al 10%)

<u>Algunas consideraciones:</u> Para hacer la medición de las sombras es necesario que la medición se haga a la misma "hora solar", esta sólo ocurre en el mismo instante sólo si nos encontramos en ciudades con la misma longitud (en el mismo meridiano). La diferencia entre las dos ciudades elegidas por *Eratóstenes* se diferencia en casi 3^{o}.

Realizando con tu clase un experimento similar

Vamos a realizar la experiencia con tus compañeros de clase. Para realizar la experiencia necesitas buscar la colaboración de otro instituto, cuanto más diferencia de latitud con el tuyo mejor saldrá la experiencia.

Dos son las dudas que se plantean a la hora de repetir el experimento:

1) ¿Necesitamos que los dos institutos estén en el mismo meridiano?
2) ¿Es necesario que el sol en uno de los institutos no proyecte sombra?

Vamos a resolver estas dos dudas:

1) Para hacer las medidas es necesario que el instante cuando miremos la sombra sea la misma "hora solar", es decir el sol estar en la "misma posición" en los dos centros. Si los dos centros no están en la misma longitud entonces tendremos que buscar el instante en cada centro en el que la hora solar sea la misma. Elegiremos la hora solar más reconocible, el mediodía solar. Es fácil reconocer este momento, por las siguientes

características:

a. El sol ocupa la posición más alta del día (menor sombra)

b. El sol está en el Sur del horizonte (la sombra cae al Norte)

- La hora de reloj del mediodía varía según la época del año y la longitud del centro. Para calcularlo tendremos en cuenta las siguientes consideraciones:
- En España estamos una hora adelantados respecto a la hora Europea. Así hay que sumar una hora a la hora del mediodía (12 h)

Meridiano de Greenwich

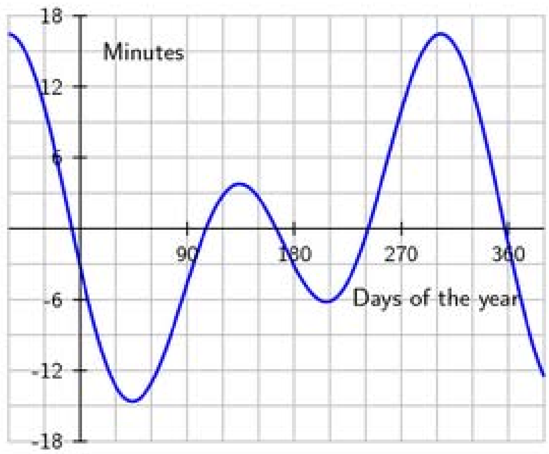
- En invierno con el cambio de hora tendremos que sumar otra hora.
- La hora de nuestros relojes está referida al centro del uso horario, en España el meridiano de *Greenwich*. Así al Oeste de este meridiano (que marca longitud 0^o) tendremos que sumar el "tiempo que tarda el sol" en llegar a la latitud del local. Si el centro se encuentra al Este del Meridiano hay que restar el "tiempo que tardó en Sol" en llegar al meridiano de *Greenwich* desde el lugar. Este valor se calcula con una sencilla regla de tres (24 horas → 360^o). Veamos dos ejemplos:

León: Longitud – $5'57^o$, tendremos que sumar a la hora

$5'57^o$·—— = 22 min

Girona: Longitud – $2'8^o$ tendremos que restar $2'8^o$ ·—— = 11min

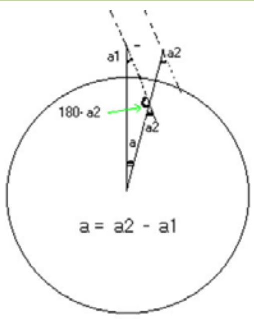
- Ecuación del tiempo: es la diferencia entre el tiempo solar medio (medido generalmente por un reloj) y el tiempo solar aparente (tiempo medido por un reloj de sol). Genera una gráfica de esta forma



Ecuación del tiempo

Para asentar conceptos veamos la hora real del mediodía solar en León el día 90 del año (comienzo de marzo).

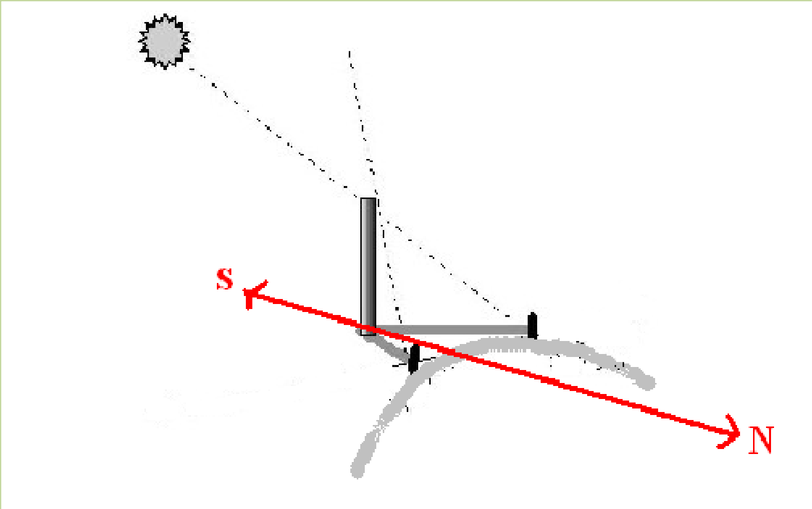
Hora mediodía = 12h + 1h invierno) + 1h (horario de España) + 22 min + -6 (ecuación del tiempo) = 14:16 minutos



2) El Sol sólo se sitúa en la vertical en días de verano de latitudes más próximas al ecuador. Pero esto no limita realizar la experiencia, pues la diferencia de latitud de los dos centros se calcula restando los ángulos que forma es Sol en los institutos.

Toma de medidas y cálculo del radio

Elegimos un día (y esperamos que sea soleado…). Nuestro objetivo es calcular la altura solar (ángulo que forma el sol con un gnomo o palo perpendicular al suelo) en el mediodía. Para calcular este ángulo vamos a hacer varias medidas una hora antes y otra después del mediodía (recuerda como se calcula).

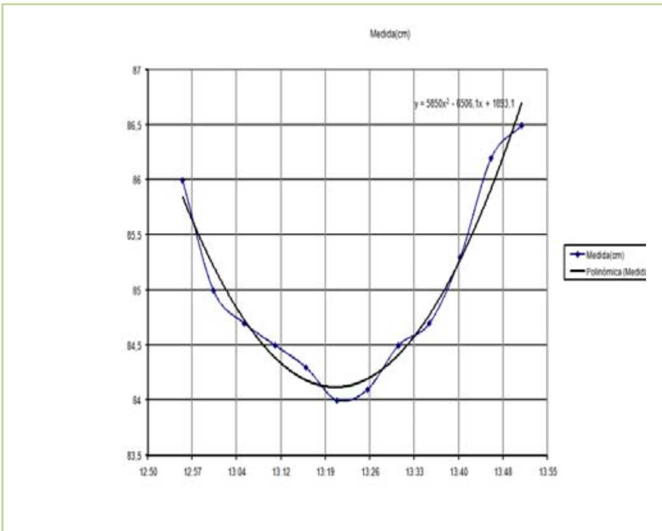


Situamos un palo perpendicular al suelo, podemos usar un recogedor y una plomada para asegurar la perpendicularidad con el suelo. Marcamos la posición en el suelo de la vertical del palo que nos da la sombra y situamos papel de *kraf* en el suelo para poder situar sobre él la sombra del palo. Cada cinco minutos marcamos la posición del extremo de la sombra, así como la hora. La sombra se mueve del Oeste a Este (al revés del sol), además hasta el mediodía la sombra disminuye de tamaño y a partir de mediodía aumenta.

Cuando tengamos las marcas y las horas analizamos las mismas con el fin de determinar la hora del mediodía y el tamaño de la sombra en este momento (sombra más pequeña en el mediodía). Podemos hacer esto de observando el tamaño de la sombra y cogiendo el valor menor o usar una herramienta informática (como Excel) para representar el tiempo frente al tamaño cuya gráfica es una parábola, siendo el vértice de la misma el punto que nos marca la hora del mediodía y la sombra al mediodía.

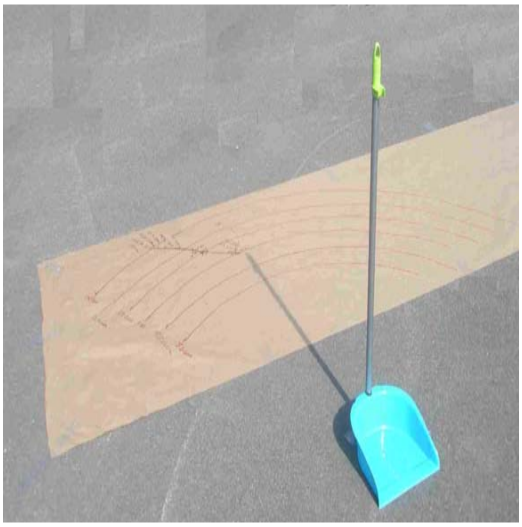
Veamos un ejemplo para asentar ideas:

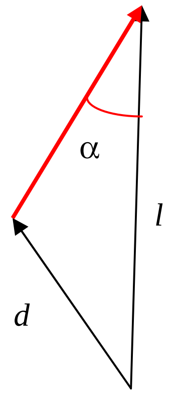
Hora	Sombra(cm)	Altura solar
12:56	86	49,6
13:01	85	49,9
13:06	84,7	50,0
13:11	84,5	50,1
13:16	84,3	50,1
13:21	84	50,3
13:26	84,1	50,2
13:31	84,5	50,1
13:36	84,7	50,0
13:41	85,3	49,8
13:46	86,2	49,5
13:51	86,5	49,4



Recuerda que el vértice se calcula a partir de la expresión analítica de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$ siendo $V(x_0, y_o)$ con x_o=-— (hora del mediodía solar) e $y_o = f(x_0)$ (sombra del palo en el mediodía solar).

Sólo nos falta calcular el tamaño del palo (gnomon) y con el tamaño de la sombra calcular el ángulo que forma el sol con el palo (altura solar) a partir de la tangente.





Ya tienes el valor de tu ángulo, ahora a esperar que tus compañeros del otro instituto hayan hecho lo mismo. La diferencia entre estos dos ángulos debería ser la diferencia de latitud entre ambos centros. Utiliza algún programa informático como *sigpac* para ver la distancia (sólo en latitud) entre los dos centros y mediante una regla de tres y ¡ya tienes calculado la longitud de la circunferencia terrestre!