MATEMÁTICAS I:
1º BACHILLERATO
Capítulo 2: Álgebra

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo

Revisora: Nieves Zuasti

Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Índice

POLINOMIOS

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. POLINOMIOS

1.1. Definición. Términos. Grado. Valor numérico

Recuerda que:

Un **monomio** viene dado por el producto de números reales e indeterminadas. Llamaremos **coeficiente** de un monomio al número real que multiplica a la indeterminada, o indeterminadas; la indeterminada, o indeterminadas, conforman la **parte literal** del monomio.

Un **polinomio** es una expresión construida a partir de la suma de monomios. El **grado de un polinomio** vendrá dado por el mayor grado de sus monomios.

Ejemplos:

- $\frac{1}{7}\cdot x^2 - 32\cdot x^3 + 8$ *es un polinomio de grado 3 en la variable* x .
- $-5\cdot y^4 + 6\cdot x^2 + 11\cdot x$ *es un polinomio de grado 4 en las indeterminadas* x *e* y.
- $3\cdot x^2\cdot y^3 - 2 + 5\cdot y^2$ *es un polinomio de grado 5 en* x *e* y.
- $8x - 9\cdot y + 3\cdot z$ *es un polinomio de grado 1 en* x , y *y* z.

Tanto en esta sección como en la siguiente nos limitaremos, básicamente, a considerar polinomios con una única variable.

El aspecto genérico de un polinomio en la variable x es

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde los coeficientes a_k son números reales.

Decimos que un polinomio es **mónico** cuando el coeficiente de su término de mayor grado es igual a 1.

Los términos de un polinomio vienen determinados por el número de monomios que tenga ese polinomio.

Recuerda que:

Monomio: *mono: uno, nomio: término*: 1 término

Binomio: *bino: 2 dos, nomio: término:* 2 términos

Trinomio: *trino: tres, nomio: término* : 3 términos.

Cuatrinomio: *cuatri: cuatro, nomio: término*: cuatro términos.

A partir de cuatrinomio se les nombra polinomios: *Poli: varios, nomio: términos.*

Así por ejemplo:

- $4y^3+3y-7$ está formado por 3 monomios $4y^3$, $3y$, -7 por lo tanto tendrá **tres términos.**
- $-3y^4+8x^2+5x$ está formado por 3 monomios, $-3y^4$, $8x^2$ y $5x$, por lo tiene 3 términos.

Si fijamos, o escogemos, un valor concreto para la variable de un polinomio aparece un número real el **valor numérico** del polinomio para ese valor determinado de la variable.

Si hemos llamado p a un polinomio, a la evaluación de p en, por ejemplo, el número –5 la denotamos por $p(-5)$, y leemos *"p de menos cinco"* o *"p en menos cinco"*. Con este criterio, si p es un polinomio cuya indeterminada es la variable x, podemos referirnos a él como p o $p(x)$ indistintamente.

De esta forma apreciamos que un polinomio puede ser entendido como una manera concreta de asignar a cada número real otro número real.

Ejemplos:

- *Si evaluamos el polinomio* $p\equiv -3x^4+\frac{1}{5}x^2+2$ *en* $x=5$ *nos encontramos con el número*

$$p(5)=-3\cdot 5^4+\frac{1}{5}\cdot 5^2+2=-3\cdot 625+5+2=-1875+7=-1868$$

- *El valor del polinomio* $q(y)=4y^3+3y-7$ *para* $y=-1$ *es*

$$q(-1)=4\cdot(-1)^3+3\cdot(-1)-7=4\cdot(-1)-3-7=-4-10=-14$$

1.2. Operaciones con polinomios

Ya sabes que:

Suma de polinomios

Como un polinomio es una suma de monomios, la suma de dos polinomios es otro polinomio. A la hora de sumar dos polinomios procederemos a sumar los monomios de igual parte literal.

Ejemplos:

- *La suma de los polinomios* $-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2$ *y* $-x^4+4x^2-5x-6$ *es el polinomio*

$$\left(-3x^4+\frac{1}{5}x^2+2\right)+(-x^4+4x^2-5x-6)=(-3x^4-x^4)+\left(\frac{1}{5}x^2+4x^2\right)-5x+(2-6)=$$

$$=(-3-1)\cdot x^4+\left(\frac{1}{5}+4\right)\cdot x^2-5x+(2-6)=-4x^4+\frac{21}{5}x^2-5x-4$$

- $(7x^2-5x+3)+(2x^2+9x-8)=(7x^2+2x^2)+(-5x+9x)+(3-8)=9x^2+4x-5$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- En el siguiente ejemplo sumaremos dos polinomios disponiéndolos, adecuadamente, uno sobre otro.

$$\begin{array}{rrrrrrr} & 2x^5 & +6x^4 & +3x^3 & -11x^2 & +5x & +6 \\ + & -9x^5 & & +4x^3 & +11x^2 & -9x & -7 \\ \hline & -7x^5 & +6x^4 & +7x^3 & & -4x & -1 \end{array}$$

Propiedades de la suma de polinomios

Propiedad conmutativa. Si p y q son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de sumarlos:

$$p+q\equiv q+p$$

Ejemplo:

- $(4x^2-2x+7)+(-x^3+x^2-3x+1)=-x^3+(4x^2+x^2)+(-2x-3x)+(7+1)=-x^3+5x^2-5x+8$
- $(-x^3+x^2-3x+1)+(4x^2-2x+7)=-x^3+(x^2+4x^2)+(-3x-2x)+(1+7)=-x^3+5x^2-5x+8$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden sumar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

$$(p+q)+r\equiv p+(q+r)$$

Ejemplo:

- $(2x^3-2x^2+2)+(x^4+7x^2+5x+2)+(x+6)=(2x^3-2x^2+2+x^4+7x^2+5x+2)+(x-6)=$
$=(x^4+2x^3+5x^2+5x+2)+(x+6)=x^4+2x^3+5x^2+6x+8$

También:

- $(2x^3-2x^2+2)+(x^4+7x^2+5x+2)+(x-6)=(2x^3-2x^2+2)+(x^4+7x^2+5x+2+x+6)=$
$=(2x^3-2x^2+2)+(x^4+7x^2+6x+8)=x^4+2x^3+5x^2+6x+10$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: el resultado de sumarlo con cualquier otro siempre es éste último. Se trata del polinomio dado por el número 0, el ***polinomio cero***.

Ejemplo:

- $(5x^3+4x^2-3x+1)+0=0+(5x^3+4x^2-3x+1)=(5x^3+4x^2-3x+1)$
- $0+(-7x^3+3x+7)=(-7x^3+3x+7)+0=-7x^3+3x+7$

Elemento opuesto. Cada polinomio tiene asociado otro, al que llamaremos su ***polinomio opuesto***, tal que la suma de ambos es igual al polinomio cero. Alcanzamos el polinomio opuesto de uno dado, simplemente, cambiando el signo de cada monomio.

Ejemplo:

- El polinomio opuesto de $p \equiv -3x^4 + 5x^3 + 2x - 7$ es $3x^4 - 5x^3 - 2x + 7$, al que denotaremos como "$-p$". Ratifiquemos que su suma es el polinomio cero:

$$(-3x^4 + 5x^3 + 2x - 7) + (3x^4 - 5x^3 - 2x + 7) = (-3x^4 + 3x^4) + (5x^3 - 5x^3) + (2x - 2x) + (-7 + 7) = 0$$

Resta de polinomios

Recordemos que el polinomio *opuesto* de otro se obtiene simplemente cambiando el signo de cada monomio. Esta acción se corresponde con multiplicar por el número "-1" el polinomio original. De esta forma el polinomio opuesto de p es

$$-p \equiv (-1) \cdot p$$

En este momento aparece de manera natural la **operación diferencia**, o **resta**, de polinomios. La definimos con la ayuda del polinomio opuesto de uno dado:

$$p - q \equiv p + (-q) \equiv p + (-1) \cdot q$$

La resta consiste en sumar a un polinomio el opuesto de otro.

Ejemplo:

- Dado el polinomio: $p \equiv 2x^4 - 3x^2 + 6$ y el polinomio: $q \equiv -7x^4 + 6x^2 + 7$.

Vamos a restar $p - q$:

El proceso es el mismo que para la suma, lo único que cambia es que a p le sumamos el opuesto de q:

Es decir a q le cambiamos de signo y se lo sumamos a p:

$$(2x^4 - 3x^2 + 6) - (-7x^4 + 6x^2 + 7) = (2x^4 - 3x^2 + 6) + (7x^4 - 6x^2 - 7) = 9x^4 - 5x^2 - 1.$$

Recordemos que el opuesto de q es $-q$, $(7x^4 - 6x^2 - 7)$.

Ejemplo:

- $$(-5x^2 - 3x + 2) - (-2x^4 + x^3 + 3x^2 + 6) = (-5x^2 - 3x + 2) + (2x^4 - x^3 - 3x^2 - 6) =$$ $$= 2x^4 - x^3 + (-5x^2 - 3x^2) - 3x + (2 - 6) = 2x^4 - x^3 - 8x^2 - 3x - 4$$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

1. Realiza la suma y resta de los siguientes polinomios:

   a) $x^2 - 2$ b) $3x^4 + x^3 - 1$

2. Realiza las siguientes sumas de polinomios:

   a) $(x^2 - x) + (-2x^2 - 3x + 1) + (2x^3 - 2x^2 + x - 2)$

   b) $-x^4 + (x^3 + 2x - 3) + (-3x^2 - 5x + 4) + (2x^3 - x + 5)$

3. Escribe el polinomio opuesto de cada uno de los siguientes polinomios:

   a) $2x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 4x - 1$

   b) $-7x^3 - 6x + 5$

   c) $-x^4 + 3x^2 - 8x + 7$

4. Considera los polinomios $p \equiv +x^3 - 6x + 2$, $q \equiv 3x^2 + 3x + 1$, así como el polinomio suma $s \equiv p + q$. Halla los valores que adopta cada uno de ellos para $x = -2$, es decir, calcula $p(-2)$, $q(-2)$ y $s(-2)$. Estudia si existe alguna relación entre esos tres valores.

5. Obtén el valor del polinomio $p \equiv -x \; -5x^3 + 2x - 2$ en $x = 3$. ¿Qué valor toma el polinomio opuesto de p en $x = 3$?

6. Realiza las siguientes diferencias de polinomios:

   a) $(-4x^3 + 2x) - (-3x^2)$

   b) $(2x^4 + x) - (-3x - 4)$

   c) $(3x^2 - x) - (2x^3 + x^2 - x)$

Producto de polinomios

Otra operación que podemos realizar con polinomios es la multiplicación.

El resultado del producto de polinomios siempre será otro polinomio. Aunque en un polinomio tenemos una indeterminada, o variable, como ella toma valores en los números reales, a la hora de multiplicar polinomios utilizaremos las propiedades de la suma y el producto de los números reales, en particular la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; así, todo queda en función del producto de monomios, cuestión que resolvemos con facilidad:

$$ax^n \cdot bx^m = abx^{n+m}$$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplos:

a) $6x^2 \cdot (-2x^4) = 6 \cdot (-2) \cdot x^{2+4} = -12x^6$

b) $5x^3 \cdot (-4) = 5 \cdot (-4) \cdot x^3 = -20x^3$

c) $3x^2 \cdot (2x^2 - 4x + 6) = (3x^2 \cdot 2x^2) - (3x^2 \cdot 4x) + (3x^2 \cdot 6) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2$

d) $(-x^3 + 3x - 1) \cdot (-2x) = (-x^3) \cdot (-2x) + (3x) \cdot (-2x) + (-1) \cdot (-2x) = 2x^4 - 6x^2 + 2x$

e) $(3x-2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = (3x) \cdot (x^2 - 4x - 5) + (-2) \cdot (x^2 - 4x - 5) =$
$(3x^3 - 12x^2 - 15x) + (-2x^2 + 8x + 10) =$
$= 3x^3 + (-12x^2 - 2x^2) + (-15x + 8x) + 10 = 3x^3 - 14x^2 - 7x + 10$

f) $(x+6) \cdot (x^2 - 2x) = (x+6) \cdot x^2 + (x+6) \cdot (-2x) = (x^3 + 6x^2) + (-2x^2 + 12x) = x^3 + 6x^3 - 2x^2 + 12x$

Ejemplo:

- *También podemos materializar el producto de polinomios tal y como multiplicamos números enteros:*

$$\begin{array}{r}
-2x^3 + x + 4 \\
\times \qquad x^2 - 3x + 1 \\
\hline
-2x^3 \qquad + x + 4 \\
6x^4 \qquad - 3x^2 - 12x \quad \\
-2x^5 \qquad + x^3 + 4x^2 \qquad\qquad \\
\hline
-2x^5 + 6x^4 - x^3 + x^2 - 11x + 4
\end{array}$$

Actividades propuestas

7. Efectúa los siguientes productos de polinomios:

a) $(5x^3 - 2x) \cdot (-4x^3)$ b) $(2x^4 + x) \cdot (-3x - 4)$

c) $(2x^5 + x^3 - x^2) \cdot (3x^2 - x)$ d) $(-1) \cdot (7x^3 - 4x^2 - 3x + 1)$

8. Multiplica cada uno de los siguientes polinomios por un número de tal forma que surjan polinomios mónicos:

a) $4x^3 + 3x^3 + 2x^2$ b) $-2x^3 + x^2 - 1$ c) $-x^2 + x - 7$

9. Calcula y simplifica los siguientes productos:

a) $3x \cdot (2x^3 + 4x^2 - 6)$ b) $(3x - 4) \cdot (4x + 6)$

c) $(2a^2 - 5b) \cdot (4b - 3a^2)$ d) $(3a - 6) \cdot (8 - 2a) \cdot (9a - 2)$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Propiedades del producto de polinomios

Propiedad conmutativa. Si p y q son dos polinomios, no importa el orden en el que los coloquemos a la hora de multiplicarlos:

$$p \cdot q \equiv q \cdot p$$

Ejemplo:

- $(2x^2-7)\cdot(-x^4+x^2)=2x^2\cdot(-x^4+x^2)-7\cdot(-x^4+x^2)=-2x^6+2x^4+7x^4-7x^2=-2x^6+9x^3-7x^2$

$$(-x^4+x^2)\cdot(2x^2-7)=-x^4\cdot(2x^2-7)+x^2\cdot(2x^2-7)=-2x^6+7x^4+2x^4-7x^2=-2x^6+9x^4-7x^2$$

Propiedad asociativa. Nos señala cómo se pueden multiplicar tres o más polinomios. Basta hacerlo agrupándolos de dos en dos:

$$(p\cdot q)\cdot r \equiv p\cdot(q\cdot r)$$

Ejemplo:

$$\big((4x^2-2)\cdot(-3x+1)\big)\cdot(-x^3+x)=(-12x^3+4x^2+6x-2)\cdot(-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

También:

$$(4x^2-2)\cdot\big((-3x+1)\cdot(-x^3+x)\big)=(4x^2-2)\cdot(3x^4-3x^2-x^3+x)=$$
$$=12x^6-12x^4-4x^5+4x^3-6x^4+6x^2+2x^3-2x=12x^6-4x^5-18x^4+6x^3+6x^2-2x$$

Elemento neutro. Hay un polinomio con una propiedad particular: al multiplicarlo por cualquier otro siempre nos da éste último. Se trata del polinomio dado por el número 1, el *polinomio unidad*.

Ejemplo:

- $1\cdot(-8x^2-2x+3)=(-8x^2-2x+3)\cdot 1=-8x^2-2x+3$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma. Cuando en una multiplicación de polinomios uno de los factores viene dado como la suma de dos polinomios como, por ejemplo,

$$(8x^2-x)\cdot\left((-2x+7)+(x^3-4x)\right)$$

tenemos dos opciones para conocer el resultado:

a) realizar la suma y, después, multiplicar

$$(8x^2-x)\cdot\left((-2x+11)+(x^3-4x)\right)=(8x^2-x)\cdot\left(x^3-6x+11\right)=$$
$$=8x^5-48x^3+88x^2-x^4+6x^2-11x=8x^5-x^4-48x^3+94x^2-11x$$

b) distribuir, aplicar, la multiplicación a cada uno de los sumandos y, después, sumar:

$$(8x^2-x)\cdot\left((-2x+11)+(x^3-4x)\right)=(8x^2-x)\cdot(-2x+11)+(8x^2-x)\cdot(x^3-4x)=$$
$$=(-16x^3+88x^2+2x^2-11x)+(8x^5-32x^3-x^4+4x^2)=8x^5-x^4-48x^3+94x^2-11x$$

Comprobamos que obtenemos el mismo resultado.

En general, la **propiedad distributiva** de la multiplicación respecto de la suma nos dice que

$$p\cdot(q+r)\equiv(p\cdot q)+(p\cdot r)$$

Conviene comentar que la anterior propiedad distributiva leída en sentido contrario, de derecha a izquierda, es lo que comúnmente se denomina **sacar factor común**.

Ejemplo:

$$6x^6-10x^4-22x^3+2x^2=(3x^4-5x^2-11x+1)\cdot 2x^2$$

Actividades propuestas

10. Realiza los siguientes productos de polinomios:

a) $x^2\cdot(-5x^4-3x^2+1)\cdot 2x^3$

b) $(2x^2-3)\cdot(-3x^2-5x+4)\cdot(-x)$

11. De cada uno de los siguientes polinomios extrae algún factor que sea común a sus monomios:

a) $-16x^4-20x^3+10x^2$

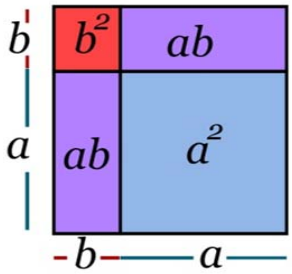
b) $24x^4-30x^2$

Productos notables de polinomios

En este apartado vamos a destacar una serie de productos concretos de polinomios que surgen frecuentemente. Podemos exponerlos de muy diversas formas. Tal y como lo haremos, aparecerá más de una indeterminada; hemos de ser capaces de apreciar que si, en un algún caso concreto, alguna indeterminada pasa a ser un número concreto esto no hará nada más que particularizar una situación más general.

Potencias de un binomio. Las siguientes igualdades se obtienen, simplemente, tras efectuar los oportunos cálculos:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



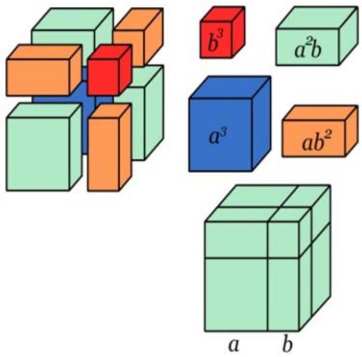
El cuadrado de una suma es igual al cuadrado del primero, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Comprueba la igualdad a partir de los cuadrados y rectángulos de la ilustración.

- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

El cuadrado de una diferencia es igual al cuadrado del primero, menos el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo.

Observa la figura y conéctala con la igualdad.



- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Ratifica la igualdad con los cubos y prismas de la figura.

- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Podemos observar que, en cada uno de los desarrollos, el exponente del binomio coincide con el grado de cada uno de los monomios.

Ejemplos:

a) $(a+2)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot 2 + 2^2 = a^2 + 4a + 4$

b) $(x-5)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 5 + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

c) $(7x+5)^2 = (7x)^2 + 2\cdot 7x\cdot 5 + (5)^2 = 49x^2 + 70x + 25$

d) $(x-3y)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 3y + (3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2$

e) $(4x-5)^3 = (4x)^3 - 3\cdot(4x)^2\cdot 5 + 3\cdot(4x)\cdot 5^2 - 5^3 = 64x^3 - 60x^2 + 30x - 125$

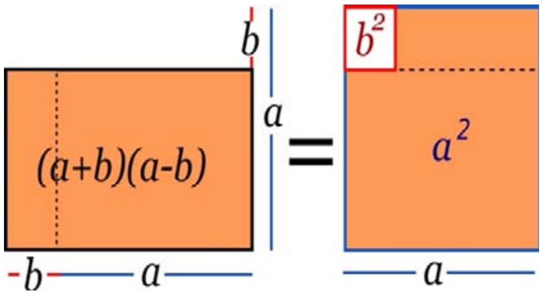
Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Suma por diferencia. De nuevo la siguiente igualdad se obtiene tras efectuar el producto señalado:

- $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

Suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados.

Observa las figuras y conéctalas con la igualdad.



Ejemplos:

a) $(a+5)\cdot(a-5)=a^2-5^2=a^2-25$

b) $(x+1)\cdot(x-1)=x^2-1^2=x^2-1$

c) $(3x+4)\cdot(3x-4)=(3x)^2-4^2=9x^2-16$

d) $(-3x-5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(3x+5)\cdot(-3x+5)=(-1)\cdot(5+3x)\cdot(5-3x)=$

$=(-1)\cdot(5^2-(3x)^2)=-25+9x^2$

Actividades propuestas

12. Realiza los cálculos:

a) $(2+3a)^2$

b) $(-x+3)^2$

c) $(-3x+2)^2$

d) $(x^2-1)^3$

e) $(4x^2+2)^3$

13. Obtén las fórmulas de los cuadrados de los siguientes trinomios:

a) $(a+b+c)^2$ b) $(a+b-c)^2$

14. Desarrolla las siguientes potencias:

a) $(2x - 5y)^2$ b) $(3x + y/3)^2$ c) $(5x^2 - 5/x)^2$

d) $(3a - b)^2$ e) $(a^2 + b^2)^2$ f) $(3/5y - 2/y)^2$

15. Expresa como cuadrado de una suma o de una diferencia las siguientes expresiones algebraicas:

a) $a^4 + 6a^2 + 9$ b) $9x^2 - 6x + 1$ c) $b^2 - 10b + 25$

d) $4y^2 + 12y + 9$ e) $a^4 - 2a^2 + 1$ f) $y^4 + 6y^2 + 9$

16. Efectúa estos productos:

a) $(4x^2+3y)\cdot(4x^2-3y)$ b) $(2x^2+8)\cdot(2x^2-8)$ c) $(-x^2+3x)\cdot(x^2+3x)$

División de polinomios

Ya sabes que:

Analicemos con detenimiento la división de dos números enteros positivos. Cuando dividimos dos números, D (dividendo) entre d (divisor, distinto de 0), surgen otros dos, el cociente (c) y el resto (r). Ellos se encuentran ligados por la llamada *prueba de la división*:

$$D = d \cdot c + r$$

Alternativamente:

$$\frac{D}{d} = c + \frac{r}{d}$$

Además, decimos que la división es exacta cuando $r = 0$.

El conocido algoritmo de la división persigue encontrar un número entero, el cociente c, tal que el resto r sea un número menor que el divisor d, y mayor o igual que cero. Fijémonos en que, sin esta exigencia para el resto r, podemos escoger arbitrariamente un valor para el cociente c el cual nos suministra su valor asociado como resto r.

En efecto, si tenemos como dividendo $D = 672$ y como divisor $d = 12$, "si queremos" que el cociente sea $c = 48$ su resto asociado es

$$r = D - d \cdot c = 672 - 12 \cdot 48 = 672 - 576 = 96$$

y la conexión entre estos cuatro números es

$$672 = 12 \cdot 48 + 96$$

Esta última "lectura" de la división de números enteros va a guiarnos a la hora de dividir dos polinomios.

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, la división de $p(x)$, polinomio dividendo, entre $q(x)$, polinomio divisor, nos proporcionará otros dos polinomios, el polinomio cociente $c(x)$ y el polinomio resto $r(x)$. También aquí pesará una exigencia sobre el polinomio resto: su grado deberá ser menor que el grado del polinomio divisor. La relación entre los cuatro será, naturalmente,

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

También escribiremos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Al igual que ocurre con el algoritmo de la división entera, el algoritmo de la división de polinomios consta de varias etapas, de carácter repetitivo, en cada una de las cuales aparecen unos polinomios cociente y resto "provisionales" de forma que el grado de esos polinomios resto va descendiendo hasta que nos topamos con uno cuyo grado es inferior al grado del polinomio divisor, lo que indica que hemos concluido. Veamos este procedimiento con un ejemplo concreto

Ejemplo:

- Vamos a dividir el polinomio $p(x)=6x^4+5x^3+x^2+3x-2$ entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$. Como el polinomio divisor, $q(x)$, es de grado 2, debemos encontrar dos polinomios, un polinomio cociente $c(x)$, y un polinomio resto $r(x)$ de grado 1 o 0, tales que

$$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$$

➢ *Primera etapa:*

Para poder lograr la igualdad $p\equiv q\cdot c+r$, como el grado de $r(x)$ será 1 o 0, el término de mayor grado de $p(x)$, $6x^4$, surgirá del producto $q(x)\cdot c(x)$. Así obtenemos la primera aproximación de $c(x)$, su monomio de mayor grado:

$$c_1(x)=3x^2$$

y, de manera automática, también un primer resto $r_1(x)$:

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ \ 2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} \qquad\qquad & 3x^2 \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \end{array}$$

Como este polinomio $r_1(x)$ es de grado 3, mayor que 2, el grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto no es el definitivo; debemos continuar.

➢ *Segunda etapa:*

Esta segunda etapa consiste en dividir el polinomio $r_1(x)=8x^3-8x^2+3x-2$, surgido como resto de la etapa anterior, entre el polinomio $q(x)=2x^2-x+3$, el divisor inicial. Es decir, repetimos lo hecho antes pero considerando un nuevo polinomio dividendo: el polinomio resto del paso anterior.

Al igual que antes, el grado de $r(x)$ debería ser 1 o 0. Como el término de mayor grado de $r_1(x)$, $8x^3$, sale del producto $q(x)\cdot c_2(x)$, es necesario que el polinomio cociente contenga el monomio

$$c_2(x)=4x$$

Ello nos lleva a un segundo resto $r_2(x)$:-4x^2-9x-2

Como este polinomio $r_2(x)$ es de grado 2, igual que el grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto no es el definitivo; debemos continuar.

➢ *Primera y segunda etapas:*

$$\begin{array}{rl} 6x^4+5x^3+x^2+3x-2 & \underline{|\ \ 2x^2-x+3} \\ \underline{-6x^4+3x^3-9x^2} \qquad\qquad & 3x^2+4x \\ 8x^3-8x^2+3x-2 & \\ \underline{-8x^3+4x^2-12x} \quad & \\ -4x^2-9x-2 & \end{array}$$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- *Tercera etapa:*

Esta tercera etapa consiste en dividir el polinomio $r_2(x) = -4x^2 - 9x - 2$, el resto de la etapa anterior, entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$, el divisor inicial. De nuevo repetimos el algoritmo pero con otro polinomio dividendo: el polinomio resto del paso anterior.

Perseguimos que $r_2 \equiv q \cdot c_3 + r$. Como en cada paso, el grado de $r(x)$ debería ser 1 o 0. El término de mayor grado de $r_2(x)$, $-4x^2$, surge del producto $q(x) \cdot c_3(x)$, por lo que

$$c_3(x) = -2$$

y el tercer resto $r_3(x)$ es: -11x+4

Como este polinomio $r_3(x)$ es de grado 1, menor que 2, grado del polinomio divisor $q(x)$, ese polinomio resto sí es el definitivo. Hemos concluido:

- *Las tres etapas:*

$$\begin{array}{rl|l}
 & 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2 & \;\; 2x^2 - x + 3 \\ \cline{3-3}
 & \underline{-6x^4 + 3x^3 - 9x^2} & \;\; 3x^2 + 4x - 2 \\
 & 8x^3 - 8x^2 + 3x - 2 & \\
 & \underline{-8x^3 + 4x^2 - 12x} & \\
 & -4x^2 - 9x - 2 & \\
 & \underline{4x^2 - 2x + 6} & \\
 & -11x + 4 &
\end{array}$$

Conclusión: Al dividir el polinomio $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + x^2 + 3x - 2$ entre el polinomio $q(x) = 2x^2 - x + 3$ obtenemos como polinomio cociente $c(x) = 3x^2 + 4x - 2$ y como polinomio resto $r(x) = -11x + 4$.

Actividades propuestas

17. Divide los siguientes polinomios:

a) $2x^4 - x^2 - x + 7$ entre $x^2 + 2x + 4$

b) $-10x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ entre $5x^3 - x^2 - x + 3$

c) $4x^5 - 6x^3 + 6x^2 - 3x - 7$ entre $-2x^3 + x + 3$

d) $-8x^5 - 2x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 3x + 5$ entre $4x^3 + x^2 + x - 1$

e) $-6x^5 + x^2 + 1$ entre $x^3 + 1$

18. Encuentra dos polinomios tales que al dividirlos aparezca $q(x) = x^2 - x - 3$ como polinomio cociente y $r(x) = -3x^2 - 1$ como resto.

1.3. Regla de *Ruffini*. Teorema del resto

Paolo Ruffini

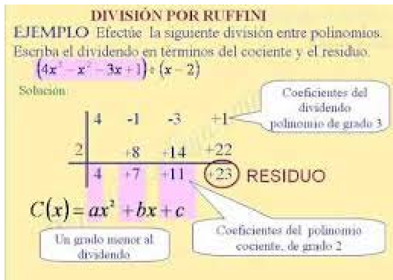
Debido a la importancia que tiene la división de polinomios cuando el polinomio divisor es de la forma $x-\alpha$, es conveniente agilizar tales divisiones.

Estamos ante la llamada **regla de *Ruffini***, un algoritmo que nos proporciona tanto el cociente como el resto que resultan de dividir un polinomio cualquiera entre otro de la forma $x-\alpha$.

Veámoslo con un ejemplo:

Consideremos el polinomio $p(x)=3x^3-4x^2+x+3$. Vamos a dividirlo entre $x+2$.

$$
\begin{array}{rl}
3x^3-4x^2+x+3 & \underline{|\ \ x+2\qquad} \\
\underline{-3x^3-6x^2} & 3x^2-10x+21 \\
-10x^2+\ x\ +3 & \\
\underline{10x^2+20x} & \\
21x+3 & \\
\underline{-21x-42} & \\
-39 &
\end{array}
$$



Veamos cómo han surgido tanto el polinomio cociente como el resto. El que el grado del dividendo sea tres y que el divisor sea de grado uno impone que el cociente tenga grado dos y que el resto sea un número real. El cociente consta de los monomios $3x^2$, $-10x$ y 21, los cuales coinciden con los monomios de mayor grado de cada uno de los dividendos después de disminuir sus grados en una unidad: $3x^2$ procede de $3x^3-4x^2+x+3$ (el dividendo inicial), $-10x$ viene de $-10x^2+\ x\ +3$ y, por último, 21 de $21x+3$. Este hecho, coincidencia en el coeficiente y disminución del grado en una unidad, se debe a que el divisor, $x+2$, es mónico y de grado uno.

Seguidamente, vamos a tener en cuenta únicamente los coeficientes del dividendo, por orden de grado, 3, –4, 1 y 3; en cuanto al divisor, como es mónico y de grado uno, basta considerar su término independiente, +2, pero como el resultado de multiplicar los monomios que van conformando el cociente por el divisor hemos de restárselo a cada uno de los dividendos, atendiendo a este cambio de signo, en lugar del término independiente, +2, operaremos con su opuesto, –2, número que, a la vez, es la raíz del divisor $x+2$ y sobre el que pesa la pregunta de si es o no raíz de $p(x)$.

Este último concepto lo veremos más delante de manera detallada cuando definamos raíz de un polinomio.

Vamos a compararlo con el proceso de la división convencional y veremos que es igual:

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

- *Primer paso de la división:*

$$\begin{array}{l} 3x^3-4x^2+x+3 \\ \underline{-3x^3-6x^2} \\ \quad -10x^2+\ x\ +3 \end{array} \qquad \begin{array}{|l} \underline{\ x+2\ } \\ 3x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & & \\ \hline & 3 & -10 & & \end{array}$$

Aparece en el cociente el monomio $3x^2$ (coeficiente 3), el cual provoca la "desaparición" de $3x^3$ en el dividendo y la aparición del monomio $-6x^2$ (coeficiente $-6=(-2)\cdot 3$). Después de operar (sumar) nos encontramos con $-10x^2$ (coeficiente $-10=(-4)+(-6)$) y, en el cociente $-10x$.

- *Segundo paso. El dividendo pasa a ser* $-10x^2+\ x\ +3$.

$$\begin{array}{l} 3x^3-4x^2+x+3 \\ \underline{-3x^3-6x^2} \\ \quad -10x^2+\ x\ +3 \\ \quad \underline{10x^2+20x} \\ \qquad\quad 21x+3 \end{array} \qquad \begin{array}{|l} \underline{\ x+2\ } \\ 3x^2-10x \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & \\ \hline & 3 & -10 & 21 & \end{array}$$

La irrupción en el cociente del monomio $-10x$ (coeficiente -10) provoca la "desaparición" de $-10x^2$ en el dividendo y la aparición del monomio $20x$ (coeficiente $20=(-2)\cdot(-10)$). Después de operar (sumar) nos encontramos con $21x$ (coeficiente $21=1+20$) y, en el cociente 21.

- *Tercer paso. El dividendo pasa a ser* $21x\ +3$.

$$\begin{array}{l} 3x^3-4x^2+x+3 \\ \underline{-3x^3-6x^2} \\ \quad -10x^2+\ x\ +3 \\ \quad \underline{10x^2+20x} \\ \qquad\quad 21x+3 \\ \qquad \underline{-21x-42} \\ \qquad\qquad -39 \end{array} \qquad \begin{array}{|l} \underline{\ x+2\ } \\ 3x^2-10x+21 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr|r} & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -2 & & -6 & 20 & -42 \\ \hline & 3 & -10 & 21 & -39 \end{array}$$

Tenemos en el cociente el término independiente 21. Éste provoca la eliminación de $21x$ en el dividendo y la aparición del término $-42=(-2)\cdot 21$. Después de operar (sumar) nos encontramos con el resto $-39=3-42$.

En cada uno de los pasos figura, en la parte derecha, lo mismo que se ha realizado en la división convencional, pero con la ventaja de que todo es más ágil debido a que únicamente se manejan números reales: los coeficientes de los distintos polinomios intervinientes.

Ejemplo:

- *Dividamos el polinomio* $p(x)=-x^4+2x^3-5x+4$ *entre* $x+3$:

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & -1 & 2 & 0 & 5 & 4 \\ -3 & & +3 & -15 & +45 & -150 \\ \hline & -1 & +5 & -15 & +50 & -146 \end{array}$$

Actividades propuestas

19. Usa la regla de *Ruffini* para realizar las siguientes divisiones de polinomios:

a) $-3x^2+x+1$ entre $x-1$

b) x^4+2x^3-2x+1 entre $x-2$

c) $4x^3-3x^2-1$ entre $x+1$

d) x^3-9x+1 entre $x-3$

20. Estudia si es posible usar la regla de *Ruffini*, de alguna forma, para dividir x^3+2x^2+5x+7 entre $2x+3$.

Teorema del resto

El teorema del resto es muy útil para hallar los valores numéricos de los polinomios sin necesidad de sustituir directamente en ellos la incógnita por el número de que se trate. Haciendo uso de dicho teorema, podemos hallar las raíces de los polinomios, proceso que habrá que realizar con mucha frecuencia en lo sucesivo.

El enunciado del teorema del resto es el siguiente:

Teorema del resto. El valor numérico que adopta un polinomio $p(x)$ al particularizarlo en $x=\alpha$ coincide con el resto que aparece al dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

De esta forma, podremos saber de antemano si una división va a ser exacta sin necesidad de efectuarla.

Demostración:

Según vimos en el apartado de la división de polinomios, al dividir un polinomio $D(x)$ entre otro, $d(x)$, la relación que se establece es:

$$D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x)$$

donde $c(x)$ y $r(x)$ son respectivamente, el cociente y el resto de la división. En este caso estamos dividiendo por $x - a$, es decir, el divisor es $d(x) = x - a$. Por tanto

$$D(x) = (x - a) \cdot c(x) + r(x)$$

Hallamos el valor numérico del polinomio $D(x)$ para $x = a$, para ello sustituimos la x por a:

$$D(a) = (a - a) \cdot c(a) + r(a)$$

Y, por tanto, $D(a) = r(a) = r$, que es precisamente lo que queríamos demostrar.

Ejemplo:

- *Dividamos el polinomio* $p(x) = -x^4 + 3x^3 - 5x + 4$ *entre* $x + 3$*:*

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & -1 & +3 & 0 & 5 & 4 \\ -3 & & +3 & -18 & +51 & -168 \\ \hline & -1 & +6 & -18 & +56 & -164 \end{array}$$

El cociente es $-x^3 + 6x^2 - 18x + 56$ y el resto -164

$$p(x) = -x^4 + 2x^3 - 5x + 4 = (x+3)\cdot(-x^3 + 6x^2 - 18x + 56) + (-164)$$

Si evaluamos $p(x)$ en $x = -3$ no puede dar cero, pero ¿qué valor resulta?

$$p(-3) = (-3+3)\cdot(-3)^3 - 6.(-3)^2 - 18\cdot(-3) + 56) + (-164) = 0 + (-164) = -164$$

Naturalmente hemos obtenido el resto anterior, que vemos que coinciden, el valor numérico del polinomio y el resto de la división.

Actividades propuestas

21. Utiliza la regla de *Ruffini* para conocer el valor del polinomio $-3x^3 + 7x^2 + 2x + 4$ en $x = 5$.

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.4. Raíces de un polinomio:

Dado un polinomio $p(x)$ diremos que un número real concreto α es **una raíz**, o **un cero**, del polinomio p, si al evaluar p en $x=\alpha$ obtenemos el número 0, esto es, si

$$p(\alpha)=0$$

Ejemplo:

- *Consideremos el polinomio* $s(x)=2x^3+2x^2-8x-8$.
  - El número 2 es una raíz de $s(x)$, puesto que

    $$s(2)=2\cdot 2^3+2\cdot 2^2-8\cdot 2-8=2\cdot 8+2\cdot 4-16-8=16+8-16-8=0$$

  - Otra raíz de $s(x)$ es el número -1:

    $$s(-1)=2\cdot(-1)^3+2\cdot(-1)^2-8\cdot(-1)-8=2\cdot(-1)+2\cdot(+1)+8-8=-2+2+8-8=0$$

  - En cambio, el número 1 no es una raíz de $s(x)$:

    $$s(1)=2\cdot 1^3+2\cdot 1^2-8\cdot 1-8=2+2-8-8=4-16=-12\neq 0$$

  - Tampoco es raíz de $s(x)$ el número 0:

    $$s(0)=2\cdot 0^3+2\cdot 0^2-8\cdot 0-8=0+0-0-8=-8\neq 0$$

Cálculo de las raíces de un polinomio

Ejemplos:

- *Comprobemos, mediante la regla de Ruffini, que* $\alpha=\dfrac{1}{2}$ *es raíz del polinomio* $2x^2-3x+1$*:*

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -3 & 1 \\ 1/2 & & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

- *Para conocer las raíces del polinomio* x^2-2 *debemos estudiar si hay algún número real* α *tal que lo anule, es decir, para el que se tenga*

$$\alpha^2-2=0$$
$$\alpha^2=2$$
$$\alpha=\pm\sqrt{2}$$

  Así, el polinomio de grado dos x^2-2 tiene dos raíces distintas, las cuales son números irracionales.

- *Ya sabemos que hay polinomios que carecen de raíces, como por ejemplo* x^2+4.

Para facilitar la comprensión de los conceptos y resultados de este asunto la mayoría de los números que han aparecido hasta ahora, coeficientes, raíces, etc., han sido números enteros. Por supuesto que podemos encontrarnos con polinomios con coeficientes racionales, o irracionales, o con polinomios con raíces dadas por una fracción o un número irracional. También existen polinomios que carecen de raíces.

Apreciamos que la regla de *Ruffini* nos informa sobre si un número concreto es o no raíz de un polinomio. Naturalmente, cuando estamos ante un polinomio, y nos interesa conocer sus raíces, no es posible efectuar una prueba con cada número real para determinar cuáles son raíz del polinomio. En el próximo párrafo destacaremos ciertos "números candidatos" a ser raíz de un polinomio.

A la hora de buscar las **raíces enteras de un polinomio** disponemos del siguiente resultado:

Dado un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

cuyos coeficientes son todos números enteros, sus **raíces enteras**, si las tuviera, se encuentran necesariamente entre los divisores enteros de su término independiente a_0.

Procedamos a su demostración. Supongamos que cierto número entero α es una raíz de ese polinomio. Tal número debe anularlo:

$$a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots\ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$$

$$a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots\ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha = -a_0$$

$$\alpha \cdot (a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \ldots\ldots + a_2\alpha + a_1) = -a_0$$

$$a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1}\alpha^{n-2} + \ldots\ldots + a_2\alpha + a_1 = \frac{-a_0}{\alpha}$$

En la última igualdad, el número del lado izquierdo es entero, porque está expresado como una suma de productos de números enteros. Por ello, el número del lado derecho, $\frac{-a_0}{\alpha}$, también es entero. Al ser también enteros tanto $-a_0$ como α, alcanzamos que α es un divisor de a_0.

Ejemplos:

- Determinemos, con arreglo al anterior resultado, qué números enteros son candidatos a ser raíces del polinomio $7x^3 + 23x^2 - 2x - 6$:

  Tales números enteros candidatos deben ser divisores de -6, el término independiente del polinomio. Por ello, los únicos números enteros que pueden ser raíz de ese polinomio son:

  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$

- Las únicas posibles raíces enteras del polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ también son:

  $$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$$

En este caso 2 y –3 son raíces enteras del polinomio.

Algo más general podemos afirmar sobre clases de números y raíces de un polinomio:

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Dado un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...+ a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

cuyos coeficientes son todos números enteros, sus **raíces racionales**, si las tuviera, necesariamente tienen por numerador algún divisor del término independiente, a_0, y por denominador algún divisor del coeficiente del término de mayor grado, a_n.

Ejemplos:

- En el polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$ los números racionales candidatos a ser raíces suyas tienen por numerador a un divisor de -6 y por denominador a un divisor de 2. Por lo tanto, los únicos números racionales que pueden ser raíz de ese polinomio son:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 2}{2} = \pm 1,\ \frac{\pm 3}{2},\ \frac{\pm 6}{2} = \pm 3$$

  Además de 2 y -3, también es raíz $\frac{-1}{2}$; los demás no lo son.

- Las únicas posibles raíces racionales del polinomio $2x^4 + 7x^3 - 11x^2 - 4x - 3$ son:

$$\pm 1,\ \pm 3,\ \frac{\pm 1}{2},\ \frac{\pm 3}{2}$$

  En este caso ninguno de esos números es raíz del polinomio.

Actividades propuestas

22. Emplea la regla de Ruffini para dictaminar si los siguientes números son o no raíces de los polinomios citados:

a) $\alpha = 3$ de $x^3 - 4x^2 + 5$

b) $\beta = -2$ de $-x^3 - 2x^2 + x + 2$

c) $\gamma = 1$ de $-2x^4 + x + 1$

d) $\sigma = -1$ de $2x^3 + 2x^2$

23. Para cada uno de los siguientes polinomios señala, en primer lugar, qué números enteros son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $x^3 - x^2 + 2x - 2$

b) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 3$

c) $2x^3 + x^2 - 18x - 9$

d) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 6x$

24. Comprueba que $\frac{-1}{2}$ es raíz del polinomio $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$.

25. Para cada uno de los siguientes polinomios indica qué números racionales son candidatos a ser raíces suyas y, después, determina cuáles lo son:

a) $3x^2 + 4x - 5$ b) $2x^3 - 9x^2 + 12x + 2$

1.5. Factorización de polinomios

Todo polinomio de grado n tiene a lo sumo n raíces reales, alguna de las cuales puede aparecer repetida entre esos no más de n números reales.

Basándonos en el cálculo de las raíces de un polinomio vamos a realizar el proceso de descomposición de un polinomio en forma de producto de otros polinomios más sencillos.(Factorización de un polinomio):

Nos vamos a basar en el siguiente enunciado:

La *condición necesaria y suficiente* para que un polinomio $P(x)$ sea divisible por $(x - a)$ es que a sea una raíz de $P(x)$.

Podemos reescribir este resultado de la siguiente manera:

Un polinomio $P(x)$ es divisible por $(x - a) \Leftrightarrow a$ es una raíz de $P(x)$.

Vamos a demostrarlo:

Si $P(x)$ es divisible por $(x - a) \Rightarrow a$ es una raíz de $P(x)$: ***Condición necesaria***

En efecto: Si $P(x)$ divisible por $(x - a) \Rightarrow r = 0 \Rightarrow P(a) = 0$ (por el teorema del resto) $\Rightarrow a$ es raíz de $P(x)$

Si a es una raíz de $P(x) \Rightarrow (x - a)$ divide a $P(x)$: ***Condición suficiente***

En efecto: a raíz de $P(x) \Rightarrow P(a) = 0$ (por el teorema del resto).

El resto de la división de $P(x)$ entre $(x - a)$ es 0 $\Rightarrow (x - a)$ divide a $P(x)$ por la definición de raíz.

Como consecuencia inmediata se tiene: si a es una raíz de $P(x) \Rightarrow P(x) = c(x)\,(x - a)$

El polinomio dado queda descompuesto en forma de producto de dos factores. Repitiendo el proceso para $c(x)$, éste se puede descomponer a su vez de nuevo y así sucesivamente.

Llegando al resultado general: Dado el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ cuyas n raíces son x_1, x_2 , …, x_n ,dicho polinomio se puede descomponer factorialmente de la siguiente forma:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$$

Decimos que un polinomio es **reducible** si admite una factorización mediante polinomios de grado inferior al suyo. En caso contrario el polinomio será **irreducible**.

Ejemplo:

- Descomponer factorialmente el polinomio: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

Como el coeficiente de x^3 es 1, según vimos en el apartado de cálculo de raíces de un polinomio, las posibles raíces racionales, de existir, han de ser divisores de 2.por tanto pueden ser: $+1, -1, +2, -2$.

Comprobamos si el 1 es raíz. Aplicamos el teorema de *Ruffini*:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}$$

Por tanto, 1 es raíz y tenemos:

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$$

Resolviendo ahora la ecuación $x^2 - 3x + 2 = 0$, resulta $x = 1$ y $x = 2$.

Por tanto, $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ y en definitiva, el polinomio tendrá la siguiente descomposición factorial: $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)(x-1)(x-2) = (x-1)^2(x-2)$ siendo sus raíces $x_1 = 1$, doble y $x_2 = 2$.

Hay polinomios que no admiten raíces, es decir, que no se anulan nunca.

Ejemplos:

- El polinomio $t(x) = x^2 + 4$ no tiene raíces puesto que al evaluarlo en cualquier número real α siempre nos da un valor positivo y, por lo tanto, distinto de 0:

$$t(\alpha) = \alpha^2 + 4 > 0$$

  Además, este polinomio de grado dos, $t(x) = x^2 + 4$, es un polinomio irreducible porque, al carecer de raíces, no podemos expresarlo como producto de polinomios de menor grado.

- Otro polinomio sin raíces reales es $u(x) = (x^2+1)^2 = (x^2+1)\cdot(x^2+1) = x^4 + 2x^2 + 1$.

Actividades propuestas

26. Supongamos que tenemos dos polinomios, $p_1(x)$ y $p_2(x)$, y un número real α.

a) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio suma $p_1(x)+p_2(x)$?

b) Si α es una raíz de $p_1(x)$, ¿también es raíz del polinomio producto $p_1(x)\cdot p_2(x)$?

c) ¿Hay alguna relación entre las raíces del polinomio $p_1(x)$ y las del polinomio $4\cdot p_1(x)$?

27. Construye un polinomio de grado 4 tal que posea tres raíces distintas.

28. Determina un polinomio de grado 4 tal que tenga, al menos, una raíz repetida.

29. Construye un polinomio de grado 4 de forma que tenga una única raíz.

30. Conjetura, y luego demuestra, una ley que nos permita saber cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

admite al número 0 como raíz.

31. Demuestra una norma que señale cuándo un polinomio cualquiera

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

admite al número 1 como raíz.

32. Determina las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x+5$ b) $-x+3$ c) $7x-5$ d) $-3x-11$

e) $-7x$ f) $x^2 - 8x$ g) $4x^2 - x - 3$ h) $x^3 - 4x$ i) $x^3 + 25x$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.6. Fracciones algebraicas

Una **fracción algebraica** es una expresión de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \qquad Q(x) \neq 0$$

dónde tanto $P(x)$ como $Q(x)$ son polinomios.

Ejemplos:

- *Así son fracciones algebraicas las siguientes expresiones:*

$$\frac{7x^3-2x}{6x^2+5x-9} \qquad \frac{4x^2-9x}{2x^2+33} \qquad \frac{3x^2y+2xy^2}{7xy}$$

Son expresiones algebraicas, son **fracciones algebraicas**. En general, no son un polinomio. Sólo lo es en el muy particular caso en el que el denominador es un número real diferente de cero, esto es, un polinomio de grado 0.

Es sencillo constatar que las expresiones anteriores no son un polinomio: cualquier polinomio puede tener un valor numérico para cualquier número real x. Sin embargo esas expresiones no pueden ser evaluadas para los valores que anulan el denominador.

- Podríamos creer que la siguiente fracción algebraica sí es un polinomio:

$$\frac{-3x^3+5x^2-3x}{x} = \frac{-3x^3}{x} + \frac{5x^2}{x} + \frac{-3x}{x} = -3x^2+5x-3$$

La expresión de la derecha sí es un polinomio, pues se trata de una suma de monomios, pero la de la izquierda no lo es ya que no puede ser evaluada en $x=0$. No obstante, esa fracción algebraica y el polinomio, cuando son evaluados en cualquier número diferente de cero, ofrecen el mismo valor.

Son **expresiones equivalentes** allí donde ambas tienen sentido.

Simplificación de fracciones algebraicas

De la misma manera que se hace con las fracciones numéricas, para simplificar fracciones algebraicas se descomponen numerador y denominador en factores, simplificando, posteriormente, aquellos que son comunes.

Ejemplo:

- *Una fracción algebraica como* $\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6}$ puede ser simplificada gracias a que el numerador y el denominador admiten factorizaciones en las que algún polinomio está presente en ambas.

$$\frac{x^4-8x^2-9}{x^5-6x^3-6x^2-7x-6} = \frac{(x^2+1)\cdot(x+3)\cdot(x-3)}{(x^2+1)\cdot(x+2)\cdot(x+1)\cdot(x-3)} = \frac{x+3}{(x+2)\cdot(x+1)}$$

Como ya hemos apuntado en otras ocasiones, las expresiones final e inicial no son idénticas pero sí son equivalentes en todos aquellos valores para los que ambas tienen sentido, esto es, para aquellos en los que no se anula el denominador.

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Operaciones con fracciones algebraicas

Las operaciones con fracciones algebraicas se realizan de la misma forma que las respectivas operaciones con fracciones numéricas.

Puesto que las fracciones algebraicas obtenidas a partir de dos polinomios son, en potencia, números reales, operaremos con tales expresiones siguiendo las propiedades de los números reales.

- **Suma o resta.** Para sumar o restar dos fracciones algebraicas deberemos conseguir que tengan igual denominador. Una manera segura de lograrlo, aunque puede no ser la más adecuada, es ésta:

$$\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot q_2}+\frac{p_2\cdot q_1}{q_2\cdot q_1}\equiv\frac{p_1\cdot q_2+p_2\cdot q_1}{q_1\cdot q_2}$$

- **Producto.** Basta multiplicar los numeradores y denominadores entre sí:

$$\frac{p_1}{q_1}\cdot\frac{p_2}{q_2}\equiv\frac{p_1\cdot p_2}{q_1\cdot q_2}$$

- **División.** Sigue la conocida regla de la división de fracciones numéricas:

$$\frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}}\equiv\frac{p_1\cdot q_2}{q_1\cdot p_2}$$

Ejemplo:

- *En una suma de fracciones algebraicas como ésta*

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}$$

podemos alcanzar un común denominador en las fracciones a partir de la descomposición de cada denominador:

$$\frac{3x-2}{x^2+x}+\frac{4}{x^2-x-2}=\frac{3x-2}{x\cdot(x+1)}+\frac{4}{(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}+\frac{4\cdot x}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot x}=$$
$$=\frac{(3x-2)\cdot(x-2)+4x}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}=\frac{3x^2-4x+4}{x\cdot(x+1)\cdot(x-2)}$$

Conviene destacar que en el resultado final se ha optado por dejar el denominador factorizado. De esa forma, entre otras cuestiones, se aprecia rápidamente para qué valores de la indeterminada esa fracción algebraica no admite ser evaluada.

Actividades propuestas

33. Simplifica, si es posible, las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{x^2+4x}{x^3+3x^2-6x-8}$ b) $\dfrac{x^2-1}{x^3+3x^2-6x-8}$ c) $\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$

34. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{3x^2-6x}{9x^2+15}$ b) $\dfrac{a^3-5a^2}{7a^3+4a^2}$ c) $\dfrac{x^2y+3xy^2}{4xy}$ d) $\dfrac{2a^2b^2+3ab}{a^3b-ab}$

35. Realiza las siguientes operaciones teniendo en cuenta las factorizaciones de los denominadores:

a) $\dfrac{5}{-3x+12}+\dfrac{x+2}{x^2-4x}$ b) $\dfrac{-x}{x^2-2x+1}-\dfrac{3x-1}{x^2-1}$

36. Efectúa los siguientes cálculos:

a) $\dfrac{2x+1}{x^2+1}+\dfrac{4}{x}$ b) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{3}{x+1}$ c) $\dfrac{-x}{x^2+3x}\cdot\dfrac{1}{x-1}$ d) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}:\dfrac{x-2}{x+3}$

37. Realiza las siguientes operaciones alterando, en cada apartado, únicamente uno de los denominadores, y su respectivo numerador:

a) $\dfrac{-x^2+x-1}{x^3}-\dfrac{3x+2}{x^2}$ b) $\dfrac{x-2}{x^2+3x}-\dfrac{8}{x+3}$

38. Comprueba las siguientes identidades simplificando la expresión del lado izquierdo de cada igualdad:

a) $\dfrac{8a^4b^3}{2a^2b^2}=4a^2b$ b) $\dfrac{4x^3y^2-3xy^2}{2xy}=2x^2y-\dfrac{3}{2}y$

c) $\dfrac{3x^2-9x}{6x+12}=\dfrac{x^2-3x}{x+4}$ d) $\dfrac{6a^2b^2+8a^2b-10ab}{2ab^2+16a^2b}=\dfrac{3ab+4a-5}{b+8a}$

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

RESUMEN

Noción	*Descripción*	*Ejemplos*
Polinomio	Expresión construida a partir de la suma de monomios	$-x^3+4x^2+8x+6$ Grado 3
Grado de un polinomio	El mayor grado de sus monomios	
Suma, resta y producto de polinomios	El resultado siempre es otro polinomio	$p = -3x + 6$; $q = x^2 + 4$. $p + q = x^2 - 3x + 10$; $p - q = -x^2 - 3x + 2$; $p \cdot q = -3x^3 + 6x^2 - 12x + 24$.
División de dos polinomios	Se obtienen otros dos polinomios, los polinomios cociente ($c(x)$) y resto ($r(x)$), ligados a los polinomios iniciales, los polinomios dividendo ($p(x)$) y divisor ($q(x)$)	$p(x)=q(x)\cdot c(x)+r(x)$
Regla de Ruffini	Nos puede ayudar a la hora de factorizar un polinomio y conocer sus raíces	
Teorema del resto	El valor numérico que adopta un polinomio $p(x)$ al particularizarlo en $x=\alpha$ coincide con el resto que aparece al dividir $p(x)$ entre $x-\alpha$.	
Raíz de un polinomio	Un número real concreto α es **una raíz**, o **un cero**, del polinomio p, si al evaluar p en $x=\alpha$ obtenemos el número 0, es decir, si $p(\alpha)=0$	2 es raíz de $-3x + 6$. 1 y -3 son raíces de x^2+2x-3
Factorización de un polinomio	Consiste en expresarlo como producto de otros polinomios de menor grado	$x^5-3x^3-x^2+3=$ $=(x^2-3)\cdot(x^3-1)$
Fracciones algebraicas	Es una fracción de expresiones polinómicas	$\dfrac{x^2-1}{x^3+x^2-6x}$
Resolución de ecuaciones de 1º grado	Son igualdades algebraicas con una sola incógnita y de grado uno.	$\dfrac{7(x-1)}{3}+\dfrac{5x}{6}=1-\dfrac{x}{2}$
Resolución de ecuaciones de segundo grado	Igualdades algebraicas con una sola incógnita y elevada al cuadrado.	$-x^2+4x+5$ Cuya solución es: x_1=-1; x_2=5
Resoluciones de inecuaciones de 1º grado	Desigualdades algebraicas con una sola incógnitas de grado uno	$\dfrac{x-3}{3}-\dfrac{(x-7)}{6}>\dfrac{4-x}{2}$
Resolución de inecuaciones de 2º grado	Desigualdades algebraicas con una sola incógnita, elevadas al cuadrado.	$x^2 - 6x + 5 > 0$ su solución es el intervalo (1, 5).
Sistemas de ecuaciones lineales, por el método de Gauss	Los sistemas de ecuaciones lineales son ecuaciones en las que todas sus incógnitas están elevadas a la unidad, no pudiendo aparecer el producto de dos de ellas. Resolución por el método de Gauss.	$x + 4y + 3z = -1$ $2x - 3y - 2z = 1$ $-x + 2y + 4z = 2$
Sistemas de inecuaciones lineales	Los sistemas de inecuaciones lineales son inecuaciones en las que todas sus incógnitas están elevadas a la unidad.	

Autores: José Antonio Encabo de Lucas y Eduardo Cuchillo
Revisora: Nieves Zuasti
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF