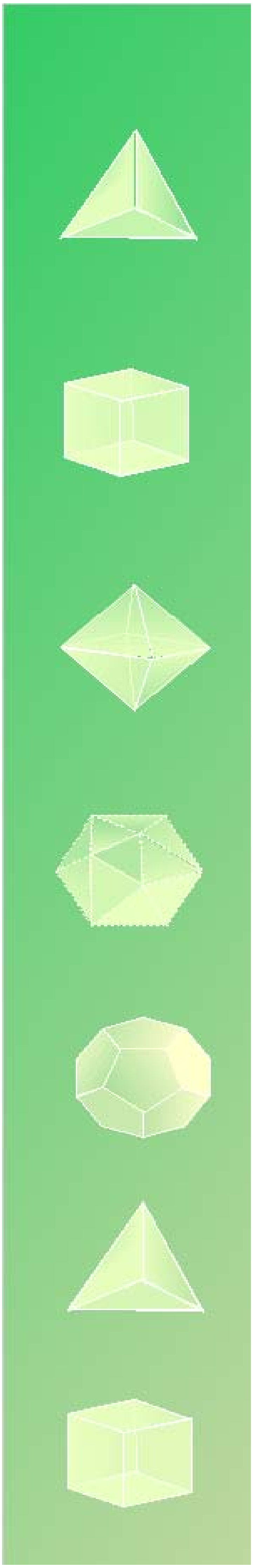


MATEMÁTICAS I: 1º de Bachillerato

Capítulo 5: Geometría

LibrosMareaVerde.tk

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Andrés García Mirantes

Revisor: José Luis Lorente Aragón

Ilustraciones: Elaboración propia, Wikipedia, Banco de Imágenes de INTEF y http://rabfis15.uco.es/lvct/tutorial/39/Parabolicos.htm

1. VECTORES

2. RECTAS Y PROBLEMAS MÉTRICOS

3. CÓNICAS

El objetivo de este capítulo es exponer con detalle la Geometría Analítica en dos dimensiones. La Geometría Analítica permite describir diferentes elementos geométricos como puntos, rectas, circunferencias, elipses entre otros.

En este curso nos centraremos en geometría en dos dimensiones, es decir que se puede dibujar en un plano; el próximo curso se verá la Geometría Analítica en el espacio o en 3 dimensiones

La Geometría Analítica se la debemos especialmente a dos matemáticos franceses del siglo XVII, *Pierre de Fermat* y *Renè Descartes*. Es posible que te suene el nombre de años anteriores. Un ejemplo de su influencia es el conocido plano cartesiano, invención de *Descartes* (se llama cartesiano por *Cartesio*, que era el nombre en latín de *Descartes*) concepto básico para describir la Geometría Analítica. La leyenda cuenta que *Descartes* inventó esta geometría mientras estaba tumbado en la cama observando el vuelo de una mosca, actividad ociosa donde las haya. Se le ocurrió que, si ponía en el techo dos ejes y llamaba x e y a la posición de la mosca con respecto a dichos ejes en cada momento, podría describir su vuelo con una expresión que relacionara las dos variables, sin necesidad de dibujar. Este es un ejemplo más de que la creatividad surge en los momentos más inesperados. Fíjate en la idea que se le ocurrió a *Newton* cuando una manzana le cayó en la cabeza (si no conoces la historia, búscala, también es curiosa).

El (aparentemente) simple hecho de determinar una posición mediante coordenadas revolucionó totalmente la Geometría, permitiendo representar toda clase de figuras nuevas y estudiar las ya conocidas de un modo muchísimo más eficaz. Fue asimismo vital para la Física, porque gracias a ello se pudo estudiar el movimiento con un detalle que antes era impensable.

Tanto es así, que normalmente cuando una persona aprende la Geometría Analítica, ya no vuelve casi a usar geometría sin coordenadas. Depende, claro, un poco de gustos personales.

Sea este o no tu caso, esperamos que el capítulo te resulte interesante y que puedas apreciar la potencia y la belleza de estos nuevos métodos.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1. VECTORES

1.1. El plano cartesiano

En cursos anteriores, para estudiar las figuras geométricas las hemos dibujado. El enfoque en este curso va a ser ligeramente distinto. En vez de hablar sencillamente de las figuras lo que vamos a hacer es relacionar los puntos que las forman con sus coordenadas.

De esta forma dando valores a la coordenada x (o la y) podremos obtener la otra coordenada y así dibujar las figuras en el plano cartesiano. Recordemos muy brevemente qué es el plano cartesiano.

Un sistema de referencia cartesiano consiste en dos rectas numéricas perpendiculares, llamadas **ejes coordenados**. El punto en el que se cortan los ejes, O, es el **origen de coordenadas**.

Normalmente lo representamos con un eje vertical y el otro horizontal. Al eje horizontal lo denominamos **eje de abscisas** o también eje OX y al vertical, **eje de ordenadas** o eje OY.

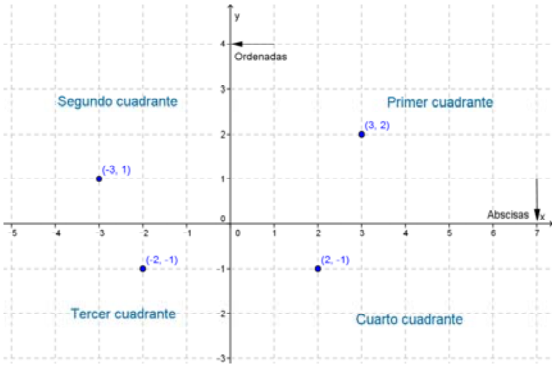
Al cortarse los dos ejes, el plano queda dividido en cuatro zonas, que se conocen como cuadrantes:

- Primer cuadrante: Zona superior derecha ($x > 0$ e $y > 0$)

- Segundo cuadrante: Zona superior izquierda ($x < 0$ e $y > 0$)

- Tercer cuadrante: Zona inferior izquierda ($x < 0$ e $y < 0$)

- Cuarto cuadrante: Zona inferior derecha ($x > 0$ e $y < 0$)



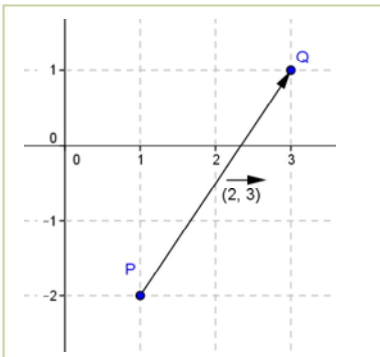
Para representar puntos, sólo hay que recordar que la primera componente (o **abscisa**) corresponde al eje OX y la segunda componente (u **ordenada**) al eje OY.

Cada uno de los dos ejes representan el conjunto de todos los números reales (recta Real), el sentido positivo es hacia la derecha en el eje de abscisas y arriba en el de ordenadas. Los números negativos se representan hacia abajo y hacia la izquierda.

1.2. Los vectores en el plano

Un punto no es más que una posición en el plano. Se representan con letras mayúsculas como A, B, C... y constan de dos componentes, la abscisa y la ordenada. Así, escribimos $P(1,-2)$ representando el punto que está una unidad a la derecha del origen y dos hacia abajo.

En contraposición, un vector representa un movimiento. Imagínate que estás en el punto anterior $P=(1,-2)$ y te quieres mover al punto $Q=(3,1)$. En ese caso, tienes que desplazarte dos unidades a la derecha y tres hacia arriba. Esto es muy largo de decir, por eso se dice simplemente que te desplazas con el vector $\vec{v}=(2,3)$. ¡Observa la flecha encima del nombre del vector! Se pone para distinguir los puntos de los vectores $\vec{v}$. En algunos libros en ocasiones también puedes encontrar que se escriben en negrita: ***v***.



Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Un **vector** viene dado por una pareja de números (a,b) y representa un desplazamiento de a unidades en la dirección del eje OX y b unidades en la del eje OY.

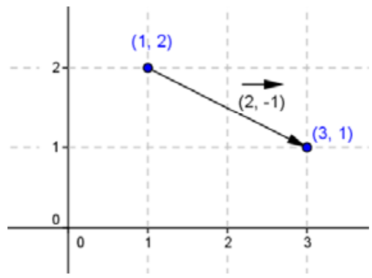
Los vectores se suelen denotar con letras minúsculas y flechas encima ($\vec{v}$, $\vec{u}$, $\vec{w}$)

El vector $(0,0)$ se llama vector nulo y se representa $\vec{0}$

Actividad resuelta

- *Imagínate que estás en el punto* (1, 2) *y te mueves al punto* (3, 1), *¿qué vector representa ese movimiento? Si las unidades están en metros, ¿cuántos metros te has movido?*

La mejor manera de resolverlo es gráficamente. Dibujamos los puntos y los unimos con el vector que corresponde.



Vemos entonces que nos movemos dos unidades a la derecha y una hacia abajo. Es decir, que nos movemos con el vector $\vec{v} = (2,-1)$

Para determinar la distancia que nos hemos movido, hay que calcular la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 2 y 1. Pero eso es sencillo, es simplemente $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \cong 2'23$ metros.

Esto nos lleva al concepto de módulo, que no es más que el tamaño del vector o, en otras palabras, la distancia que se recorre al aplicar el vector. Más formalmente:

El **modulo de un vector** $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Se representa con una o dos barras, es decir como $\|\vec{v}\|$ (esta notación es más frecuente en Matemáticas) o $|\vec{v}|$ (más habitual en Física). Un vector se dice **unitario** si tiene módulo 1.

Observa que en la actividad anterior podríamos haber calculado la distancia que nos pedían sin necesidad de dibujar, sólo calculando el módulo $\|\overrightarrow{(2,-1)}\| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5} \cong 2'23$. Observa también que los signos de las componentes no tienen importancia. Eso es lógico, la distancia es la misma si vamos hacia arriba que hacia abajo.

Magnitudes escalares y vectoriales

Es el momento de dar un pequeño paso atrás desde las Matemáticas y ver el cuadro desde la perspectiva de otras ciencias, fundamentalmente de la Física.

La idea de vector aparece de manera natural al estudiar algunas magnitudes. Piensa por ejemplo en la fuerza. Decir “Aplíquese una fuerza de 3 Newton” tiene tanto sentido como decir “Muévase tres metros”. La respuesta es “Sí, pero ¿hacia dónde?”. Si me preguntan dónde está mi casa y digo “a 400 m en línea recta” no ayudo mucho, tendré que decir en qué dirección.

Por el contrario, si me preguntan qué temperatura hace hoy, puedo decir “15^{o} C” y la respuesta es perfectamente válida. De hecho, la misma cuestión “¿15^{o} C hacia dónde?” no tiene ningún sentido. Esto nos lleva al concepto de magnitudes escalares y vectoriales.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Verás en la asignatura de Física y Química o en la de Física del próximo año muchas magnitudes vectoriales. Destacaremos en este capítulo la posición, la velocidad y la aceleración (Cinética), la fuerza (Dinámica) y los campos magnéticos, eléctricos y gravitatorios entre otros. Magnitudes escalares también hay muchas, la temperatura, el trabajo, la energía y la intensidad electrónica. Tener claro cuáles son escalares y vectoriales es básico a la hora de trabajar con ellas.

Magnitudes vectoriales son aquellas que, por definición, se describen con un vector

Magnitudes escalares son aquellas que, por definición, se describen con un número

Un **escalar** es un número. Se les llama así para distinguirlos de los vectores.

Actividad resuelta

- *Indica si las siguientes magnitudes son escalares o vectoriales:*
  a) *La fuerza de la gravedad.*
  b) *La masa de un cuerpo*
  c) *La velocidad*

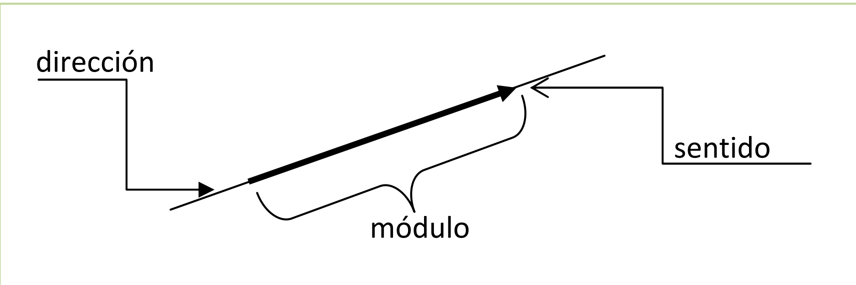
Solución:

Es escalar la b). La a) y la c) son vectoriales. De la fuerza ya hemos hablado y la velocidad sólo tiene sentido si indicamos hacia dónde vamos.

Características de un vector

Para conocer bien un vector $\vec{v} = (v_1, v_2)$ debemos averiguar tres características:

- **Módulo**: que como acabamos de ver nos proporciona el tamaño del vector.
- **Dirección:** nos indica algo sobre la recta en la que nos movemos. Es la pendiente de la recta que contiene el vector. Puede calcularse como $m = \frac{v_2}{v_1}$. **Observa que si** $v_1 = 0$ **no tiene sentido. A veces se habla en este caso de pendiente infinita**. Son los vectores que tienen la dirección del eje de ordenadas.
- **Sentido:** indicado por la punta de la flecha, nos muestra si avanzamos en un sentido de la dirección o la contraria.



En ocasiones se distingue entre **vectores libres** (que representan un desplazamiento) y **vectores ligados** (que están asociados a un punto). Esta distinción no suele hacerse en Matemáticas, pero si suele aplicarse mucho en Física. En el apéndice I la describiremos con detalle. En el resto del capítulo consideraremos vectores libres.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.3. Operaciones con puntos y vectores

Lo que vamos a ver ahora es cómo formalizar lo que hemos hecho antes, para poder hacerlo sin dibujar. Las operaciones son muy intuitivas y casi no es necesario ponerlas, pero vamos a verlas todas juntas para poder tenerlas como referencia.

Las operaciones entre puntos y vectores son muy frecuentes y útiles. Fíjate, en el siguiente cuadro, cuándo el resultado es un punto y cuándo es un vector.

Dados dos puntos $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ se define el vector $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{(q_1 - p_1,\ q_2 - p_1)}$.

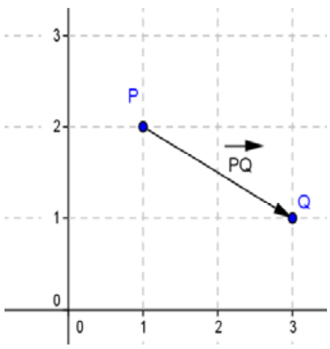
Dado un punto $P = (p_1, p_2)$ y un vector $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$, su suma es el **punto** $(p_1 + v_1,\ p_2 + v_2)$.

Dados dos vectores $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$ y $\vec{w} = \overrightarrow{(w_1, w_2)}$, su suma es el **vector** $\vec{v} + \vec{w} = \overrightarrow{(v_1 + w_1,\ v_2 + w_2)}$.

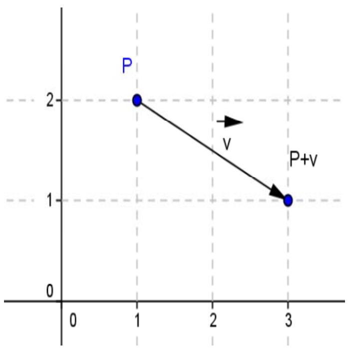
Dado un vector $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$ y un escalar k, su producto es el **vector** $k\vec{v} = \overrightarrow{(kv_1, kv_2)}$

Ejemplos:

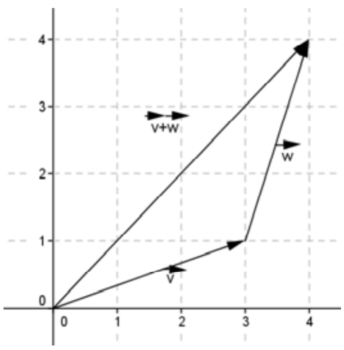
- *A continuación mostramos gráficamente las situaciones anteriores.*



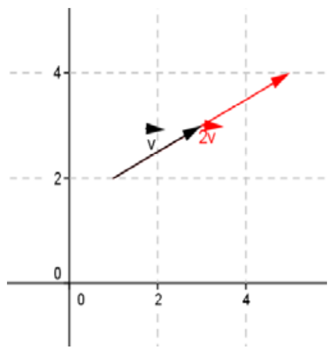
Vector entre dos puntos



Suma de un punto y un vector



Suma de dos vectores



Un vector por un escalar

Actividades propuestas

1. Dados los puntos $P = (2,\ 2)$, $Q = (1,\ 0)$ y $R = (-2,\ 3)$ y los vectores $\vec{v} = \overrightarrow{(1,\ -1)}$, $\vec{w} = \overrightarrow{(0\ ,\ -2)}$ calcula, indicando si el resultado es punto o vector:

a) $\overrightarrow{QP}$ b) $3\vec{v} - 2\vec{w}$ c) $\vec{v} - \overrightarrow{RP}$ d) $P + \vec{v}$ e) $R + \overrightarrow{PQ} + \vec{w}$

2. Dados tres puntos genéricos, $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ y $R = (r_1, r_2)$, demuestra:

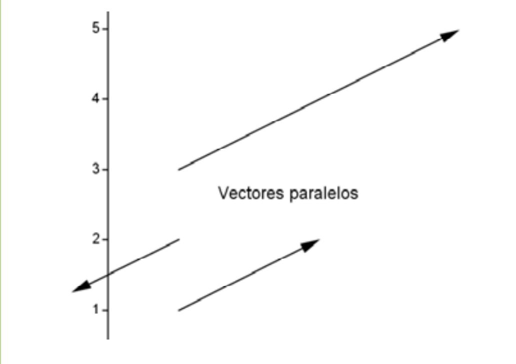
a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ b) $\overrightarrow{PQ} = (-1)\overrightarrow{QP}$ c) $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$ d) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PQ}$

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Vectores paralelos

Dos vectores son **paralelos** si tienen la misma dirección.

Si la primera componente es no nula, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es paralelo a $\vec{w} = (w_1, w_2)$ si (y sólo si) $m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1}$.



Así, los vectores $(1, 2)$, $(3, 6)$ y $(-2, -4)$ son paralelos, pues todos tienen la misma pendiente (m = 2).

Existe otra manera equivalente de definir vectores paralelos que evita el problema de que sea $v_1 = 0$. Volvamos a la ecuación de la pendiente $m = \frac{v_2}{v_1} = \frac{w_2}{w_1}$. Dividiendo en cruz tenemos $\frac{v_2}{w_2} = \frac{v_1}{w_1}$. Si llamamos k a este valor común, es decir, $k = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_1}{w_1}$ tenemos $v_2 = kw_2$ y $v_1 = kw_1$ o, lo que es lo mismo, $\vec{v} = k\vec{w}$

Resumiendo:

Dos vectores $\vec{v}$ **y** $\vec{w}$ son **paralelos** si uno es múltiplo del otro: $\vec{v} = k\vec{w}$.

1.4. El producto escalar. Cálculo de distancias y ángulos

Lo más interesante de este apartado es que vamos a ser capaces de calcular distancias y ángulos directamente. Para ello, vamos a necesitar una herramienta totalmente nueva, el producto escalar. Puede parecer al principio que no tiene nada que ver con lo que estamos viendo, te pedimos un poco de paciencia.

Se define el **producto escalar** de dos vectores $\vec{v} = (v_1, v_2)$ y $\vec{w} = (w_1, w_2)$ como el número o valor **escalar**

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

No es difícil de recordar que el resultado del producto escalar es un escalar ☺. Vamos a ver unos pocos ejemplos. Observa que el producto escalar puede ser nulo o negativo.

Ejemplos:

- $\overrightarrow{(1, 2)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 2 + 6 = 8$
- $\overrightarrow{(1, 2)} \cdot \overrightarrow{(0, -1)} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = 0 - 2 = -2$
- $\overrightarrow{(1, 3)} \cdot \overrightarrow{(3, -1)} = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = 3 - 3 = 0$

Actividad propuesta

3. Calcula el producto escalar de los siguientes vectores.

a) $\overrightarrow{(1, 2)} \cdot \overrightarrow{(2, 3)}$ b) $\overrightarrow{(1, 2)} \cdot \overrightarrow{(0, 0)}$ c) $\overrightarrow{(1, 2)} \cdot \overrightarrow{(-2, 1)}$ d) $\overrightarrow{(3, 2)} \cdot \overrightarrow{(1, 3)}$

e) $\overrightarrow{(-1, -2)} \cdot \overrightarrow{(2, 0)}$ f) $\overrightarrow{(5, -1)} \cdot \overrightarrow{(3, -4)}$ g) $\overrightarrow{(0, 1)} \cdot \overrightarrow{(-2, 0)}$ h) $\overrightarrow{(3, 4)} \cdot \overrightarrow{(-4, 3)}$

Propiedades del producto escalar

1. Conmutativa: $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$
2. Distributiva respecto a la suma:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

$$(\vec{u}+\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$$

3. Asociativa respecto a escalares: $\vec{v}\cdot(k\vec{w})=(k\vec{v})\cdot\vec{w}=k(\vec{v}\cdot\vec{w})$ si k es escalar.
4. El producto escalar es el producto de los módulos por el coseno del ángulo que forman. Expresado en símbolos, si α es el ángulo que forman $\vec{v}\cdot\vec{w}=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cos\alpha$

La cuarta propiedad es sin duda la más importante pero también es la más difícil de demostrar, así que este año no veremos su demostración. Las otras tres demostraciones forman el siguiente ejercicio.

Actividad propuesta

4. Considera tres vectores genéricos $\vec{u}=(u_1,u_2)$, $\vec{v}=(v_1,v_2)$ y $\vec{w}=(w_1,w_2)$ así como un escalar genérico k. Demuestra las propiedades 1 a 3 del producto escalar.

Cálculo de distancias

El cálculo de distancias ya lo habíamos esbozado antes. La distancia entre dos puntos no es más que el módulo del vector que los une. Es decir $d(P,Q)=\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$ donde d representa la distancia.

Cálculo de ángulos

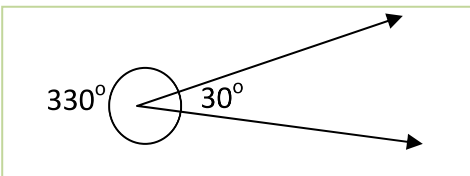
Para calcular el ángulo entre dos vectores, debemos utilizar la fórmula del producto escalar y despejar el coseno. Es decir, el coseno del ángulo entre dos vectores se obtiene como:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}$$

En el caso de tres puntos A, B y C si queremos calcular el ángulo ABC debemos calcular el ángulo entre los vectores que los unen $\cos(A\hat{B}C)=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\cdot\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$

Ten en cuenta de todos modos lo siguiente:

1. El coseno de ángulos que suman 360º es idéntico. La única manera de distinguir 30º de 330º (por ejemplo) es dibujar los vectores.



2. Cuando tenemos que calcular un ángulo, si tomamos un vector con el sentido opuesto, calculamos el ángulo suplementario. (el que suma 180º).

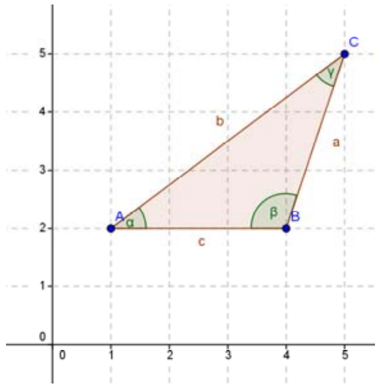
Vamos a ver un problema completo con todos los detalles.

Actividad resuelta

- *Calcula todos los lados y ángulos del triángulo* $A = (1, 2)$, $B = (4, 2)$, $C = (5, 5)$

Solución:

Todos estos cálculos pueden hacerse sin dibujar para nada el triángulo. Pero, naturalmente, es más claro con un dibujo. Observa que hemos seguido la notación habitual en estos casos. Los vértices se representan con letras mayúsculas, los lados opuestos con letras minúsculas y los ángulos con letras griegas.



Las longitudes de los lados ya sabemos calcularlas. Son simplemente las distancias entre puntos o, lo que es lo mismo, los módulos de los vectores que los unen. Como los vamos a utilizar varias veces, calculamos primero los vectores de los lados.

$\overrightarrow{AB} = (4, 2) - (1, 2) = \overline{(3, 0)}$, $\overrightarrow{AC} = (5, 5) - (1, 2) = \overline{(4, 3)}$ y $\overrightarrow{BC} = (5, 5) - (4, 2) = \overline{(1, 3)}$.

Así pues $c = d(A, B) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$, lo que podía verse directamente en el dibujo.

$b = d(A, C) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. $a = d(B, C) = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \approx 3'16$.

Observa que para calcular los lados da lo mismo el orden de los puntos (es igual tomar $\overrightarrow{AB}$ que $\overrightarrow{BA}$).

Los ángulos se calculan despejando el coseno. Pero ahora hay que tener cuidado con el orden.

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{3 \cdot 4 + 0 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{12 + 0}{15} = \frac{12}{15} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{12}{15}\right) \approx 36'87^{\circ}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BC}\right\|} = \frac{(-3) \cdot 1 + 0 \cdot 3}{3 \cdot \sqrt{10}} = \frac{-3 + 0}{3\sqrt{10}} = \frac{-3}{3\sqrt{10}} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{-3}{3\sqrt{10}}\right) \approx 108'44^{\circ}$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{CB}\right\|} = \frac{(-4) \cdot (-1) + (-3) \cdot (-3)}{5 \cdot \sqrt{10}} = \frac{4 + 9}{5\sqrt{10}} = \frac{13}{5\sqrt{10}} \Rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{13}{5\sqrt{10}}\right) \approx 34'70^{\circ}$$

Actividades propuestas

5. En el problema anterior que dice "Calcula todos los lados y ángulos del triángulo A(1, 2), B(4, 2) y C(5, 5), repite el cálculo de ángulos cambiando el orden en que se toman los puntos $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CB}$. ¿Cómo cambian los ángulos? ¿Por qué?

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

6. Calcula todos los lados y los ángulos de los siguientes triángulos de dos maneras. Primero con el método anterior y luego por el que se indica:

a) $A = (1, 1)$, $B = (1, 4)$, $C = (2, 2)$. Calcula los tres lados y luego usa trigonometría.

b) $A = (1, -1)$, $B = (2, 4)$, $C = (2, 2)$. Calcula los lados a y c y el ángulo β y luego usa trigonometría.

c) $A = (1, 1)$, $B = (2, 3)$, $C = (3, -2)$. Calcula el lado a y los ángulos β y γ y luego usa trigonometría.

d) $A = (0, 1)$, $B = (1, 4)$, $C = (2, 3)$. Calcula tres datos cualesquiera (los que sean, tres lados, dos ángulos y un lado…) y luego usa trigonometría.

7. Calcula el área del triángulo de vértices A = (1, 1), B = (2, 2) y C = (4, 5). [*Pista*: Puedes calcular todos los lados y ángulos. La altura se calcula con trigonometría].

8. Calcula el área del rectángulo $ABCD$ con A = (1, 2), B = (2, 4), C = (5, 3) y D = (4, 1).

9. Calcula el área del rombo $ABCD$ con A = (1, 1), B = (4, 0), C = (3, 3) y D = (0, 4).

10. Calcula un vector que forme 60 grados con el vector $\overrightarrow{(1, 0)}$. Para ello, procede como sigue. Supón que el vector sea de la forma $\overrightarrow{(x, 1)}$ y plantea la ecuación $\cos 60^{o} = \frac{(x,1)(1,0)}{\|(x,1)\|\|(1,0)\|}$. Despejando x obtendrás el vector. ¿Serías capaz de calcular un vector UNITARIO (de módulo 1) que forme un ángulo de 60º con el vector $\overrightarrow{(1, 0)}$?

11. Considera un hexágono regular $ABCDEF$ de centro el origen. Si el punto B es el (1, 0), ¿cuáles son las coordenadas de los puntos A y C? Calcula el ángulo del hexágono.

Vectores paralelos (de nuevo)

Otro caso importante es el de los vectores paralelos. Para este no necesitamos el producto escalar (de hecho ya lo habíamos visto) pero creemos que es interesante que veas que cuando calculamos el ángulo nos sale que el ángulo es de 0^{o} o 180^{o}.

Recordemos que dos vectores eran paralelos si uno era múltiplo del otro: $\vec{v} = k\vec{w}$. Así pues, tomamos dos vectores, $\vec{v}$ y $k\vec{v}$ y calculamos su producto escalar: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot k\vec{v}}{\|\vec{v}\| \cdot \|k\vec{v}\|} = \frac{k\vec{v} \cdot \vec{v}}{|k| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{k\|\vec{v}\|^2}{|k| \cdot \|\vec{v}\|^2} = \frac{k}{|k|}$

Por tanto, si $k > 0$, $\cos(\alpha) = \frac{k}{k} = 1$ por lo que $\alpha = 0^{o}$. A su vez, si $k < 0$, $\cos(\alpha) = \frac{k}{-k} = -1$ por lo que $\alpha = 180^{o}$.

Es decir, el ángulo que forman dos vectores paralelos es de 0^{o} o 180^{o}, como era de esperar.

Actividades propuestas

12. A = (1, 1), B = (2, 3) y C = (2, 8) son vértices (consecutivos) de un paralelogramo $ABCD$. Calcula el vértice D y el ángulo ABC.

13. Mismo problema que el anterior con A = (2, 4), B = (3, 5) y C = (4, –1). ¿Se puede resolver el problema sean cuales sean A, B y C?

14. Sean A = (2, 2) y B = (4, 6) dos vértices de un cuadrado. Calcula los otros dos vértices y el área del cuadrado. (*Ayuda*: Hay dos soluciones, las dos con la misma área).

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

1.5. Bases ortogonales y ortonormales

Vectores perpendiculares

Ya hemos visto cómo se calcula el ángulo entre dos vectores. Hay un caso especial que es interesante por méritos propios y es la perpendicularidad o, lo que es lo mismo, que los vectores formen 90º o 270º.

Puesto que $\cos(90) = \cos(270) = 0$, aplicando la fórmula: $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{w} = 0$. Así pues:

Dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son perpendiculares si, y solamente si, su producto escalar es 0: $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$.

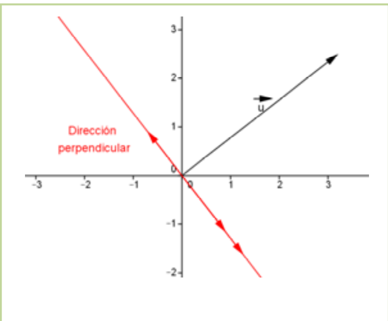
De este modo, es muy fácil calcular un vector perpendicular. Si un vector es de la forma $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$, basta cambiar las componentes de orden y una de signo para que al hacer el producto escalar salga 0. Puede invertirse el signo de cualquiera, pero sólo de una.

Ejemplos:

- Un vector perpendicular a $(1,2)$ es $(-2,1)$
- Un vector perpendicular a $(-1,0)$ es $(0,-1)$

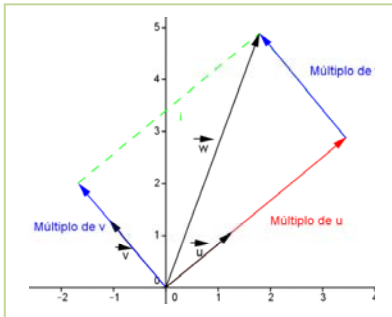
Un vector perpendicular a $\vec{v} = (v_1, v_2)$ es $\vec{w} = (-v_2, v_1)$.

Bases ortogonales



Una cuestión que aparece de modo natural es, dado un vector, cuántos vectores pueden ser perpendiculares a él. La respuesta es que, en el plano, sólo hay uno y sus vectores paralelos. Esto es muy fácil verlo gráficamente.

Si construimos un vector $\vec{u}$, su dirección perpendicular es una recta. Cualquier vector que esté sobre esa recta es perpendicular a $\vec{u}$. Y sólo estos vectores son perpendiculares.



Además, si $\vec{u} = \overrightarrow{(u_1, u_2)}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$ son perpendiculares, cualquier vector se puede calcular sumando múltiplos de los dos. Se dice entonces que es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Es fácil ver gráficamente que, dados dos vectores perpendiculares, cualquier vector es combinación lineal de ellos. En el dibujo podemos ver un vector $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Puesto que todos los vectores pueden calcularse a partir de dos vectores perpendiculares, se le ha dado nombre propio a este concepto.

En el plano, dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una **base ortogonal** si son no nulos y perpendiculares entre sí.

En general, dados dos vectores que NO sean nulos ni paralelos siempre se puede poner cualquier otro vector como combinación lineal de ellos. Si no son ortogonales se habla de base oblicua, pero es un concepto que no necesitamos este curso.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Actividades propuestas

15. ¿Son los siguientes pares de vectores una base ortogonal? Justifica la respuesta.

a. $\overrightarrow{(1,2)}$ y $\overrightarrow{(1,-2)}$, b. $\overrightarrow{(1,-2)}$ y $\overrightarrow{(2,1)}$ c. $\overrightarrow{(0,1)}$ y $\overrightarrow{(100,0)}$ d. $\overrightarrow{(1,0)}$ y $\overrightarrow{(0,0)}$

16. Calcula un vector que forme con $\overrightarrow{(1,4)}$ una base ortogonal.

17. Calcula un vector perpendicular a $\overrightarrow{(1,2)}$ que tenga módulo 3 [*Pista*: calcula un vector perpendicular cualquiera. Al dividir por su módulo tendrá módulo 1. Basta multiplicar por la constante 3].

Bases ortonormales

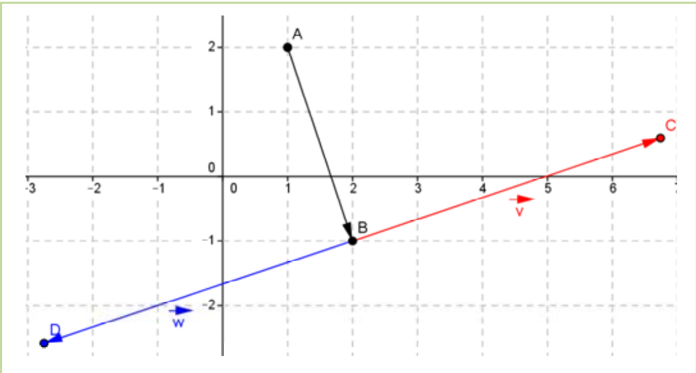
En muchos problemas (en casi todos), resulta más sencillo si los vectores de referencia además de perpendiculares son unitarios. Si tenemos que movernos en una dirección concreta un número de unidades, la manera más fácil para describirla es a partir de vectores de módulo uno.

Vamos en primer lugar a ver un ejemplo.

Actividad resuelta

- *Un barco está en el punto* A = (1, 2) *y se mueve hacia el punto* B = (2, –1). *Las unidades son millas náuticas. Cuando llega al punto* B *le avisan de que gire 90 grados en sentido de las agujas del reloj y se mueva 5 millas. ¿En qué punto está el barco después de moverse?*

Solución:



El vector que une los puntos es $\overrightarrow{(1,-3)}$. Un vector perpendicular es el $\overrightarrow{(3,1)}$. Pero su módulo es fácil ver que es $\sqrt{10}$ y nos piden que mida 5. Así pues dividimos por el módulo y obtenemos el vector unitario de esa dirección: $\frac{1}{\sqrt{10}}\overrightarrow{(3,1)}$. Ahora basta multiplicarlo por 5 y obtenemos un vector de módulo 5 que forme un ángulo de 90 grados.

Dicho vector es $\vec{v}=\frac{5}{\sqrt{10}}\overrightarrow{(3,1)}$. No es la única solución, sino que hay dos. La otra es el mismo vector cambiado de signo $\vec{w}=\frac{-5}{\sqrt{10}}\overrightarrow{(3,1)}$. ¿Cuál de las dos vale? Observa el dibujo. Sumando $\vec{v}$ llegamos al punto C y sumando $\vec{w}$ al punto D.

El dibujo nos muestra que, si el giro es en el sentido del reloj, vamos hacia D. El punto al que llegamos es el punto D que tendrá de coordenadas $(2,-1)+\frac{-5}{\sqrt{10}}\overrightarrow{(3,1)}\approx(-2'74,-2'58)$

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Así pues, en muchas aplicaciones se consideran bases ortogonales con vectores unitarios. Estas bases tienen nombre propio.

Dos vectores del plano $\vec{u}$ y $\vec{v}$ forman una **base ortonormal** si son unitarios y perpendiculares entre sí.

El próximo curso, que se estudiará la geometría en 3 dimensiones, una base ortonormal la formarán tres vectores de módulo 1, y ortogonales entre sí.

Actividades propuestas

18. ¿Forman los siguientes pares de vectores una base ortonormal? Justifica la respuesta.

a. $\overrightarrow{(1, 0)}$ y $\overrightarrow{(0, 1)}$, b. $\overrightarrow{(1, -2)}$ y $\overrightarrow{(2, 1)}$ c. $\overrightarrow{(0, 1)}$ y $\overrightarrow{(100, 0)}$ d. $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{(-1, 1)}$

19. Si A = (1, 1) y B = (2, 3) son dos vértices de un cuadrado, calcula los otros dos vértices y el área del cuadrado (*Cuidado*: hay dos soluciones, las dos con la misma área).

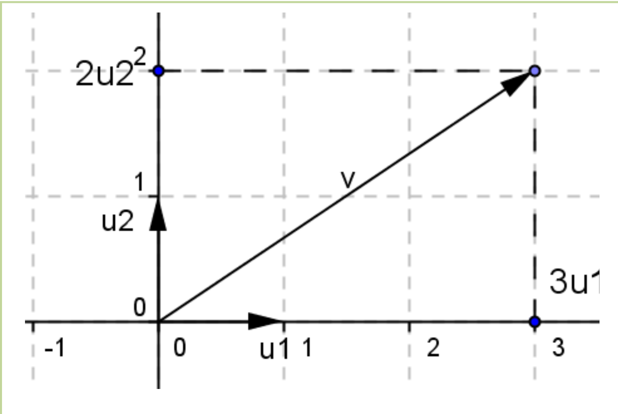
20. Dado el vector $\vec{v} = \overrightarrow{(1, -2)}$ calcula una base ortonormal que contenga a un múltiplo suyo. ¿Hay más de una solución al problema anterior? En caso afirmativo, calcúlalas todas.

Base canónica

Es usual tomar como base ortonormal la formada por el vector $\vec{u}_1$ de coordenadas (1, 0) y el vector $\vec{u}_2$ de coordenadas (0, 1). Es la base canónica. El vector $\vec{v} = \overrightarrow{(3, 2)}$ puede escribirse como:

$$\vec{v} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 .$$

Se dice que las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ son (3, 2).



Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2. RECTAS Y PROBLEMAS MÉTRICOS

2.1. Lugares geométricos

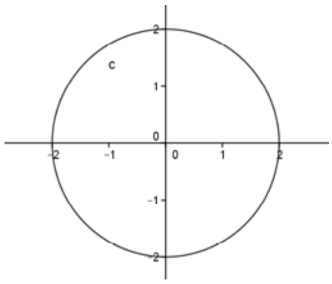
Es el momento de utilizar lo que sabemos de los vectores para estudiar algunas figuras en el plano. Para ello necesitamos un concepto adicional el de lugar geométrico.

Un **lugar geométrico** son los puntos del plano que verifican una o varias condiciones geométricas.

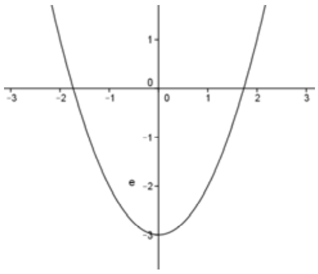
Estos lugares geométricos cumplen determinadas ecuaciones que en breve describiremos

Ejemplos:

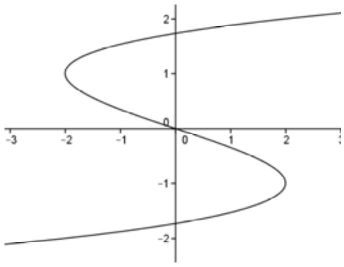
- *Estos son cuatro lugares geométricos definidos cada uno como los puntos que verifican una ecuación. Están representados con el programa Geogebra. En él puedes escribir la ecuación que desees y automáticamente se dibuja el lugar geométrico.*



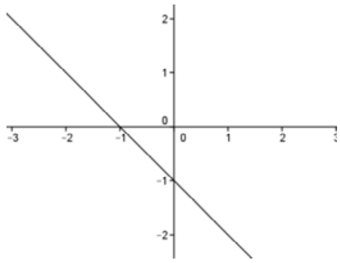
$x^2 + y^2 = 4$



$y = x^2 - 3$



$y^3 - x = 3y$



$x + y = -1$

Este curso estudiaremos algunos de los lugares geométricos más importantes, los que vienen dados por ecuaciones de primer y segundo grado (en x e y). En este apartado veremos los lugares que aparecen con ecuaciones de primer grado (las rectas) y en la siguiente los que corresponden a ecuaciones de segundo grado (las cónicas).

Muchas veces no nos dan la ecuación, sino simplemente nos dicen "los puntos del plano que cumplen tal propiedad" y tendremos nosotros que encontrar la ecuación.

2.2. Rectas. Definición y ecuaciones

Ya conoces de cursos anteriores la ecuación de una recta. Lo que vamos a ver ahora es la recta desde el punto de vista de los vectores y la geometría.

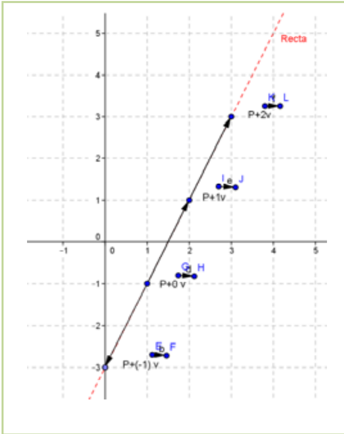
Existen varias maneras equivalentes de definir una recta. La más intuitiva, desde nuestro punto de vista, es la siguiente:

Una **recta** es el lugar geométrico de los puntos del plano que se pueden alcanzar sumando a un punto, múltiplos de un vector. Este vector se llama **vector director**.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- *Gráficamente se ve bastante más claro. Pensemos en el punto* $P = (1, -1)$ *y el vector* $\vec{v} = \overrightarrow{(2, 1)}$. *Al irle sumando múltiplos del vector, vamos obteniendo los infinitos puntos de la recta.*



Por ejemplo, son puntos de la recta:

$(1, -1) = (1, -1) + 0\overrightarrow{(2, 1)}$, $\quad (2, 0) = (3, -1) + 1\overrightarrow{(2, 1)}$,

$(-1, -2) = (1, -1) + (-1)\overrightarrow{(2, 1)}$ y así sucesivamente.

Puede ponerse entonces como $\left\{(x, y) = (1, -1) + k\overrightarrow{(2, 1)}\right\}$ donde k es una variable que va tomando todos los valores reales. Esta ecuación se conoce como ecuación vectorial de la recta. Si se pone en vertical, $\begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 + 1k \end{cases}$ se conoce como ecuaciones paramétricas.

Dado un punto $P = (p_1, p_2)$ y un vector director $\vec{v} = (v_1, v_2)$ se llama **ecuación vectorial** a la expresión $\left\{(x, y) = (p_1, p_2) + k\overrightarrow{(v_1, v_2)}\right\}$.

Se llama **ecuación paramétrica** a las expresiones $\begin{cases} x = p_1 + v_1 k \\ y = p_2 + v_2 k \end{cases}$

Observa que siempre decimos "un vector director". Y es que hay más de uno, ya sabes, cualquier múltiplo de un vector director (en otras palabras cualquier vector paralelo) es también vector director. Por ejemplo, si $\overrightarrow{(2, 1)}$ es vector director, también lo son $\overrightarrow{(-2, -1)}$, $\overrightarrow{(4, 2)}$, $\overrightarrow{(10, 5)}$...

Las ecuaciones vectorial y paramétrica (que son prácticamente iguales, como puedes comprobar) son muy útiles si lo que queremos es calcular puntos de la recta.

Actividad resuelta

- *Una recta pasa por los puntos* $A = (1, 2)$, $B = (4, -1)$. *Calcula la ecuación vectorial y la ecuación paramétrica de dicha recta, y encuentra otros dos puntos.*

Lo primero, para calcular la ecuación vectorial de la recta necesitamos un vector de la misma. Puesto que $B = A + \overrightarrow{AB}$, es evidente que $\overrightarrow{AB}$ es vector director. Así pues $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(3, -3)}$ es vector director y, por tanto, su ecuación vectorial es $\left\{(x, y) = (1, 2) + k\overrightarrow{(3, -3)}\right\}$.

Su ecuación paramétrica es: $\begin{cases} x = 1 + 3k \\ y = 2 - 3k \end{cases}$.

Para obtener otros dos puntos, damos valores a k. Cualquier valor nos vale.

Por ejemplo si $k = -1$ tenemos el punto $(1, 2) - \overrightarrow{(3, -3)} = (-2, 5)$ en tanto que si $k = \frac{1}{3}$ obtenemos $(1, 2) + \frac{1}{3}\overrightarrow{(3, -3)} = (2, 1)$. Observa que para $k = 1$ se obtiene el punto B.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ecuación continua

Con la ecuación paramétrica o vectorial es muy sencillo obtener puntos, pero no es demasiado sencillo comprobar si un punto pertenece o no a una recta. Por ejemplo, ¿está el punto $(0, 3)$ en la recta $(x, y) = (1, 2) + k\overrightarrow{(3, -3)}$? Para saberlo tendremos que poner (0,3) en lugar de (x, y) y ver si con el mismo valor de k obtenemos las dos coordenadas. No parece muy sencillo ¿verdad?

Buscamos una ecuación que relacione la x con la y. Para obtenerla despejamos k de las dos ecuaciones y las igualamos.

$$\begin{cases} x = p_1 + kv_1 \\ y = p_2 + kv_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - p_1 = kv_1 \\ y - p_2 = kv_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x - p_1}{v_1} = k \\ \dfrac{y - p_2}{v_2} = k \end{cases}$$

Puesto que los segundos miembros son iguales, los primeros miembros también son iguales. De modo que tenemos $\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}$. Esta forma es tan importante que tiene un nombre propio.

Dado un punto $P = (p_1, p_2)$ y un vector director $\vec{v} = \overrightarrow{(v_1, v_2)}$ se llama **ecuación continua** a la expresión:

$$\frac{x - p_1}{v_1} = \frac{y - p_2}{v_2}.$$

Así pues, en el ejemplo anterior, teníamos la ecuación vectorial $(x, y) = (1, 2) + k\overrightarrow{(3, -3)}$ que nos da directamente la ecuación continua $\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{-3}$.

Para ver si un punto pertenece a la recta, sustituimos en la ecuación el valor de x y de y. Si se cumple la igualdad, sí pertenece. Si no, no.

Ejemplo:

- Volvamos a la recta de antes, $\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{-3}$.

Sustituimos $(0, 3)$ y tenemos $\frac{0 - 1}{3} = -\frac{1}{3} = \frac{3 - 2}{-3}$. El punto $(0, 3)$ pertenece a la recta.

En cambio si sustituimos el $(4, 2)$ tenemos $\frac{4 - 1}{3} = 1 \neq 0 = \frac{2 - 2}{-3}$. El punto $(4, 2)$ no está en la recta.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ecuación punto-pendiente

El problema de las ecuaciones anteriores es que, aunque representen lo mismo, la expresión no es única ya que una recta tiene muchos puntos y vectores de dirección distintos. Puedes comprobar que $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-3}$ y $\frac{x}{-1}=\frac{y-3}{1}$ son la misma recta pues tienen dos puntos en común. Pero, ¿a qué no lo parece a simple vista?

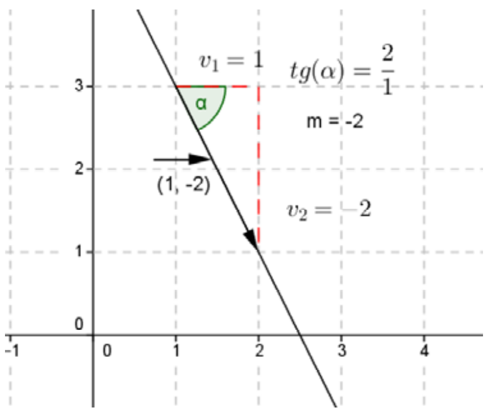
Para cada vector y cada punto tenemos una ecuación continua distinta. Vamos a empezar a eliminar la parte que dependa del vector.

Si multiplicamos en la ecuación continua por el denominador de la y obtenemos $\frac{v_2}{v_1}(x-p_1)=y-p_2$.

Lo primero, tenemos que notar que $\frac{v_2}{v_1}$ es siempre constante, independientemente del vector que elijamos ya que si dos vectores tienen la misma dirección verifican que $k=\frac{v_2}{w_2}=\frac{v_1}{w_1}$, donde k es la pendiente del vector. La pendiente de la recta se calcula como la de cualquiera de sus vectores. Vamos a resaltar las definiciones.

Se llama **pendiente de una recta** a la pendiente de un vector director suyo. El resultado es el mismo para cualquiera de los vectores directores de la recta. La pendiente puede ser positiva o negativa.

En el caso $v_1=0$ la recta es vertical y su ecuación $x=b$.



Otras maneras equivalentes de definir la pendiente:

1. La pendiente son las unidades de subida (si es positiva) o bajada (si es negativa) por cada unidad que nos movemos en horizontal. Esta es la definición que se usa en las señales de tráfico (expresada en tanto por ciento)
2. La pendiente es la tangente del ángulo que forma un vector con la horizontal. Si el ángulo es en sentido negativo (es decir, hacia abajo) es negativa.

Volvamos pues a la ecuación que teníamos, $\frac{v_2}{v_1}(x-p_1)=y-p_2$.

Si llamamos $m=\frac{v_2}{v_1}$ a la pendiente tenemos otra ecuación:

Dado un punto $P=(p_1,p_2)$ y un número m se llama **ecuación punto-pendiente** a la expresión:

$$y-p_2=m(x-p_1)$$

Observa que esta expresión NO es única, porque depende del punto. Pero ya no depende del vector. Así, $y-2=3(x-1)$ da la misma recta que $y-5=3(x-1)$ pero la pendiente será siempre la misma.

Actividad resuelta

- *Llamemos r a la recta que pasa por los puntos $A = (1, 3)$, $B = (4, 0)$. Calcula:*

  a) La pendiente de dicha recta

  b) Averigua si el punto $C = (0, 7)$ pertenece a dicha recta y encuentra otros dos puntos

Lo primero, para calcular la recta necesitamos un vector de la misma. Así pues $\overrightarrow{AB} = \overline{(3, -3)}$ es vector director y, por tanto, su ecuación vectorial es $(x, y) = (1, 3) + k\overline{(3, -3)}$. La pendiente es –3/3 = –1. La ecuación punto - pendiente es:

$$y - 3 = (-1)(x - 1) \rightarrow y = -x + 4\,.$$

Para x = 0 $\rightarrow$ y = 4, luego el punto C no pertenece a la recta. Para encontrar otros puntos damos valores a x y calculamos y:

Para x = 1 $\rightarrow$ y = 3, luego el punto A pertenece a la recta.

Para x = 2 $\rightarrow$ y = 2, luego el punto D (2, 2) pertenece a la recta.

Para x = 3 $\rightarrow$ y = 1, luego el punto E (3, 1) pertenece a la recta.

Ecuación implícita

Si en la ecuación continua hacemos operaciones $\dfrac{x - p_1}{v_1} = \dfrac{y - p_2}{v_2}$, de modo que haya sólo un coeficiente para el término independiente x e y e igualemos a 0, obtenemos la ecuación implícita, también llamada ecuación general. Con más detalle:

Multiplicando en cruz: $\dfrac{x - p_1}{v_1} = \dfrac{y - p_2}{v_2} \Rightarrow v_2(x - p_1) = v_1(x - p_2)$.

Operando: $v_2 x - v_2 p_1 = v_1 y - v_1 p_2 \Rightarrow v_2 x - v_1 y + (v_1 p_2 - v_2 p_1) = 0$. Basta cambiarles el nombre a los coeficientes: $A = v_2$, $B = -v_1$, $C = v_1 p_2 - v_2 p_1$

Dados tres números A, B, C se llama **ecuación implícita** de una recta a la expresión: $Ax + By + C = 0$.

Se trata de una ecuación lineal con dos variables (x e y). Las infinitas soluciones de esta ecuación son los puntos de la recta que estamos describiendo. Hay que tener en cuenta que puede haber todas las ecuaciones lineales que queramos que representen la misma recta, basta con multiplicar todos los términos de la misma por un mismo número para obtener una ecuación equivalente. Por ejemplo $2x + 2y - 4 = 0$ representa la misma recta que $x + y - 2 = 0$

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Vector director

Si tenemos la ecuación de una recta en la forma implícita, podemos calcular el vector director directamente. No es muy recomendable aprenderse la fórmula porque es fácil confundirse pero te la ponemos por si te resulta útil. Úsala con cuidado.

Sea $Ax + By + C = 0$: Observa que pasando la "y" al otro lado, $Ax + C = -By$ con lo que la forma continua de esa recta es $\frac{x + \frac{C}{A}}{-B} = \frac{y}{A}$ y su vector director es $\overrightarrow{(-B, A)}$.

Si la recta es $Ax + By + C = 0$ un **vector director** es el $\overrightarrow{(-B, A)}$.

El vector $\vec{n}$ = (A, B) se llama **vector normal**, que como puedes ver es perpendicular a la recta.

Actividad resuelta

- *En la actividad de la recta r que pasa por los puntos* $A = (1, 3)$, $B = (4, 0)$, la ecuación implícita es $y = -x + 4 \rightarrow x + y - 4 = 0$

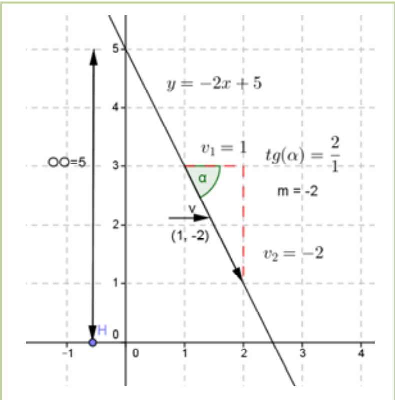
Ecuación explícita

Vamos finalmente a dar una ecuación que sí es siempre única. Si en la ecuación punto-pendiente despejamos la y tenemos la expresión que buscamos:

$y - p_2 = m(x - p_1) \Rightarrow y = mx - mp_1 + p_2$. Si llamamos $n = -mp_1 + p_2$ obtenemos la ecuación $y = mx + n$. Ya la conocían bien, es la ecuación de la recta vista como una función.

Dados dos números m y n se llama **ecuación explícita de una recta** a la expresión: $y = mx + n$. El número m es la **pendiente** y el número n es la **ordenada en el origen**.

Ya hemos visto que m es la pendiente. ¿Qué es pues n? Es claro que es el valor de y cuando sustituimos x por 0 puesto que $y = m0 + n = n$. De ahí el nombre, puesto que cuando x está en el origen (el 0) la ordenada de ese punto es n.



De lo anterior vemos que la recta pasa por el punto $(0, n)$.

Otra manera de ver la ordenada en el origen es el valor de y al cruzar la recta el eje OY.

En el dibujo podemos ver cómo la recta $y = -2x + 5$ tiene $m = -2$ como pendiente y $n = 5$ como ordenada en el origen (OO en el dibujo).

Observa que si m es la pendiente, un vector director es SIEMPRE $(1, m)$.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Resumen:

Acabamos de ver un montón de ecuaciones de la recta y hemos visto brevemente cómo se pasa de una a otra (realmente sólo en un sentido). Es el momento de recopilar lo que tenemos y ver cómo aplicarlo para resolver problemas. Aplicaremos el siguiente **PRINCIPIO FUNDAMENTAL**.

Si una recta se pone en una forma concreta, sus elementos distinguidos son los de dicha forma. Más detalladamente:

1. Si la recta tiene de ecuación $\begin{cases} x = p_1 + v_1 k \\ y = p_2 + v_2 k \end{cases}$ automáticamente (p_1, p_2) es un punto de la recta y (v_1, v_2) es un vector. Esta es la extracción de elementos de la forma **paramétrica**.
2. Si la recta tiene de ecuación $\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$ automáticamente (x_0, y_0) es un punto de la recta y (v_1, v_2) es un vector. Esta es la extracción de elementos de la forma **continua**.
3. Si la recta tiene de ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$ automáticamente m es la pendiente y (x_0, y_0) es un punto. Esta es la extracción de elementos de la forma **punto-pendiente**.
4. Si la recta tiene de ecuación $Ax + By + C = 0$ automáticamente (A, B) es un vector perpendicular a la recta. Esta es la extracción de elementos de la forma **implícita**.
5. Si la recta tiene de ecuación $y = mx + n$ automáticamente m es la pendiente y n es la ordenada en el origen, o bien $(0, n)$ es un punto y $(1, m)$ es un vector de dirección. Esta es la extracción de elementos de la forma **explícita**.

Actividad resuelta

- *Consideremos la recta* $5x + 2y - 7 = 0$. *Calcula su pendiente, un punto y un vector director.*

Hay un montón de maneras de resolver esto.

Una directamente: el vector (5, 2) es perpendicular a la recta, luego el vector (2, –5) es un vector de dirección, y la pendiente es: –5/2. Si y = 0, entonces x = 7/5, luego un punto de la recta es: $\left(-\frac{7}{5}, 0\right)$.

Vamos a hacerlo ahora pasando a dos formas que nos sean útiles, la punto - pendiente y la continua.

Despejamos y: $5x + 2y - 7 = 0 \Rightarrow 2y = -5x + 7 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}$. La pendiente, por tanto es $-\frac{5}{2}$, y un punto, la ordenada en el origen es $n = \frac{7}{2}$.

Vamos a partir de nuevo de la ecuación implícita y multiplicar en cruz para buscar la forma continua.

$5x + 2y - 7 = 0 \Rightarrow 2y = -5x + 7 \Rightarrow \frac{y}{-5} = \frac{x - \frac{7}{5}}{2} \Rightarrow \frac{x - \frac{7}{5}}{2} = \frac{y - 0}{-5}$. Un punto es, por tanto, el $\left(-\frac{7}{5}, 0\right)$ y un vector es el $\overrightarrow{(2, -5)}$. Comprobamos inmediatamente que la pendiente es $-\frac{5}{2}$ como nos había salido

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

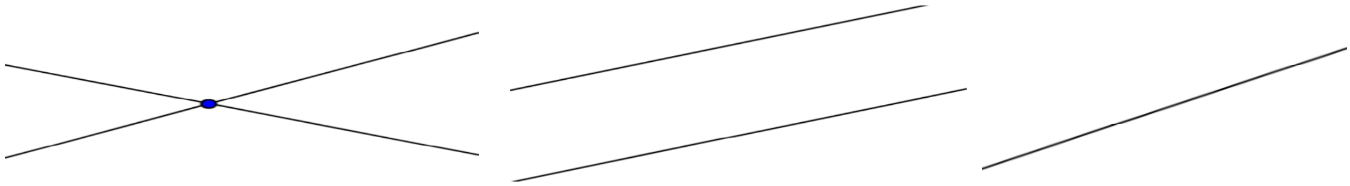
antes.

2.3. Posiciones relativas de rectas

Las posiciones relativas de dos rectas se pueden estudiar desde dos puntos de vista, el geométrico y el analítico.

Desde el punto de vista geométrico, las posiciones de dos rectas en el plano son sencillas.

1. Rectas **secantes,** cuando las rectas se cortan. Es decir, tienen un único punto en común.
2. Rectas **paralelas** si no tiene ningún punto en común y tienen misma pendiente.
3. Rectas **coincidentes** cuando son la misma recta (infinitos puntos en común).



Secantes *Paralelas* *La misma recta (paralelas coincidentes)*

¿Cómo distinguir esos casos? Vamos a dar varios métodos para hacerlo.

Método 1: Con vectores directores

Es claro que dos rectas son paralelas o iguales si (y solamente si) sus vectores son paralelos. A su vez, si son paralelas no tienen puntos en común y si son coincidentes los tienen todos. Eso sugiere el siguiente método:

1. Calcular los vectores directores de las dos rectas. Si NO son paralelos, son secantes.
2. Si los vectores son paralelos, tomar un punto cualquiera de una recta y ver si es punto de la otra. Si lo es, son coincidentes. Si no, son paralelas.

Actividad resuelta

- *Estudiar la posición relativa de las rectas* $5x + 2y - 7 = 0$ y $(x, y) = (1, 2) + k\overrightarrow{(4, -10)}$.

Solución:

Necesitamos calcular un vector de la primera. El vector (5, 2) es ortogonal a la recta, luego el vector $\overrightarrow{(-2, 5)}$ es un vector de dirección.

La segunda ya nos da directamente el vector director, es el $\overrightarrow{(4, -10)}$.

¿Son paralelos estos vectores? Para verlo, dividimos las componentes: $\frac{4}{-2} = -2 = \frac{-10}{5}$. Sí, lo son. Podría haberse visto sin más que observar que $\overrightarrow{(4, -10)} = -2\overrightarrow{(-2, 5)}$.

Por tanto, o las rectas son paralelas o son la misma. Tenemos que tomar un punto de una y ver si es punto de la otra. Puesto que la primera está en forma implícita, ver si es punto de ella es más fácil, así que vamos a tomar un punto de la segunda. El más fácil es obviamente el punto $(1, 2)$.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Sustituyendo, nos da $5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - 7 = 2 \neq 0$. Puesto que el punto no verifica la ecuación, NO es un punto de la recta y las rectas son paralelas.

Método 2: Analizando y resolviendo el sistema

Si pasamos las dos rectas a forma general o implícita tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. El sistema $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$ puede ser:

1. Compatible determinado $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ (si multiplicas en cruz puedes darte cuenta que $m_1 \neq m_2$). Hay una única solución (punto de corte), por tanto las rectas son secantes.
2. Compatible indeterminado $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ (ecuaciones proporcionales). Infinitas soluciones, por tanto las rectas son la misma recta o rectas coincidentes.
3. Incompatible $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$ (misma pendiente pero distintas ecuaciones). No hay soluciones, por tanto las rectas son paralelas.

En resumen, el método es:

1. Escribir las dos rectas en forma general
2. Clasificar el sistema
3. Identificar-la posición relativa en función de las soluciones del sistema

Resolvemos el sistema

Si sale un punto entonces las rectas son secantes.

Si obtenemos 0 = 0 lo que ocurre es que hay infinitas soluciones. Eso significa que las dos ecuaciones son la misma, o, lo que es lo mismo, las dos rectas son la misma.

Si obtenemos 1 = 0 lo que ocurre entonces es que no hay solución. En otras palabras, las rectas deben ser paralelas.

En resumen, el método es:

1. Escribir las dos rectas en forma general (cualquier forma excepto vectorial o paramétrica).
2. Intentar resolver el sistema.
3. Tenemos tres casos:
   a. Si sale un punto: **SECANTES**.
   b. Si sale 0 = 0: **LA MISMA RECTA**.
   c. Si sale 1 = 0 **PARALELAS**

Actividad resuelta

- *Estudiar la posición relativa de las rectas* $5x+2y-7=0$ y $(x,y)=(1,2)+k\,\overrightarrow{(4,-10)}$.

Solución:

Ya habrás visto que son las mismas de antes. Lo que ocurre es que vamos a aplicar el otro método. En primer lugar, hay que poner la segunda en forma de implícita. Lo más rápido, puesto que tenemos un punto y un vector, es escribir la forma continua: $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-10}$, y operando: $-10x-4y+2=0$

Multiplicamos la primera por 2 y sumamos para resolverlo por reducción (o por el método de Gauss).

$$\begin{cases}5x+2y-7=0\\-10x-4y+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2(5x+2y-7=0)\\-10x-4y+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10x+4y=14\\-10x-4y=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}10x+4y=14\\\quad 0=12\end{cases}.$$

Sumando se obtiene $0=12$. Luego NO tiene solución. Las rectas son paralelas, como ya habíamos visto. Debe salir lo mismo, esto son matemáticas ☺.

2.4. Problemas métricos. Distancia de un punto a una recta

Hasta ahora hemos ido construyendo las herramientas para resolver problemas de geometría. Vamos a dedicar este apartado a recapitular lo que ya tenemos y dar algunas indicaciones sobre cómo resolver problemas. Resolveremos aquí algunos problemas típicos, pero la geometría es muy extensa y te animamos a que practiques.

Veremos también un problema muy especial, la distancia de un punto a una recta. Ya lo puedes resolver con lo que sabes, pero por su importancia vamos a calcular una fórmula.

Algunas cosas que ya sabes (y cómo hacerlas)

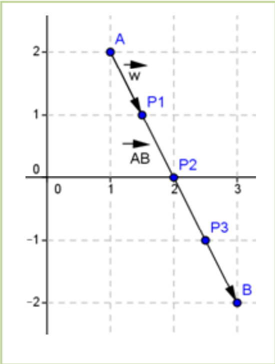
1. Calcular **distancias** entre dos puntos (módulo del vector que une los puntos).
2. Ángulo entre **rectas** (ángulo entre sus vectores con el producto escalar).
3. Calcular ángulos en triángulos (**ángulo entre los vectores** con producto escalar).
4. Calcular ecuaciones de **rectas** (busca un punto y un vector y aplica la forma vectorial o continua).
5. Posiciones relativas de **rectas** (Resuelve el sistema para hallar el punto de intersección).

Vamos a ver algunos problemas resueltos:

Actividad resuelta

- *Divide el segmento que une los puntos* $A \equiv (1,\ 2)$ *y* $B \equiv (3,\ -2)$ *en cuatro partes iguales.*

Solución:



El vector que une los puntos es $\overrightarrow{AB} = (2,-4)$. Si queremos dividir el segmento en cuatro partes iguales, lo que deberemos hacer es dividir el vector en cuatro partes e irlas sumando:

$$\vec{w} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{2,\ -4}\right) = \left(\overrightarrow{0'5,\ -1}\right)$$

Por tanto, los puntos son:

$P_1 = A + \vec{w} = (1,\ 2) + (0'5,-1) = (1'5,1)$, $P_2 = P_1 + \vec{w} = (2,\ 0)$, $P_3 = P_2 + \vec{w} = (2'5,\ -1)$

Observa como la solución la gráfica coincide con lo obtenido.

En el caso del punto medio, se hace exactamente igual, dividiendo entre 2. Pero se puede calcular también de otro modo:

Dados dos puntos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$, su punto medio es $M = \dfrac{A+B}{2} = \left(\dfrac{a_1+b_1}{2}, \dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$.

Ejemplo

- El punto medio entre $A \equiv (1,\ 2)$ y $B \equiv (3,\ -2)$ es $M = \left(\dfrac{1+3}{2}, \dfrac{2+(-2)}{2}\right) = (2,\ 0)$ como ya sabíamos.

Actividades propuestas

21. Dados los puntos $A = (1,4)$ y $B = (-3,6)$ calcula su punto medio:

a. Construyendo el vector que los une.

b. Con la fórmula. Comprueba que sale lo mismo.

22. Considera los puntos $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$. Demuestra que con las dos maneras de calcular el punto medio sale lo mismo.

Actividad resuelta

- *Calcula el ángulo entre las rectas* $r \equiv \{x + y = 2\}$ *y la recta* s *que pasa por el punto* $A \equiv (1, -1)$ *y tiene pendiente* 2.

Solución:

Lo primero, vamos a calcular la recta s. Ya que nos dan la pendiente, podemos aplicar la ecuación punto-pendiente para obtener: $y - 1 = 2[x - (-1)]$.

Necesitamos un vector de la recta. Pasamos a forma continua, que es: $\frac{y-1}{2} = \frac{x+1}{1}$ o, reordenando $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2}$. Un vector de la recta es $(1, 2)$. Recuerda que si m es la pendiente, un vector director es SIEMPRE $(1, m)$.

Y ahora, un vector de la otra recta. Hay muchas maneras de hacerlo, vamos a calcularlo obteniendo dos puntos. Es claro que $(1, 1) \in r$, $(2, 0) \in r$. El vector que los une es $(-1, 1)$ que será por tanto un vector director de la recta.

Más sencillo es usar que $Ax + By - 2 = 0$ tiene como vector ortogonal (A, B) y, por tanto, como vector directos a $(-B, A) = (-1, 1)$. O bien calculando la pendiente despejando: $y = -x + 2$.

En cualquier caso, ahora basta calcular el ángulo entre los vectores con la fórmula:

$$\cos\alpha = \frac{(1, 2)\cdot(-1, 1)}{\|(1, 2)\|\cdot\|(-1, 1)\|} = \frac{-1+2}{\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Haciendo el arco coseno, obtenemos $arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 65'91^{\circ}$. Observa que el ángulo entre dos rectas es siempre menor de 90º, por lo que siempre conviene tomar el coseno positivo

Actividades propuestas

23. Calcula una recta perpendicular a $r \equiv x + 2y = 5$ que pase por $(2, 0)$. Exprésala al menos en tres formas y dibújala.

24. Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$ y $s \equiv 2x + y = 2$. Estudia su posición relativa y calcula sus puntos de corte si los hubiera.

25. Consideremos la recta $r \equiv (1,3) + \lambda(1,-2)$.

a. Calcula su pendiente.

b. ¿Pertenece el punto $(2, 2)$ a la recta? ¿Y el punto $(0,-2)$?

c. Da al menos tres puntos de la recta.

d. Dibuja la recta.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Distancia de un punto a una recta

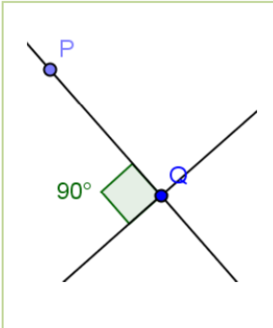
En primer lugar vamos a definir lo que es.

La **distancia entre un punto y una recta** es la mínima distancia que hay entre el punto y cualquiera de los puntos de la recta. Si P es el punto y r es la recta se representa por $d(P, r)$.

Es decir, dada una recta r y un punto exterior a ella P, la distancia del punto a la recta es:

$$d(P, r) = \min \{d(P, Q) : Q \in r\}$$

Este es un problema que ya se puede hacer con lo que sabes. De modo que vamos exponerlo de una manera un poco diferente del resto. En primer lugar, vamos a resolverlo con lo que ya sabes y después, como es un problema importante, vamos a deducir una fórmula para hacerlo directamente. Naturalmente, tú puedes resolverlo cómo quieras. Lo único previo que vamos a notar es una propiedad que resulta bastante obvia intuitivamente.



Dada una recta r y un punto exterior a ella P, el punto Q de mínima distancia es el que cumple que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a la recta.

Actividad resuelta

- *Calcula la distancia entre el punto* $P \equiv (1, -2)$ *y la recta* $r \equiv \left\{(x, y) = (-2, 2) + k\,(\overrightarrow{4, -2})\right\}$.

Lo que debemos calcular es el punto Q. De modo que calculamos la recta perpendicular a r que pasa por P (la vamos a llamar s por ponerle un nombre). Su intersección con r será el punto Q.

El vector perpendicular a $(4, -2)$ ya sabes que es $(2, 4)$. Así pues, la recta es $s \equiv \left\{\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4}\right\}$ puesto que pasa por P y tiene a $(2, 4)$ como vector director. Para hacer la intersección necesitamos a r en una forma con x e y. Lo más sencillo es pasarla a forma continua, que resulta ser $r \equiv \left\{\frac{x+2}{4} = \frac{y-2}{-2}\right\}$. Para calcular Q, resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} \\ \frac{x+2}{4} = \frac{y-2}{-2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 4 = 2y + 4 \\ -2x - 4 = 4y - 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -2x - 4y = -4 \end{cases}.$$

Resolvemos el sistema multiplicando la segunda ecuación por 2:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 2(-2x - 4y = -4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -4x - 8y = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ -10y = 0 \end{cases} \Rightarrow -10y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 2$$

El punto Q es, por tanto, $(2, 0)$. Basta calcular la distancia entre P y Q, distancia entre dos puntos que ya conoces.

$$d(P,Q) = d[(1,-2),(2,0)] = \sqrt{(1-2)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2'24.$$

Fórmula general para la distancia de un punto a una recta

Ya hemos visto que el problema se puede resolver con los conocimientos que ya tienes. Vamos a dar la fórmula general, su demostración la veremos en el apéndice II.

La **distancia entre un punto** $P \equiv (x_0, y_0)$ **y una recta** $r \equiv \{Ax + By + C = 0\}$ se calcula:

$$d(P,r) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Actividad resuelta

- *Calcula la distancia entre el punto* $P \equiv (1,-2)$ *y la recta* $r \equiv \left\{ (x,y) = (-2,2) + k\,(\overrightarrow{4,-2}) \right\}$.

Solución:

Debemos pasar la recta a forma implícita. En forma continua (ya lo habíamos visto) es $\frac{x+2}{4} = \frac{y-2}{-2}$. Multiplicando en cruz es $-2x - 4 = 4y - 8 \Rightarrow -2x - 4y + 4 = 0$. Para dejarlo más bonito, multiplicamos por (-1), si bien este paso no es necesario. Obtenemos al final que la ecuación implícita de la recta es:

$$2x + 4y - 4 = 0.$$

Aplicamos sin más la fórmula:

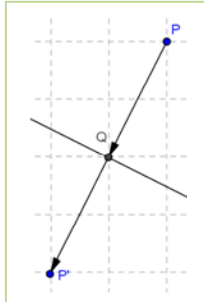
$$d(P,r) = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) - 4}{\sqrt{2^2 + 4^2}} \right| = \left| \frac{-10}{\sqrt{20}} \right| = \frac{10}{2\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \sqrt{5} \approx 2'24$$

Una vez más, el resultado es el mismo.

Observa que esta fórmula NO calcula el punto de mínima distancia. Si lo necesitáramos, no habría más remedio que utilizar el método anterior.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Punto simétrico



Este es un concepto que aparece mucho en Geometría. Punto simétrico es la imagen en el espejo. Más concretamente, el "espejo" es una recta. La definición formal es la que sigue.

Dada una recta r y un punto P exterior a ella el simétrico, P', es un punto situado a la misma distancia de la recta y de forma que el vector $\overrightarrow{PP'}$ perpendicular a la recta.

El punto P' **simétrico** de P respecto a la recta r es igual a $P' = Q + \overrightarrow{PQ}$ siendo Q el punto de r de mínima distancia a P.

Actividad resuelta

- *Calcula el punto simétrico de* $P \equiv (1, -2)$ *respecto a la recta* $r \equiv \left\{ (x, y) = (-2, 2) + k\,\overrightarrow{(4, -2)} \right\}$.

Solución:

Ya habíamos calculado el punto Q, que era (2, 0). Así pues, $\overrightarrow{PQ} = (2, 0) - (1, -2) = \overrightarrow{(1, 2)}$. El simétrico es, por tanto $P' = Q + \overrightarrow{PQ} = (2, 0) + (1, 2) = (3, 2)$.

Actividades propuestas

26. Suponte que la distancia de un punto a una recta es 0. ¿Qué significa ese resultado? Aplícalo a la recta $2x - y = 1$ y el punto (2, 3).

27. Considera la recta $x + 2y = 3$ y el punto A = (2, 3). Calcula el punto Q de mínima distancia y el simétrico de A respecto de la recta.

28. Calcula la distancia al origen de las rectas que se indican.

a. $2x + y = 3$ b. $(x, y) = (1, -2) + \lambda\overrightarrow{(2, -1)}$ c. $y = \dfrac{x}{2}$

29. Calcula la distancia del punto (1, 2) a las rectas que se indican.

a. $x + 3y = 4$ b. $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$ c. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{-1}$ d. $y - 2 = 4(x + 1)$

30. Una recta pasa por el punto (3, 1) y forma con los semiejes positivos un triángulo de área seis unidades. Calcula dicha recta.

31. Calcula el punto de simétrico de A = (1, 2) respecto a la recta y = 3.

32. Consideremos un pentágono irregular $ABCDE$ formado por los puntos

A = (–2, 3), B = (1, 4), C = (3,3), D = (2, 2) y E = (–1, 1).

Dibújalo y calcula su área [Te recomendamos dividirlo en figuras más manejables].

33. Consideremos un cuadrado $ABCD$. El punto A es (1, 2) y los puntos B y C están sobre la recta $y - x = 3$. Calcula los cuatro vértices del cuadrado y su área.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

2.5. Traslaciones

Muchos lugares geométricos tienen ecuaciones bastante más sencillas si los expresamos centrados en el origen de coordenadas. Para ello, vamos a ver cómo mover los lugares geométricos.

Si queremos transformar el punto (x_0, y_0) en el origen de coordenadas se hace $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$ y de este modo la nueva ecuación aparece centrada en el origen. En otras palabras, se usa la tabla:

	Coordenadas antiguas	Coordenadas nuevas
Punto	(x_0, y_0)	$(0, 0)$
Primera coordenada	x	$x' = x - x_0$
Segunda coordenada	y	$y' = y - y_0$

Esta transformación se puede hacer en un sentido o en el otro.

Actividad resuelta

- *Dada la recta* $2y + x = 3$ *trasladarla para que pase por el origen de coordenadas.*
- *Calcular la recta con pendiente 2 que pase por el punto* $(1, 2)$

Solución:

1. Basta ponerlo junto. Hacemos en $2y + (x - 3) = 0$ el cambio $\begin{cases} x' = x - 3 \\ y' = y \end{cases}$ la recta se transforma en $2y' + x' = 0$, recta que, en efecto, pasa por el rigen de coordenadas.
2. Lo que vamos a hacer es la transformación inversa. La recta con pendiente 2 que pasa por el origen es obviamente $y' = 2x'$. El cambio es ahora $\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - 2 \end{cases}$ por lo que sustituyendo obtenemos la ecuación $y - 2 = 2(x - 1)$. No por casualidad es la ecuación punto-pendiente, la ecuación punto pendiente SIEMPRE puede deducirse así.

Puede parecerte que las traslaciones no sirven de gran cosa, poco nos han arreglado los problemas. Pero es que las rectas son lugares geométricos muy sencillos, en cuanto veamos alguno más complicado veremos su gran utilidad.

2.6. Mediatriz y bisectriz

Un ejemplo de lugar geométrico que ya conoces es el de las mediatrices y las bisectrices. Con lo que ya sabes, puedes resolver todos los problemas en los que aparezcan. Pero vamos a insistir en su definición como lugar geométrico.

La **mediatriz** de un segmento AB es el lugar geométrico de los puntos, $X(x, y)$, que equidistan de los extremos del segmento. Es decir:

$$d(X, A) = d(X, B).$$

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Vamos a comenzar con un ejemplo:

Actividad resuelta

- *Dado el segmento de extremos* A = (1, 1) *y* B = (5, 3) *determina la ecuación de su mediatriz.*

Solución

Debemos imponer: $d(X, A) = d(X, B)$, siendo $X = (x, y)$.

$d(X, A) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$.

$d(X, B) = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2}$. Igualamos:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2}.$$

Elevamos al cuadrado:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = (x-5)^2 + (y-3)^2.$$

Desarrollamos y simplificamos:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 \rightarrow 8x + 4y - 32 = 0 \rightarrow 4x + 2y - 16 = 0$$

En efecto, ¡es la ecuación de una recta! A pesar de los términos en cuadrado que nos aparecían.

Ya sabemos que un vector perpendicular a dicha recta nos lo dan los coeficientes: (4, 2), que en efecto son las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ = (5 – 1, 3 – 1) = (4, 2), que es perpendicular a la recta. Sabemos también que debe pasar por el punto medio del segmento: $M = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (3, 2)$. En efecto (3, 2) es un punto de la recta pues: 4·3 + 2·2 = 12 + 4 = 16.

Por tanto también puedes calcular la ecuación de la mediatriz como

Mediatriz de un segmento es la recta que pasa por el **punto medio** y es **perpendicular al segmento**.

En general

La ecuación de la mediatriz del segmento AB, con $A = (a_1, a_2)$ y $B = (b_1, b_2)$ es por tanto:

$$d(X, A) = d(X, B)$$

$$\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} = \sqrt{(x-b_1)^2 + (y-b_2)^2}.$$

$$(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = (x-b_1)^2 + (y-b_2)^2.$$

$$x^2 - 2a_1x + a_1^2 + y^2 - 2a_2y + a_2^2 = x^2 - 2b_1x + b_1^2 + y^2 - 2b_2y + b_2^2 \rightarrow$$

$$2(b_1 - a_1)x + 2(b_2 - a_2)y + a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 = 0$$

No te aprendas esta ecuación. Únicamente observa que es una recta perpendicular al segmento.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Bisectriz

La **bisectriz** de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos, $X(x, y)$, que equidistan de los lados del ángulo. Si el ángulo está formado por las rectas r y s, la definición nos dice:

$$d(X, r) = d(X, s).$$

Vamos a comenzar con un ejemplo:

Actividad resuelta

- *Dadas las rectas* r*:* $3x + 4y = 1$*, y* s*:* $4x + 3y = 5$*, determina la ecuación de su bisectriz (o bisectrices).*

Solución

Debemos imponer: $d(X, r) = d(X, s)$, siendo $X = (x, y)$.

$$d(X,r)=\left|\frac{3x+4y-1}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|=\left|\frac{3x+4y-1}{5}\right|=d(X,s)=\left|\frac{4x+3y-5}{\sqrt{4^2+3^2}}\right|=\left|\frac{4x+3y-5}{5}\right|$$

Al quitar los valores absolutos tenemos dos soluciones posibles:

1) $3x + 4y - 1 = 4x + 3y - 5 \quad \to \quad -x + y + 4 = 0$
2) $3x + 4y - 1 = -(4x + 3y - 5) \quad \to \quad 7x + 7y - 6 = 0$

Observa que hemos obtenido dos bisectrices, ya que dos rectas forman cuatro ángulos iguales dos a dos, que son dos rectas perpendiculares, y en este caso particular paralelas a las bisectrices de los cuadrantes.

Actividades propuestas

34. Determina las mediatrices de los segmentos de extremos A y B. Represéntalo gráficamente.

a. $A = (2, 7)$ y $B = (6, 3)$ b. $A = (-3, 5)$ y $B = (0, -3)$ c. $A = (-1, 0)$ y $B = (7, -4)$

35. Determina las mediatrices de los segmentos de extremos A y B. Represéntalo gráficamente.

a. $A = (0, 7)$ y $B = (0, 3)$ b. $A = (-3, 0)$ y $B = (6, 0)$ c. $A = (-5, 0)$ y $B = (0, -5)$

36. Determina las bisectrices de las rectas r y s. Represéntalo gráficamente.

a. $r : x + 2y - 5 = 0$ y $s : 2x - y - 8 = 0$ b. $r : 3x + 5y - 2 = 0$ y $s : 4x - 6y - 1 = 0$

37. Determina las bisectrices de las rectas r y s. Represéntalo gráficamente.

a. $r : x = 0$ y $s : y = 0$ b. $r : x + y = 0$ y $s : x - y = 0$

38. Dado el triángulo de vértices ABC, siendo $A = (0, 0)$, $B = (6, 0)$ y $C = (4, 4)$, determina las ecuaciones de:

a. Sus mediatrices y las coordenadas del circuncentro
b. Sus bisectrices y las coordenadas del incentro
c. Sus alturas y las coordenadas del ortocentro
d. Sus medianas y las coordenadas del baricentro

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3. CÓNICAS

Vamos a continuar con lugares geométricos un poco más complicados, los que vienen dados por ecuaciones de segundo grado (en x e y). Estos lugares de llaman cónicas porque se pueden obtener cortando un cono por un plano.

3.1. Circunferencias y elipses

Empecemos con uno que debería resultarte familiar, la circunferencia.

Dado un punto cualquiera $P = (p_1,\ p_2)$, llamado **centro,** y una distancia r llamada **radio**, una **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos que están a distancia r de P.

Esta definición debería sonarte al menos un poco, quizás de manera un poco menos formal. Antes ya habíamos visto que un lugar geométrico debe venir dado por una ecuación, así que vamos a calcular la ecuación de la circunferencia.

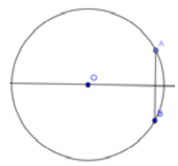
¿Cuándo un punto $(x,\ y)$ pertenece a la circunferencia? Pues cuando está a distancia r de $(p_1,\ p_2)$. Lo único que tenemos que hacer es insertar la fórmula de la distancia.

$$d[(x, y), (p_1, p_2)] = r \text{ significa } \sqrt{(x-p_1)^2 + (y-p_2)^2} = r \Leftrightarrow (x-p_1)^2 + (y-p_2)^2 = r^2$$

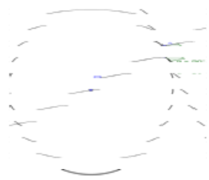
Una **circunferencia** de centro (p_1, p_2) y radio r tiene por ecuación $(x-p_1)^2 + (y-p_2)^2 = r^2$. Esta ecuación a veces se llama **ecuación canónica** o **ecuación reducida**.

Propiedades de la circunferencia

1. Si se toman dos puntos en una circunferencia, su mediatriz pasa por el centro.



2. Si tomamos un punto A en una circunferencia, la tangente a la circunferencia por ese punto es perpendicular al radio que le corresponde.



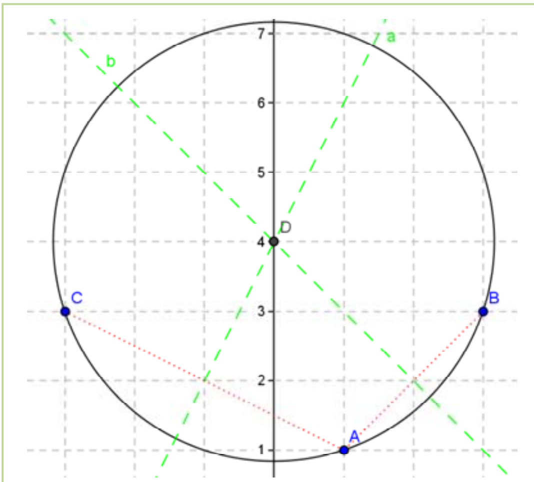
3. Conocido tres puntos de la circunferencia podemos calcular la misma (su centro es el circuncentro del triángulo que forman).

Actividad resuelta

- *Calcula la circunferencia que pasa por los puntos* $A \equiv (1, 1), B \equiv (3, 3), C \equiv (-3, 3)$

Solución:

Sabemos que el centro está sobre todas las mediatrices. Así pues, calculemos la mediatriz del segmento AB y la de AC (podría hacerse también con BC) y el punto de corte es el centro.



Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Se tiene $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(2,\,2)}$ y su punto medio es:

$$A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1,\,1) + \overrightarrow{(1,\,1)} = (2,\,2).$$

Un vector perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ es $(-2{,}2)$. Con ese vector director, la recta es $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y-2}{2}$.

Simplificando $x - 2 = (-1)(y - 2) \Rightarrow x = 4 - y$. Llamemos a a esta recta.

De modo análogo, la otra mediatriz es la recta que pasa por el punto medio de $(-3,\,3)$ y $(1,\,1)$: (–1, 2), y cuyo vector director es perpendicular a $BC = (-4,\,2)$. Puedes comprobar que debe ser la recta $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{4}$ que resulta ser $y = 2x + 4$

Resolviendo el sistema $\begin{cases} x = 4 - y \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ obtenemos el centro, que es el punto $(0,\,4)$. Para calcular el radio, basta calcular la distancia a cualquiera de sus puntos. Por ejemplo, $r = d[(0,\,4),(1,\,1)]$ que nos da $r = \sqrt{(0-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$. La circunferencia es pues:

$$(x-0)^2 + (y-4)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 \text{ o, lo que es lo mismo } x^2 + (y-4)^2 = 10.$$

Es fácil comprobar que los puntos A, B y C cumplen la ecuación.

Cómo reconocer una circunferencia

Suponte que nos dan una ecuación del tipo $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y = 0$ y nos preguntan a qué lugar geométrico corresponde. Debemos intentar que se parezca a algo conocido. Para ello, seguimos el siguiente método.

1. Dividimos por el coeficiente común de x^2 e y^2 (si el coeficiente no es común se trata de otro lugar geométrico): $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$
2. Completamos los cuadrados para que quede $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + A = 0$: $(x-2)^2 + (y+1)^2 - 4 - 1 = 0$
3. Pasamos el número "A" al otro término, siendo $-A$ el radio al cuadrado (obviamente ha de ser positivo si no es una circunferencia compleja, es decir no real): $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$

Vamos a hacerlo con más detalle:

Actividad resuelta

- *La ecuación* $2x^2 + 2y^2 - 8x + 4y = 0$ *representa una circunferencia. Calcula su ecuación canónica, centro y radio.*

Solución:

Lo primero, dividimos por 2. De este modo obtenemos $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ahora, al agrupar "x", se tiene x^2-4x. Si queremos que sea un cuadrado de la forma $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$ es claro que tenemos que tomar $a=2$. Por tanto, tenemos la igualdad:

$$x^2-4x=x^2-4x+2^2-2^2=(x-2)^2-4$$

De la misma manera $y^2+2y=(y+1)^2-1$.

Sustituyendo $0=x^2+y^2-4x+2y=(x-2)^2-4+(y+1)^2-1$ de donde la ecuación es:

$$(x-2)^2+(y+1)^2=5.$$

Arreglándola un poco, tenemos la ecuación canónica:

$$(x-2)^2+[y-(-1)]^2=\left(\sqrt{5}\right)^2.$$

El centro es, por tanto $(2,-1)$ y el radio es $\sqrt{5}$

Todo este método supone que los coeficientes de x^2 e y^2 son iguales. ¿Qué pasa si no lo son? Pues entonces no tenemos una circunferencia sino otra figura. Es la que vamos a estudiar ahora.

Hemos visto ya que la recta viene dada por ecuaciones de primer grado del tipo $Ax+By+C=0$. También hemos notado que, con ecuaciones de segundo grado con los coeficientes iguales y sin término en xy, como $4x^2+4y^2+8x+12y-12=0$ obtenemos circunferencias.

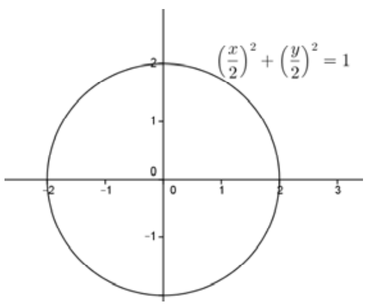
La elipse

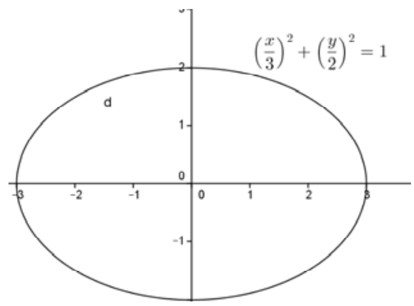
Vamos ahora a ver qué pasa con el caso general de segundo grado, $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ cuando el signo de A y el de B son iguales.

Antes de nada vamos a hacer un caso sencillo. Pensemos un momento en la ecuación $x^2+y^2=2^2$, que es una circunferencia centrada en el origen y de radio 2.

Podemos exprésala como $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=1$.

Esta circunferencia pasa por (2, 0), (0, 2), (–2, 0) y (0, –2). ¿Y si cambiamos uno de los doses, por ejemplo por un tres?: $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=1$. Pues tenemos una figura que pasa por (3, 0), (0, 2), (–3, 0) y (0, –2). Una especie de circunferencia deformada cuyo nombre es **elipse**.





En general, $\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2=1$ es circunferencia de radio r. Podemos cambiar r por dos constantes a y b con la única restricción de que sean positivas.

Dados dos números positivos a, b tenemos una **elipse** (centrada en el origen) **con** el lugar geométrico dado por la ecuación $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$.

Una elipse es una especie de circunferencia deformada, con un radio en horizontal y otro en vertical. Pasa por (a, 0), (–a, 0), (0, b), (0, –b).

$\left(\frac{x'}{a}\right)^2+\left(\frac{y'}{b}\right)^2=1$, es la elipse centrada en el origen, si el centro se sitúa en (x_0, y_0) tendremos que la ecuación genérica de la elipse es: $\begin{cases} x \xrightarrow{\text{desp horiz}} x-x_0 \\ y \xrightarrow{\text{desp vertical}} y-y_0 \end{cases}$ $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1$.

Dados dos números positivos a, b y un punto (x_0, y_0) llamado **centro**, una **elipse** es el lugar geométrico dado por la ecuación $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1$. Esta ecuación a veces se llama **ecuación canónica** o **ecuación reducida de la elipse**.

Cómo reconocer una elipse

En general, cualquier ecuación del tipo $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ es una elipse cuando (y sólo cuando) A y B son no nulos y del mismo signo. Vamos a ver un método para llegar a la ecuación canónica.

Si nos dan una ecuación del tipo $2x^2+5y^2-8x+4y=0$, siempre que los coeficientes de x^2 e y^2 sean del mismo signo tenemos una elipse. El método es prácticamente idéntico al de la circunferencia.

1. Completamos los cuadrados para que quede $A(x-x_0)^2+B(y-y_0)^2+F=0$:
   $$2(x-2)^2+5(y+\frac{2}{5})^2-8-\frac{4}{5}=2(x-2)^2+5(y+\frac{2}{5})^2-\frac{44}{5}=0$$
2. Si F es nulo es un único punto. Si no, dividimos por F para obtener $\frac{A}{F}(x-x_0)^2+\frac{B}{F}(y-y_0)^2=1$
   : $\frac{10}{44}(x-2)^2+\frac{25}{44}(y+\frac{2}{5})^2=1$
3. La expresamos como $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1$: $(\frac{x-2}{\sqrt{4'4}})^2+(\frac{y+\frac{2}{5}}{\sqrt{\frac{44}{25}}})^2=1$. Si $\frac{A}{F}$ es negativo no hay elipse. A veces se llama elipse imaginaria, pues al sustituir a y b por ai y bi obtenemos una elipse.

Elementos de una elipse

El estudio general de una elipse nos llevaría demasiado tiempo pero sí vamos a dar unas pinceladas. Nos vamos a limitar a la forma canónica, porque todas las características ya están en ella. La elipse general puede estudiarse simplemente transformando los elementos.

Así pues, vamos a ello. La elipse en forma canónica es $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ y vamos a tomar $a > b$ (observa que si $a = b$ es una circunferencia). Si fuera $a < b$ sería lo mismo pero en vertical (es decir, todos los elementos girados 90º).

En primer lugar, si bien consideramos que la definición que hemos dado de una elipse es la más intuitiva, no es la definición clásica. La definición tradicional es la siguiente:

Dados dos puntos F_1 y F_2 llamados **focos**, una **elipse** es el lugar geométrico de los puntos P cuya suma de distancias a los focos es constante. En símbolos:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Tal y cómo está expuesta, no se parece mucho a la definición que hemos dado. Vamos a avanzar un poco más en esta nueva definición.

En primer lugar, ¿dónde están los focos? O, en otras palabras, si los colocamos en los puntos $F_1 \equiv (-c, 0)$ y $F_2 \equiv (c, 0)$ para que sea más cómodo, ¿dónde queda la elipse? Lo siguiente son ideas intuitivas, la demostración rigurosa la puedes encontrar en el apéndice III.

Lo primero, parece natural suponer (al menos como primera hipótesis) que el centro de la elipse será el punto medio de sus focos, es decir $\frac{F_1 + F_2}{2}$. Si están en $(-c, 0)$ y en $(c, 0)$ el centro es el origen.

Lo siguiente que notamos es que, si $a > c$ el punto $(a, 0)$ pertenece a la elipse pues $d((a, 0), (c, 0)) = a - c$ en tanto que $d((a, 0), (-c, 0)) = a + c$.

De este modo $d((a, 0), F_1) + d((a, 0), F_2) = a - c + a + c = 2a$.

Si esos puntos están, eso ya nos sugiere que la elipse será $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Nos falta sólo calcular la relación entre b y c. Esto puede hacerse gráficamente.

Teorema de Pitágoras de la elipse: los valores de a, b y c están relacionados entre sí mediante la siguiente expresión:

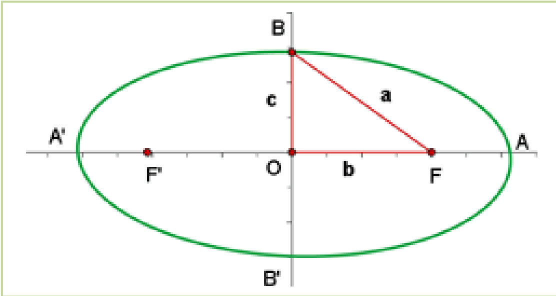
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Demostración:

Aplicamos la definición de la elipse en cualquiera de los puntos B o B':

$d(F, B)+d(F', B)=2a \rightarrow d(F, B)=a$



Se forma un triángulo rectángulo donde los catetos valen b y c y la hipotenusa a.

Sabemos que el punto $(0, b)$ está en la elipse. Por tanto la suma de sus distancias a los focos es $2a$. Calculémoslas:

$$\sqrt{(0-c)^2+(b-0)^2}+\sqrt{[0-(-c)]^2+(b-0)^2}=2a.$$

De ahí se deduce inmediatamente:

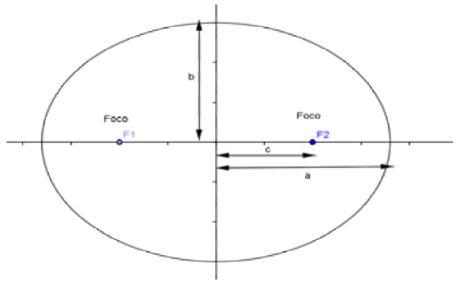
$$2\sqrt{c^2+b^2}=2a \text{ o, lo que es lo mismo, } c^2=a^2-b^2.$$

Por tanto, si tenemos una elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, sus focos están en los puntos:

$$\left(-\sqrt{a^2-b^2}, 0\right) \text{ y } \left(\sqrt{a^2-b^2}, 0\right).$$

Recapitulemos:

1. La elipse es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.
2. Si llamamos $2a$ a esa constante, $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ a los focos y definimos $b^2=a^2-c^2$ entonces la elipse tiene por ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
3. Observa, $a^2=b^2+c^2$. ¿No te recuerda al teorema de *Pitágoras*, donde a es la hipotenusa y b y c los catetos?

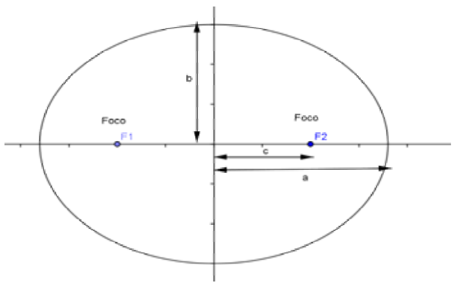


En el dibujo que mostramos a continuación, puedes ver una elipse donde hemos dibujado sus focos y el significado de las distancias a, b y c.

Una última cuestión es un parámetro llamado excentricidad que vamos a pasar a definir ahora, junto con la distancia focal.

Dada una elipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$, se llama **distancia focal** a la distancia entre los dos focos, es decir $2c$.

Se llama **excentricidad** al cociente $\frac{c}{a}$ y se suele representar con la letra e.



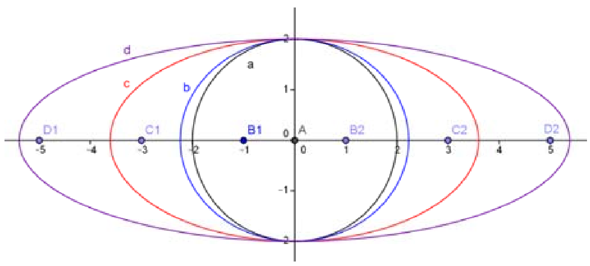
Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Algunas notas sobre la excentricidad y la distancia focal:

1. La excentricidad de una elipse siempre está entre 0 y 1, pues es $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$
2. El 0 puede alcanzarse, corresponde a distancia focal 0. En tal caso los dos focos coinciden con el centro de la elipse y la elipse es una circunferencia. Se cumple $c=0$ y $a=b$.
3. El 1 no puede alcanzarse sin cambiar la definición. Realmente, se aproxima a una curva que veremos después y que ya has estudiado en cursos anteriores, una parábola.
4. Cuánto más pequeña sea la excentricidad, más se aproxima la elipse a una circunferencia. Cuánto más grande sea (sin llegar a 1) más ovalada se vuelve.

En el dibujo puedes ver cuatro elipses con el mismo parámetro b. Las llamamos a, b, c y d. Sus focos son A para la a, B_1 y B_2 para la b, etc. y al ir variando c, sus excentricidades son, respectivamente:

0, $\frac{1}{\sqrt{5}}\approx 0'45$, $\frac{3}{\sqrt{13}}\approx 0'83$ y $\frac{5}{\sqrt{29}}\approx 0'93$.



Observa cómo la inicial es una circunferencia y la figura se vuelve cada vez más ovalada, con los focos más cerca del borde.

Actividades propuestas

39. Una elipse tiene focos en (1, 2) y en (5, 2) y pasa por el punto (0, 2). Calcula su ecuación y dibújala. ¿Cuánto vale su excentricidad?

40. Calcula todos los elementos de las elipses siguientes y dibújalas.

a. $\frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$

b. $4x^2+9y^2-8x=0$

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.2. Hipérbolas

El siguiente caso es $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ con A y B de distinto signo. Como antes, vamos a analizar primero la ecuación canónica. Es prácticamente igual que la elipse (en cuanto a desarrollo, el dibujo es TOTALMENTE distinto) de modo que vamos a ir más rápido.

Centrada en el origen, la elipse es $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. La hipérbola aparece simplemente cambiando el signo, es decir:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Dados dos números positivos a, b una **hipérbola** (centrada en el origen) es el lugar geométrico dado por la ecuación $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Esta ecuación a veces se llama **ecuación canónica** o **ecuación reducida**.

¿Y qué es esta figura? Para verlo, vamos a dibujar una con valores concretos. Tomamos dos valores simples cualesquiera, por ejemplo $a = 2$, $b = 3$ (por ninguna razón especial). Vamos pues a dibujar, pues $\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$.

Para ello, vamos despejar la y. Esto es sencillo:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow -\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{4} \Rightarrow y^2 = 9\left(\frac{x^2}{4} - 1\right) \Rightarrow y = \pm\sqrt{9}\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}.$$

En resumen, tenemos:

$$y = \pm 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \text{ o, en general } y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

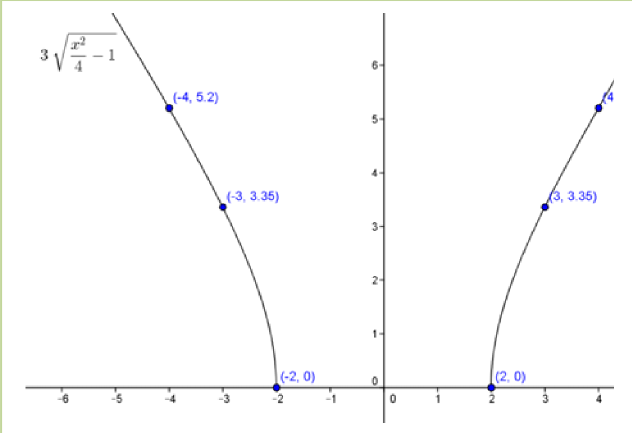
En primer lugar, no tenemos una función sino dos, la raíz positiva y la negativa. Vamos a dibujar la primera $y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$, la otra la obtendremos por simetría.

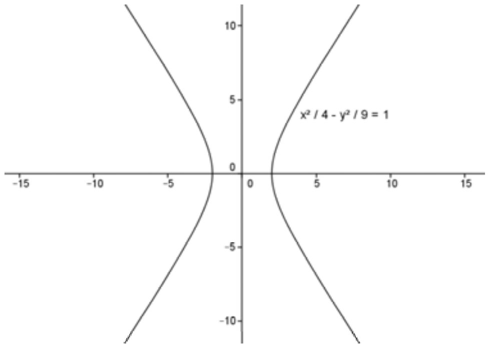
Lo primero que debemos notar es que, puesto que no se pueden calcular raíces negativas, hay valores para los que la función no está definida. Resolviendo la inecuación $1 - \frac{x^2}{4} \geq 0$ obtenemos $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$, el dominio de la función. Es fácil notar que es simétrica. Para dibújala vamos a dar valores:

x	–2	2	3	–3	4	–4
$y = 3\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$	0	0	3’354	3’354	0’2	5’196

Su gráfica es, por tanto:

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF





¿Y qué ocurre con la parte de abajo? Pues es lo mismo por simetría. Vamos a hacer el dibujo completo, visto con ejes más grandes ("desde más lejos"):

Ecuación general

Al igual que antes, si la hipérbola $\left(\frac{x'}{a}\right)^2-\left(\frac{y'}{b}\right)^2=1$ representa la ecuación con centro en el origen, para el caso más general con centro en (x_0, y_0) $\begin{cases} x \xrightarrow{\text{desp horiz}} x-x_0 \\ y \xrightarrow{\text{desp vertical}} y-y_0 \end{cases}$ tendremos la expresión general $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1$.

Dados dos números positivos a, b y un punto (x_0, y_0) llamado **centro**, una **hipérbola** (horizontal) es el lugar geométrico dado por la ecuación $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1$. Esta ecuación a veces se llama **ecuación canónica** o **ecuación reducida**.

Observa que, si cambiamos x por y en la ecuación, tendremos $\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2-\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2=1$. Esto es una hipérbola vertical.

Cómo reconocer una hipérbola

En general, cualquier ecuación del tipo $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ da una hipérbola cuando (y sólo cuando) A y B son no nulos y de signo contrario. El método es el mismo que antes.

1. Completamos los cuadrados para que quede $A(x-x_0)^2-B(y-y_0)^2+F=0$.
2. Si F es nulo son dos rectas. Si no, dividimos por F para obtener $\frac{A}{F}(x-x_0)^2-\frac{B}{F}(y-y_0)^2=1$
3. Dependiendo de si $\frac{A}{F}$ es negativo o positivo será $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=1$ o bien en vertical $\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2-\left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2=-1$.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Elementos de una hipérbola

Como antes, el estudio general nos llevaría demasiado tiempo, así que nos limitaremos a dar unas pequeñas pinceladas. Como antes también, nos limitaremos a la forma canónica pues en ella ya aparecen todas las características. Haremos después algún ejemplo del caso general, que se obtiene transformando los elementos.

La forma canónica de la hipérbola con centro en el origen es $\left(\frac{x}{a}\right)-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$, en este caso no es necesario que un parámetro sea mayor que otro, basta con que a y b sean positivos.

Una vez más, la definición que hemos usado no es la clásica. La definición usual es la que sigue.

Dados dos puntos F_1 y F_2 llamados **focos**, una **hipérbola** es el lugar geométrico de los puntos P cuya diferencia de distancias a los focos es constante. En símbolos:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a$$

Una vez más, aparentemente no tiene nada qué ver con la definición que habíamos dado. La demostración rigurosa de que coinciden está en el apéndice, lo que vamos a ver son algunas cuestiones intuitivas.

Colocamos los focos en los puntos $F_1 \equiv (-c, 0)$ y $F_2 \equiv (c, 0)$, con lo que suponemos (en primera hipótesis) que el centro está en el origen.

Observamos que, si $a < c$ el punto $(a, 0)$ pertenece a la hipérbola. Esto es un poco más complicado que en el otro caso.

$d((a, 0),(c, 0)) = |a-c| = c-a$ pues en este caso $c > a$. A su vez $d((a, 0),(-c, 0)) = a+c$. Restando, tenemos $d((a, 0),(-c, 0)) - d((a, 0),(c, 0)) = c + a - (c-a) = 2a$.

De la misma manera, el punto $(-a, 0)$ pertenece a la hipérbola. Una pregunta que puedes hacerte es ¿por qué antes, en la elipse, es $a > c$ y ahora es $a < c$? Si intentáramos hacerlo al revés, se obtendría que no hay ningún punto.

Como $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ pertenecen la hipérbola será $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. Nos falta sólo calcular la relación entre b y c. En este caso no la vamos a hacer porque es mucho más complicado. Pero en el apéndice puedes ver que, partiendo de la definición, obtenemos la ecuación $b^2 = c^2 - a^2$. Ahora c es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos a y b.

Recapitulemos:

1. La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante.
2. Si llamamos $2a$ a esa constante, $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ a los focos y definimos $b^2 = c^2 - a^2$ entonces el resultado tiene por ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

La demostración de este hecho, usando sólo la definición, puedes verla en el apéndice.

Asíntotas

Si despejamos la y, ya hemos visto que obtenemos $y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$. Para valores muy grandes de x, el 1 tiene muy poca influencia y $b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ es muy semejante a $b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a}x$. De modo formal, lo que significa es que $\lim_{x\to\infty} b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{b}{a}x = 0$. No te preocupes por esa condición, la entenderás en este mismo curso cuando estudiemos límites (aunque ya has estudiado esto con el cálculo de límites de sucesiones).

Lo que significa es que para valores muy grandes de x la función se aproxima a la recta. Para verlo, vamos a hacer una tabla con $b = 4$ y $a = 2$. En ese caso, la función es $y = 4\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$ y la recta $y = \frac{4}{2}x$, es decir $y = 2x$

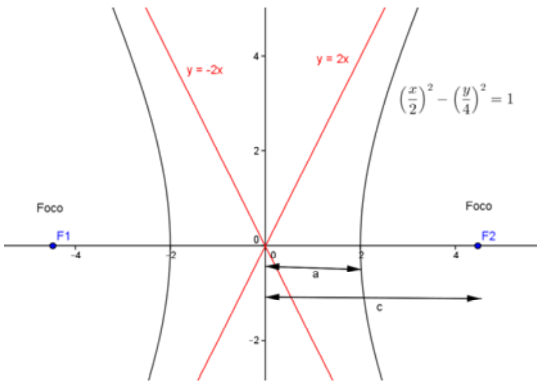
x	2	10	100	1000	5000
$y = 4\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$	0	19'59592	199'96	1999'996	9999'999
$y = 2x$	4	20	200	2000	10000
Diferencia (recta menos función)	4	0'404082	0'040004	0'004	0'0008

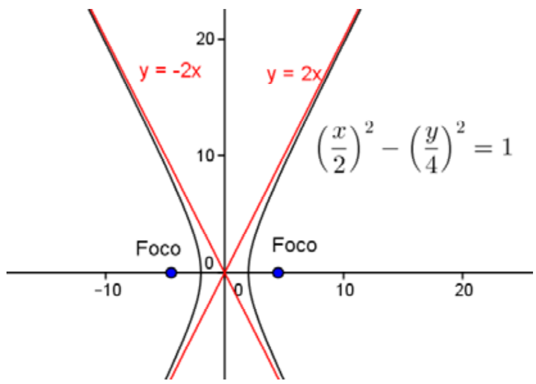
Observa que al crecer x la diferencia entre la recta y la hipérbola es cada vez más pequeña.

Lo mismo ocurre por el otro lado, con la recta $y = -\frac{b}{a}x$. Vamos a ponerle nombre a estas rectas.

Dada una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, las rectas $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ se llaman **asíntotas**

Una imagen vale más que mil palabras, así que vamos a ver un dibujo de una hipérbola con sus focos y asíntotas, desde cerca y desde lejos





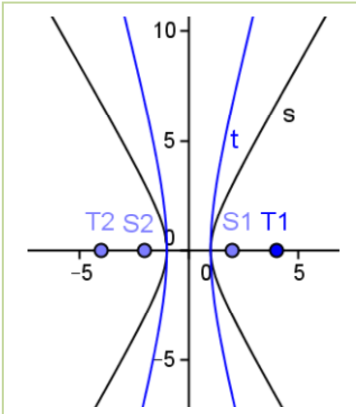
Como antes, la excentricidad la definimos al final. Es similar a la elipse pero ahora es mayor que uno.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Dada una hipérbola $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, se llama **distancia focal** a la distancia entre los dos focos, es decir $2c$. Se llama **excentricidad** al cociente $\frac{c}{a}$ y se suele representar con la letra e.

Algunas notas sobre la excentricidad y la distancia focal:

1. La excentricidad de una hipérbola es siempre mayor que 1, pues es $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$
2. El 1 no puede alcanzarse sin cambiar la definición. Si fuera uno, la hipérbola sería una recta horizontal.
3. Cuánto más pequeña sea la excentricidad, más curva es la hipérbola y más se parece a una recta horizontal. Cuánto más grande sea menos curva se vuelve y más se parece a dos rectas verticales paralelas.



En el dibujo puedes ver dos hipérbolas con centro en el origen y que pasan por $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ (es decir, $a = 1$). Las llamamos s y t. Sus focos son S_1 y S_2 para la s y T_1 y T_2 para la t.

Observa que, a medida que separamos los focos, la hipérbola se hace más vertical. La excentricidad aumenta también, es 2 en la s y 4 en la t.

En el límite, si la excentricidad es 1, nos quedamos con la recta horizontal $y = 0$ mientras que si se hace muy grande son las dos rectas paralelas $x = 1$ y $x = -1$. Naturalmente estos valores no pueden alcanzarse.

Actividades propuestas

41. Considera la hipérbola $x^2 - y^2 + 2y = 0$. Calcula:

a. Su ecuación reducida.
b. Su centro y focos.
c. Sus asíntotas.

42. Calcula todos los elementos de las hipérbolas siguientes y dibújalas.

a. $(x+1)^2 - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ b. $4x^2 - y^2 - 8x + 2y = 0$

43. Una hipérbola horizontal tiene centro en el (1, 2) y excentricidad 2. Sabiendo que pasa por el punto (4, 2), ¿cuál es su ecuación? [*Pista*: el parámetro a lo puedes sacar simplemente del dibujo].

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

3.3. Parábolas

Ahora vamos a suponer que A o B sean 0. Los dos a la vez no pueden ser, puesto que nos quedaría $Cx + Dy + E = 0$ que, como bien sabes, es una recta.

Vamos a hacer primero el caso B = 0. El otro es igual y simplemente vamos a ver las conclusiones.

La forma canónica viene de despejar la y. Es simplemente $y = \alpha x^2$. Por razones que veremos más adelante, suele llamarse $p = \frac{1}{2\alpha}$, o sea, $\alpha = \frac{1}{2p}$. De este modo, la parábola es $y = \frac{x^2}{2p}$.

Dado un número p positivo o negativo pero no nulo una **parábola** (vertical, con vértice en el origen) es el lugar geométrico dado por la ecuación $y = \frac{x^2}{2p}$.

Esta ecuación es una función y ya la has estudiado en cursos anteriores y además es un poco más sencilla, de modo que podemos ir un poco más deprisa que con la elipse y la hipérbola.

Lo primero que notamos es que, como bien sabes, la parábola no sólo es de la forma $y = \alpha x^2$ sino que tú ya has estudiado algunas del tipo $y = ax^2 + bx + c$, como funciones. Sabías también que el vértice estaba en $x = -\frac{b}{2a}$. En este capítulo lo estudiamos como lugar geométrico, pero sigue siendo lo mismo.

En primer lugar vamos a estudiarla como las otras cónicas e inmediatamente volveremos a esa ecuación. Al igual que en el caso de la elipse y la hipérbola, si es $y = \alpha x^2$ y hacemos un cambio de coordenadas $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$ tenemos la ecuación general, que viene dada directamente por $y - y_0 = \alpha(x - x_0)^2$.

Dado un número p positivo o negativo pero no nulo y un punto (x_0, y_0) llamado **vértice**, una **parábola** (vertical) es el lugar geométrico dado por la ecuación $y - y_0 = \frac{(x - x_0)^2}{2p}$. Esta ecuación a veces se llama **ecuación canónica** o **ecuación reducida**.

Del mismo modo que en la hipérbola, cambiando x e y tenemos $x - x_0 = \frac{(y - y_0)^2}{2p}$, una parábola horizontal.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Cómo reconocer una parábola. La parábola despejada

En general, cualquier ecuación del tipo $Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$ da una parábola vertical si D es distinto de 0. Análogamente, cualquier ecuación $By^2 + Cx + Dy + E = 0$ da una parábola horizontal si C es no nulo. El método es similar. Vamos a verlo para $Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$ pues antes hicimos el estudio para la otra.

1. Completamos el cuadrado de y para que quede $A(x - x_0)^2 + Dy + F = 0$.
2. Pasamos el primer término al otro lado $Dy + F = -A(y - y_0)^2$.
3. Dividimos por D y renombramos. Observa que si D es 0, no es una parábola [veremos en un ejercicio qué es]. $y + \frac{F}{D} = \frac{-A}{D}(x - x_0)^2 \Rightarrow y - y_0 = \frac{(x - x_0)^2}{2p}$

El caso que conoces es $y = ax^2 + bx + c$ o, lo que es lo mismo $ax^2 + bx - y + c = 0$, que corresponde a $A = a$, $C = b$, $D = -1$ y $F = c$. Merece la pena hacerlo aparte, para demostrar que el vértice es lo que ya habías visto en otros cursos.

Queremos poner $ax^2 + bx$ como un cuadrado más algo. Sacamos a factor común y tenemos:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right).$$

Como $\frac{b}{a}$ queremos que sea el doble del producto, buscamos $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Al hacer el cuadrado, tenemos:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = ax^2 + bx + a\frac{b^2}{4a^2} = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a}$$

Es decir, obtenemos la igualdad $ax^2 + bx = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$. Sustituyendo:

$$ax^2 + bx - y + c = 0 \Rightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} - y + c = 0.$$

Pasando al otro lado y arreglando un poco: $$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = y - \frac{b^2}{4a} - c.$$

Agrupando es: $$a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 = y - \left(\frac{b^2}{4a} + c\right).$$

Puedes comprobar fácilmente que llamando $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $p = \frac{1}{2a}$ e $y_0 = \frac{b^2}{4a} + c$ es la ecuación de la parábola.

Por tanto el vértice está en $x_0 = -\frac{b}{2a}$, como ya sabías.

Elementos de una parábola

Al igual que en las dos cónicas anteriores, la definición que te hemos dado no es la clásica. La definición usual es la que sigue.

Dado un punto F llamado **foco**, y una recta r llamada directriz, una **parábola** es el lugar geométrico de los puntos P que tienen la misma distancia al foco que a la directriz. En símbolos:

$$\boldsymbol{d(P, F) = d(P, r)}$$

Como siempre aparentemente no tiene nada qué ver con la definición que habíamos dado. Pero en este caso, consideramos que la demostración del hecho es lo bastante sencilla para hacerla aquí.

La parábola son los puntos que equidistan de una recta y de un foco. Una manera sencilla de demostrar la ecuación es tomar la recta como $r \equiv \{y = 0\}$ y el foco como el punto $(0,\ p)$. Luego veremos cómo transformarlo.

Dado un punto (x, y) con $y > 0$, su distancia a la recta $r \equiv \{y = 0\}$ es obviamente y (si fuera negativo sería $-y$ y en cualquier caso $|y|$).

La distancia entre los puntos (x, y) y $(0, h)$ es $\sqrt{x^2 + (y - p)^2}$. Planteando la ecuación queda $\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y|$. Elevando al cuadrado resulta $x^2 + (y - p)^2 = y^2$ (date cuenta que es la misma ecuación para valores positivos y negativos de y).

Basta arreglarlo un poco:

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 \Rightarrow 2py = x^2 + p^2$$

o, lo que es lo mismo

$$y = \frac{x^2}{2p} + \frac{p}{2}.$$

Esto es claramente una parábola.

Ahora bien, no es una ecuación reducida como en los otros casos. ¿Podemos poner una ecuación reducida? Sí, podemos, pero a costa de redefinir la recta y hacerlo menos intuitivo.

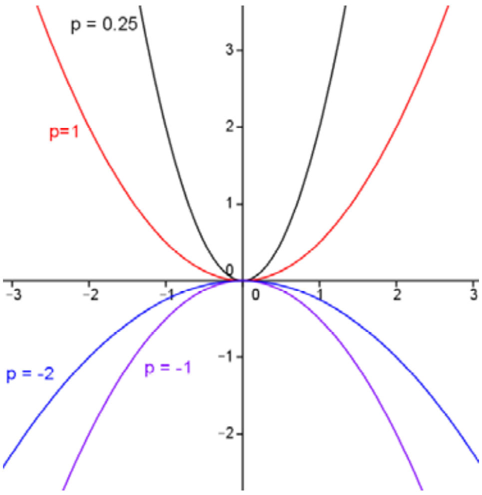
Despejando la x^2 tenemos $2p\left(y - \frac{p}{2}\right) = x^2$.

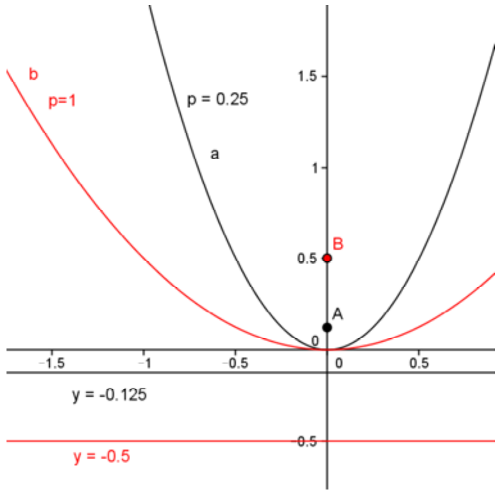
Definiendo $y' = y - \frac{p}{2}$ tenemos la ecuación reducida $2py' = x^2$ o $y' = \frac{x^2}{2p}$ o $y' = \alpha x^2$.

Como siempre, recapitulemos:

1. La parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado foco y una recta llamada directriz.
2. Haciendo cambios de coordenadas la parábola acaba siendo de la forma $y = \alpha x^2$. Si definimos $p = \dfrac{1}{2\alpha}$ entonces p es la distancia entre el foco y la directriz.
3. En la ecuación $y = \dfrac{x^2}{2p}$, p puede ser positivo (y la parábola tiene ramas hacia arriba) o negativo (y la parábola tiene ramas hacia abajo). Cuanto más cercano esté a 0, más plana es la parábola y cuánto más lejano, más apuntada.

Mostramos a continuación varias parábolas, con diferentes valores de *p*. A la izquierda, sólo la parábola y a la derecha dos parábolas a y b con focos (en A y B) y directrices.





Actividades propuestas

44. El vértice de una parábola vertical con las ramas hacia arriba es el punto (2, –1). Sabiendo que pasa por el punto (1, 0) escribe la ecuación de la parábola, dibújala y calcula su foco.

45. Identifica las figuras y dibújalas calculando su foco o focos.

a. $2y^2 + 3x = 0$ b. $\dfrac{(x+1)^2}{9} - \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$

46. Identifica las figuras y dibújalas. En el caso de la hipérbola, calcula sus asíntotas.

a. $\dfrac{(x+1)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$ b. $\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

3.4. Cónicas generales

En este epígrafe vamos a generalizar un poco el concepto de cónica. Te habrás fijado en que todas las cónicas que hemos visto aparecen en horizontal o en vertical. ¿Qué ocurre, que no hay elipses en diagonal? Por supuesto que las hay, pero su estudio es bastante más complicado y no vamos a poder demostrar todos los resultados como hacíamos antes. Sin embargo, creemos que es interesante que, incluso sin demostración, veas cómo se construirían.

Vamos a empezar por la definición general de una cónica y de sus ejes.

Una **cónica** es el lugar geométrico dado por la ecuación $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E + Fxy = 0$.

Puede demostrarse (esto sí que no lo vamos a hacer) que sólo puede ser cuatro lugares geométricos:

1. Una **elipse**, es decir el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos llamados focos es constante. Dichos focos pueden estar en CUALQUIER PARTE.
2. Una **hipérbola**, es decir el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos llamados focos es constante. Como antes, los focos pueden estar en cualquier sitio.
3. Una **parábola**, es decir el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto llamado foco es igual a su distancia a una recta llamada directriz. La única restricción es que el foco NO está sobre la directriz.
4. Un **caso degenerado**. En Matemáticas se llama caso degenerado a una situación límite. En este contexto, casos degenerados son un punto (como $x^2 + y^2 = 0$ que da $(0, 0)$), una recta (como $y^2 = 0$ que da la recta $y = 0$) o dos rectas, como $x^2 - y^2 = 0$ que da las rectas $x - y = 0$, $x + y = 0$. Estos casos no se suelen considerar.

Así pues, cónicas no degeneradas son sólo la elipse (considerando la circunferencia como elipse con focos que coinciden), la hipérbola y la parábola. No se añaden figuras nuevas al añadir un término en xy.

Dicho esto, continuemos con definiciones generales. A partir de ahora, cónica significa cónica no degenerada salvo que digamos específicamente lo contrario.

Elementos de la elipse y la hipérbola generales

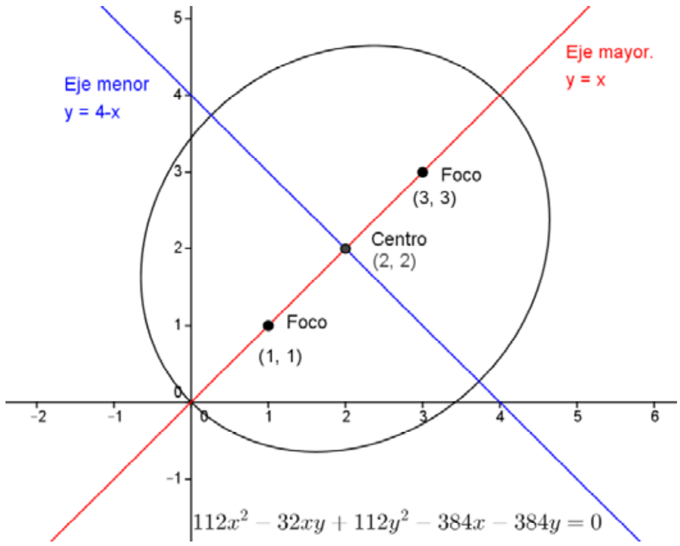
Para la elipse y la hipérbola, se definen los siguientes elementos:

1. **Eje mayor** es la recta que une sus focos.
2. **Centro** es el punto medio de sus focos.
3. **Eje menor** es la recta perpendicular al eje mayor que pasa por el centro. En la hipérbola, es habitual llamar a los ejes mayor y menor, eje real y eje imaginario respectivamente.
4. El parámetro $\boldsymbol{c}$ es la mitad de la distancia entre los focos.
5. El parámetro $\boldsymbol{a}$ es la mitad de la distancia de referencia. Para la elipse es la mitad de la suma de las distancias a los focos y para la hipérbola la mitad de la diferencia.
6. El parámetro $\boldsymbol{b}$ se define a partir de a y c como $b^2 = a^2 - c^2$ en la elipse y $b^2 = c^2 - a^2$ en la hipérbola.

Si hay término en xy, los ejes pueden ser rectas de cualquier dirección. El estudio general de estas cónicas nos llevaría muy lejos de los contenidos de este curso, así que las dibujaremos con ordenador.

Ejemplo:

- Utilizando el programa *Geogebra*, vamos a dibujar una elipse general. Necesitamos dos focos y la distancia $2a$. Una manera de dar estas tres cosas (que es la que usa *Geogebra*) es fijar primero los dos focos y poner un punto. Una vez tenemos dos focos, $2a$ es la suma de las distancias a ese punto y ya tenemos todos los elementos. *Geogebra* nos calcula la ecuación (podríamos hacerla con la definición, pero es muy complicado). Vamos sólo a esbozarla.



Vamos a poner los focos en (1, 1), (3, 3) y a hacerla pasar por el (0, 0). Puedes ver a continuación el dibujo que hace *Geogebra*. La ecuación, que también calcula, la mostramos abajo.

Observa que aparece un término en xy. Esa ecuación también podríamos haberla deducido de la definición.

En efecto, si un foco está en (1, 1), el otro en (3, 3) y pasa por el (0, 0) sus distancias respectivas son $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ y $\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$.

Por tanto, sumando es $2a = 4\sqrt{2}$

La ecuación, por definición, sería:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=4\sqrt{2}.$$

No abusaremos de tu paciencia desarrollándola pero créenos, al final sale la de *Geogebra*,

$$112x^2 - 32xy + 112y^2 - 384x - 384y = 0.$$

Elementos de la parábola general

Para la parábola, se definen:

1. **Eje de simetría** es la recta que pasa por el foco y es perpendicular a la recta directriz.
2. **Vértice** es el punto donde la parábola corta al eje de simetría. Es también el punto de la parábola que está más próximo a la recta directriz.
3. El parámetro $\boldsymbol{p}$ es la distancia entre el foco y la recta directriz.

Al igual que en la elipse y la hipérbola, si no hay término en xy la parábola es vertical o es horizontal. Si lo hay, entonces el eje de simetría puede ser cualquier recta.

Observa que si hay término en xy también puede haberlo en x^2 e y^2 A LA VEZ.

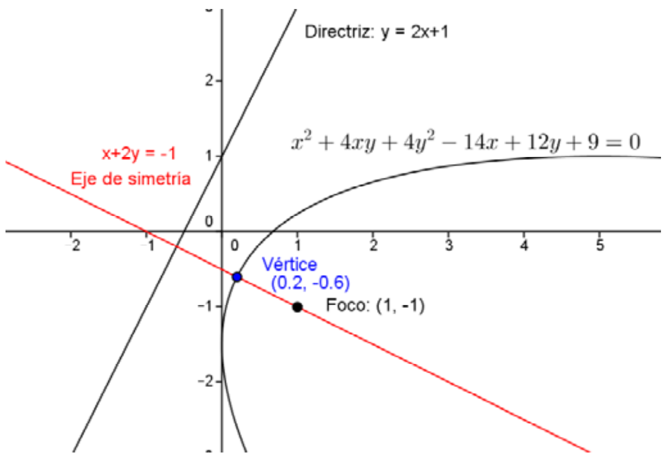
Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Ejemplo:

- Como antes vamos a usar *Geogebra* para dibujar, en esta ocasión, una parábola. Pondremos la directriz en $y = 2x + 1$ y el foco (1, –1), ambas cosas por ninguna razón en especial.

Con el foco y la directriz, *Geogebra* ya nos calcula la parábola.

De este ejemplo podemos sacar un par de observaciones que son interesantes.



1. En primer lugar la parábola tiene elemento en x^2, en y^2 y en xy. Eso es general. Si aparece el término en xy, siempre aparecen los dos. Y al revés, si no aparece xy, entonces o bien falta x^2 (y la parábola es horizontal) o bien falta y^2 (y la parábola es vertical).
2. En segundo lugar, la directriz es $y = 2x + 1$ y el eje de simetría $x + 2y = -1$. Si calculas los vectores directores, resultan ser $\overrightarrow{(1, 2)}$ y $\overrightarrow{(2, -1)}$ con lo que, como nos dice la teoría, las dos rectas son perpendiculares. De hecho, hemos calculado el eje de simetría (con *Geogebra*) como la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.

Como antes, podríamos haber calculado la ecuación a mano. Si la recta directriz es $y = 2x + 1$ puede expresarse como $-2x + y - 1 = 0$.

La distancia de un punto genérico (x, y) a la recta es sustituirlo dividiendo por el módulo del vector de coeficientes: $d(P, r) = \left| \dfrac{-2x + y - 1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} \right|$.

Por otro lado, la distancia de un punto genérico (x, y) al foco (1, –1) es $\boldsymbol{d(P, F)} = \sqrt{(x-1)^2 + [y-(-1)]^2}$.

Igualando las dos distancias (y operando un poco) se obtiene $\left| \dfrac{-2x + y - 1}{\sqrt{5}} \right| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}$.

Para quitar el valor absoluto y la raíz se eleva al cuadrado.

$$\frac{1}{5}(-2x + y - 1)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2$$

Una vez más, no vamos a abusar de tu paciencia desarrollando esta expresión. Pero te damos nuestra palabra de que al final queda la parábola de *Geogebra*:

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 14x + 12y + 9 = 0.$$

Actividades propuestas

47. Dibuja con *Geogebra* o cualquier programa equivalente las siguientes cónicas. En función del dibujo, clasifícalas en elipses, parábolas o hipérbolas.

a. $x^2 + 3xy = 3$

b. $2x^2 + 4xy + y^2 = 1$

c. $x^2 + 2xy + y^2 - 3y = 0$

d. $3x^2 - 6xy + y^2 - 2x = 0$

e. $x^2 - 2xy - y^2 + 4 = 0$

f. $4x^2 + xy + y^2 - 2 = 0$

48. Dibuja con *Geogebra* o un programa equivalente las siguientes elipses y calcula sus ejes mayor y menor. ¿Serías capaz de calcular su excentricidad? [*Pista*: hazlo con el ordenador, cortando la elipse con la recta focal].

a. Una elipse con focos en (1, 3) y en (3, 1), que pasa por el origen.

b. Una elipse con focos en (–1, 0) y en (–5, 2) que pasa por el (–1, 2).

49. Dibuja, con *Geogebra* o un programa equivalente las siguientes hipérbolas y calcula sus ejes mayor y menor.

a. Una hipérbola con focos en (1, 3) y en (3, 1) que pasa por el (2, 0).

b. Una hipérbola con focos en (–1, 0) y en (–5, 2) que pasa por el (–1, 2).

50. Dibuja, con *Geogebra* o un programa equivalente las siguientes parábolas y calcula su eje de simetría y su vértice.

a. Una parábola con foco en (1, 3) y recta directriz $y = x$.

b. Una parábola con foco en (–1, 1) y recta directriz $3x+y = 4$.

3.5. La hipérbola equilátera

Sin lugar a dudas la mayor aplicación de las cónicas con ejes girados es la hipérbola equilátera. La hipérbola equilátera es un caso particular de hipérbola que tiene una ecuación muy simple si los ejes los giramos.

Pero vamos a empezar por el principio. Recuerda que la fórmula de una hipérbola es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Una hipérbola se dice **equilátera** si $a = b$. En tal caso, su ecuación reducida es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Ya que estamos viendo cónicas generales, vamos a dar algunas condiciones que se apliquen fácilmente aunque nos aparezca girada. En la hipérbola $c^2 = a^2 + b^2$.

Pero si es equilátera entonces $a = b$ por lo que $c^2 = 2a^2$ es decir $c = \sqrt{2}a$. Y si calculamos la excentricidad tenemos $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$

Finalmente, recordemos las asíntotas. De $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$, al despejar y tenemos $y = \pm a\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ que son las rectas $y = x$ e $y = -x$. Estas dos rectas son perpendiculares, pues sus vectores de dirección son $\overrightarrow{(1, 1)}$ y $\overrightarrow{(1, -1)}$.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Recapitulemos las condiciones

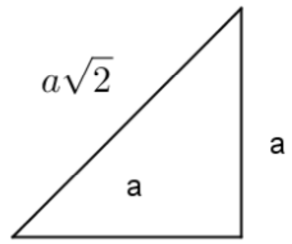
Una hipérbola es **equilátera** si se cumple cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes:

1. $a = b$
2. $c = a\sqrt{2}$
3. Su excentricidad es $\sqrt{2}$
4. Sus asíntotas son perpendiculares.

La hipérbola equilátera más sencilla es aquella que tiene sus focos en la recta $y = x$ y las asíntotas son los ejes coordenados. La vamos a construir girando los ejes.

Comencemos con una hipérbola equilátera horizontal. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$. Vamos a girarla. Sabemos $c = a\sqrt{2}$ por lo que sus focos están en $\left(a\sqrt{2}, 0\right)$ y en $\left(-a\sqrt{2}, 0\right)$. Es decir la distancia entre los focos es $2a\sqrt{2}$.

Si queremos que la distancia al origen sea $a\sqrt{2}$ entonces tenemos que poner el foco en (a, a) para que nos salga un triángulo como el de la figura.



Ponemos pues un foco en (a, a) y entonces el otro tiene que ser $(-a, -a)$

Mantenemos la distancia 2a. Entonces la ecuación de la hipérbola es:

$$\sqrt{(x+a)^2 + (y+a)^2} - \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} = 2a$$

Si la desarrollamos (apéndice IV) la ecuación final que aparece es $xy = \frac{a^2}{2}$. A veces se escribe como $xy = k$, llamando $k = \frac{a^2}{2}$ o, despejando y, como $y = \frac{k}{x}$.

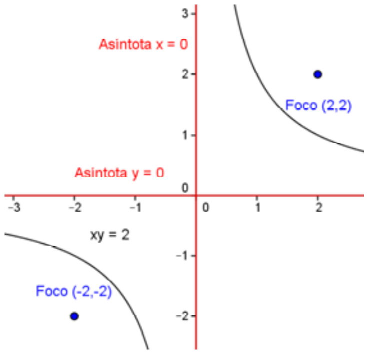
Ejemplo:

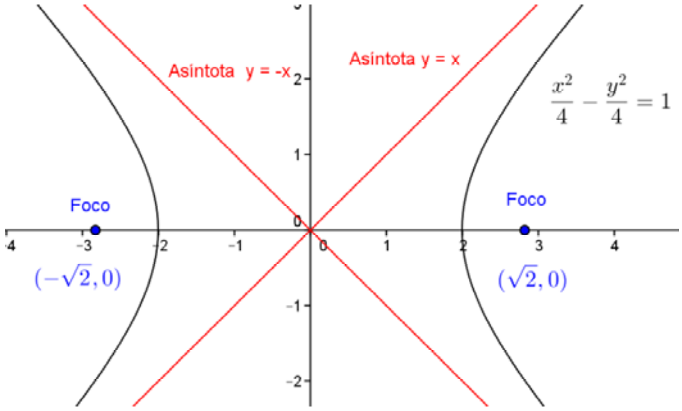
- *Vamos a construir la hipérbola equilátera para* $a = 2$.

En horizontal será $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$, es decir $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4}$ y en vertical $xy = \frac{2^2}{2}$ o $xy = 2$. Los focos ya hemos visto que son $\left(2\sqrt{2}, 0\right)$ y $\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$ para la primera y $(2, 2)$ y $(-2, 2)$ para la segunda.

En las dos siguientes figuras puedes ver la misma hipérbola en horizontal y en vertical.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF





Actividad resuelta

- *La ecuación $xy = 8$ representa una hipérbola equilátera. Calcula sus focos, su recta focal, sus asíntotas, sus parámetros a, b y c y su excentricidad.*

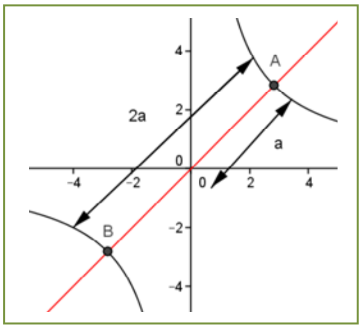
Solución:

En primer lugar, al ser una hipérbola equilátera, muchos de esos parámetros ya están determinados. La recta focal es $y = x$, las asíntotas son $x = 0$ e $y = 0$ y su excentricidad es $\sqrt{2}$.

Para calcular sus focos, necesitamos el parámetro a. Se puede calcular de dos formas distintas.

En primer lugar, si recordamos la fórmula $xy = \frac{a^2}{2}$ entonces $8 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow a = 4$.

Otra manera es porque la distancia entre los dos puntos más próximos de la hipérbola es $2a$. Cortamos la hipérbola por la recta focal $y = x$. La solución del sistema $\begin{cases} xy = 8 \\ y = x \end{cases}$ nos da las soluciones $A = \left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ y $B = \left(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)$ que aparecen en la figura.



Si calculamos la distancia de cualquiera de ellos al origen tenemos a. Es fácil calcularla $d[A,(0, 0)] = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$.

En cualquiera de los casos, $a = 4$. Por ser la hipérbola equilátera $b = a = 4$. La excentricidad es $\sqrt{2}$ luego $c = 4\sqrt{2}$. Otra manera de verlo es porque $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$.

Finalmente los focos están a distancia c del origen y tienen las coordenadas iguales. Por tanto, el positivo debe ser de la forma (e, e). Haciendo $\sqrt{e^2 + e^2} = 4\sqrt{2}$ tenemos $e = 4$. Los focos son, por tanto, (4, 4) y (–4, –4)

Actividades propuestas

51. Calcula los focos y los parámetros a, b y c de las siguientes hipérbolas equiláteras y dibújalas:

a. $xy = \frac{9}{2}$ b. $xy = 32$ c. $xy = 24$ d. $xy = 1$

52. Calcula la ecuación de la hipérbola equilátera que tiene por focos $(2, 2)$ y $(-2, \ \ 2)$, así como sus parámetros a y b y su excentricidad. Dibújala.

CURIOSIDADES. REVISTA

Las antenas parabólicas

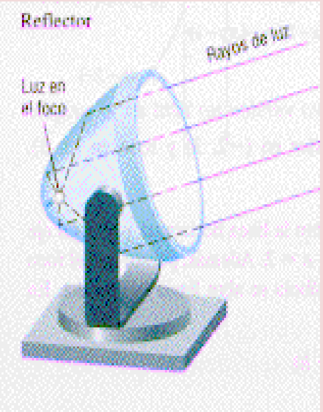
De todas las palabras raras que hemos visto en este tema, posiblemente la que hayas visto más frecuentemente en la vida diaria haya sido la parábola.

Y es que es muy posible que en tu casa (o la de tus vecinos) haya una antena parabólica. ¿Y qué es una antena parabólica? Pues una antena que tiene (¡oh, sorpresa!) forma de parábola. Más exactamente, como una parábola es una figura plana y la antena es en tres dimensiones, es la figura que se obtiene al girar una parábola (el nombre técnico es paraboloide).

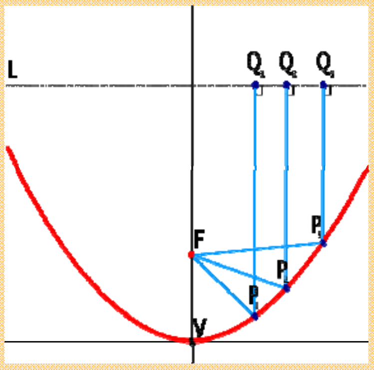
La razón por la que se hacen las antenas de esa manera es porque la parábola tiene una propiedad muy curiosa. Cualquier rayo que llegue paralelo a su eje de simetría se refleja en el foco.

Si las ondas de TV (o radio o luz) llegan desde muy lejos, son aproximadamente rayos paralelos. Y de este modo todos se reflejan en el foco. Por tanto basta poner un receptor en el foco y recibiremos toda la señal. Si te fijas en la figura, una antena tiene únicamente un receptor, situado en su foco.

Una aplicación algo menos conocida del mismo principio son los faros de los coches. El faro tiene forma de parábola. Se pone una luz en el foco y automáticamente, se emiten rayos paralelos hacia delante.



Un foco de luz. Fuente: http://rabfis15.uco.es/lvct/tutorial/39/Parabolicos.htm



Rayos reflejándose en una parábola.

Fuente: Wikipedia

Una antena parabólica

Fuente: modificación propia de un original del Banco de imágenes de INTEF)

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

La recta de *Euler* y la circunferencia de *Feuerbach*

Uno de los hechos más sorprendentes de las Matemáticas es el hecho de que se sigan descubriendo cosas sobre objetos matemáticos que parecían ya agotados.

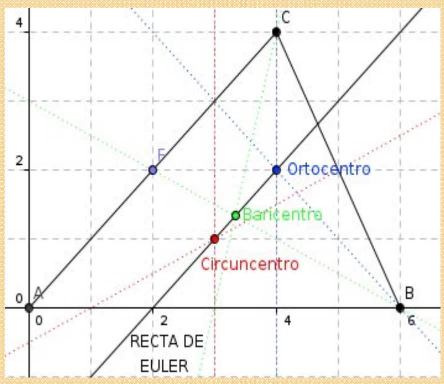
Posiblemente la figura geométrica más simple sea el triángulo, que son simplemente tres puntos no alineados. Lleva siendo estudiado desde la antigüedad. Ya conoces sus cuatro centros (ortocentro, circuncentro, baricentro e incentro).

Lo que quizás no sepas es que los tres primeros (ortocentro, circuncentro y baricentro) SIEMPRE están en la misma recta. Esta recta se conoce como **recta de *Euler*** en honor a su descubridor, el matemático suizo del siglo XVIII *Leonhard Euler*.

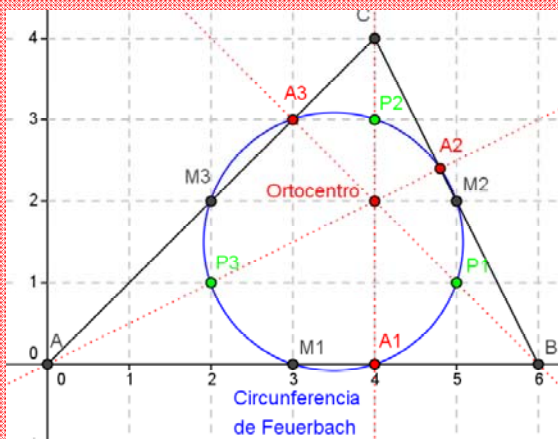
Otra figura notable que se puede construir a partir de un triángulo no es una recta sino una circunferencia. Si tomas los puntos medios de los lados y los pies de las alturas, estos seis puntos están sobre una circunferencia. Se llama circunferencia de *Feuerbach* por *Karl Wilhelm Feuerbach*, matemático alemán del siglo XIX.

Puede probarse además que esta circunferencia divide en dos partes iguales a los segmentos que unen al ortocentro con los vértices. Vale que esto ya es un poco más cogido por los pelos, pero reconoce que el hecho de pasar por los otros seis puntos es notable.

Por cierto, la recta de *Euler* TAMBIÉN pasa por el centro de la circunferencia de *Feuerbach*, ¡cosas de la Matemática…!



Hemos dibujado en el triángulo de vértices A = (0, 0), B = (6, 0) y C =(4, 4) las dos figuras. Un ejercicio que puedes hacer es calcular la recta y la circunferencia (con *Geogebra* o programa similar o con papel y boli)



M_1, M_2 y M_3 son los puntos medios de los lados, A_1, A_2 y A_3 son los pies de las alturas y P_1, P_2 y P_3 los puntos medios entre el ortocentro y los vértices

Otro ejercicio curioso que puedes hacer es, con *Geogebra* o programa similar, hacer las construcciones y luego mover los vértices del triángulo. Observarás que el triángulo se distorsiona, pero la recta de *Euler* sigue siendo recta y la circunferencia de *Feuerbach* sigue siendo circular.

RESUMEN

		Ejemplos
Vector	Par $\overrightarrow{(a,b)}$ que representa un desplazamiento.	P=(1,1), Q= (2,-1), $\overrightarrow{PQ}=(1,-2)$
Producto escalar	Número que se calcula multiplicando las componentes de dos vectores: $\vec{v}\cdot\vec{w}=v_1w_1+v_2w_2$	$\overrightarrow{(1,2)}\cdot\overrightarrow{(1,-3)}=1\cdot1+2(-3)=-5$
Módulo de un vector	Longitud del desplazamiento que representa el vector: $\lvert\vec{v}\rvert=\sqrt{v_1^2+v_2^2}$.	$\left\lVert\overrightarrow{(1,3)}\right\rVert=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$
Ángulo entre vectores	$\cos\alpha=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\lVert\vec{v}\rVert\cdot\lVert\vec{w}\rVert}$	$\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{(1,2)}\cdot\overrightarrow{(1,-3)}}{\lVert(1,2)\rVert\lVert(1,-3)\rVert}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}$
Recta	Son los puntos que se pueden alcanzar sumándole a un punto un vector. Puede estar en forma vectorial, paramétrica, continua, punto - pendiente, implícita o explícita.	$(x,y)=(1,1)+\lambda(2,-3)$; $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{-3}$ $x+2y=4$; $y=-\dfrac{x}{2}+2$
Distancia de un punto a una recta	$d(P,r)=\left\lvert\dfrac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right\rvert$	r: $3x+4y=7$; $P(1,2)$; $d(P,r)=\left\lvert\dfrac{3\cdot1+4\cdot2-6}{\sqrt{3^2+4^2}}\right\rvert=\dfrac{5}{5}=1$
Lugar geométrico	Puntos del plano que verifican una ecuación	$x+y=3$, $x^3-3y^2=1$
Circunferencia	Lugar geométrico de los puntos que equidistan de un centro. Su ecuación es $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$	Circunferencia de radio 4 y centro (0, 2): $x^2+(y-2)^2=16$
Elipse	Lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante. Su ecuación canónica es $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(x+1)^2}{4}+y^2=1$
Hipérbola	Lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (llamados focos) es constante. Su ecuación es $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. Si $a=b$ se llama **hipérbola equilátera.** En ese caso su ecuación es $y=\dfrac{k}{x}$	$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$ $xy=10$
Parábola	Lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto llamado foco y una recta llamada directriz. Su ecuación es $y-y_0=\alpha(x-x_0)^2$	$y=x^2+1$ (vertical) $x-2=(y-1)^2$ (horizontal)

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Vectores

1. Dados los puntos $P=(2,-2)$, $Q=(1,1)$ y $R=(0,-2)$ y los vectores $\vec{v}=\overrightarrow{(2,-1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(1,0)}$ calcula, indicando si son puntos o vectores:

a. $\overrightarrow{PQ}$ c. $2\vec{v}-\vec{w}$ e. $\vec{v}-\overrightarrow{RQ}$

b. $Q+\overrightarrow{PQ}-\vec{w}$ d. $R+\vec{v}$ f. $\overrightarrow{QP}-2\vec{w}$

2. Dados los puntos $P=(2,2)$, $Q=(1,0)$ y $R=(-2,3)$ y los vectores $\vec{v}=\overrightarrow{(1,-1)}$, $\vec{w}=\overrightarrow{(0,-2)}$, calcula, indicando si son puntos o vectores:

a. $\overrightarrow{QP}$ c. $3\vec{v}-2\vec{w}$ e. $\vec{v}-\overrightarrow{RP}$

b. $R+\overrightarrow{PQ}+\vec{w}$ d. $P+\vec{v}$ f. $P+\overrightarrow{QP}-2\vec{v}$

3. Calcula el módulo del vector que une $P=(1,3)$ y $Q=(4,-3)$, ¿qué relación tiene con la distancia entre los puntos?

4. Divide el segmento formado por los puntos $P=(1,3)$ y $Q=(4,-3)$ en tres partes iguales.

5. Calcula una base ortogonal que contenga al vector $(1,-4)$.

6. Calcula una base ortonormal que contenga a un vector paralelo a de $\vec{v}=(-2,3)$

7. Calcula un vector perpendicular a $\overrightarrow{(1,-2)}$ y que tenga módulo 4.

8. Tres puntos de un rombo $ABCD$ son A = (2, 1), B = (4, 5) y C = (2, 9). Calcula:

a. El ángulo que corresponde al vértice A.

b. El perímetro (suma de lados) del rombo.

c. El punto D.

9. Calcula el ángulo que forman las diagonales del rectángulo $ABCD$ siendo A = (1, 2), B = (1, 8), C = (4, 8). [El punto D puedes calcularlo].

Rectas

10. Calcula la recta que es paralela a $r\equiv\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}$ y pasa por el punto $(0,1)$. Exprésala al menos en tres formas y dibújala.

11. Calcula la recta que es paralela a $r\equiv 2x-3y=0$ y pasa por el punto $(1,2)$. Exprésala al menos en tres formas y dibújala.

12. Calcular una recta perpendicular a $r\equiv y=2x-1$ que pase por $(2,-1)$. Exprésala al menos en tres formas y dibújala.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

13. Sean las rectas $r \equiv (1, 1) + \lambda(-1, 2)$ y $s \equiv x + y = 3$. Estudia su posición relativa y calcula sus puntos de corte si los hubiera.

14. Sean las rectas $r \equiv (0, -2) + \lambda\overrightarrow{(1, 4)}$ y $s \equiv 4x - y - 2 = 0$. Estudia su posición relativa y calcula sus puntos de corte si los hubiera.

15. Consideremos la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{3}$.

a. Calcula su pendiente.

b. ¿Pertenece el punto $(0, 5)$ a la recta? ¿Y el $(1, 3)$?

c. Da al menos tres puntos de la recta.

d. Dibuja la recta.

16. Consideremos la recta $y - 2x = 1$

a. Calcular su pendiente y vector director.

b. Dar una recta perpendicular a ella que pase por (1, 2). Exprésala en al menos cuatro formas.

17. Sean los puntos A = (1, 2) y B = (3, 0)

a. Calcula el vector que los une.

b. Calcula la recta que pasa por ambos y exprésala en tres formas distintas.

c. ¿Pertenece el punto (2, 1) a la recta?, ¿y el (3, 1)?

18. Sea la recta $r \equiv y = x - 2$.

a. Calcula una recta perpendicular a ella y pase por (2, 1).

b. Calcula una recta que pase por (–1, 3) y sea paralela a r.

19. Halla la posición relativa de las rectas $x + y = 0$ y $s \equiv (x, y) = (1, 2) + \lambda\overrightarrow{(1, 1)}$ así como el ángulo que forman.

20. Calcula la distancia del punto (2, –1) a la recta $y + x = 1$.

21. Calcula la distancia al origen de las siguientes rectas:

a. $(x, y) = (1,1) + \lambda\overrightarrow{(1,2)}$ b. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3}$ c. $y = 2x + 3$

22. Calcula la distancia al punto (1, –2) de las siguientes rectas.

a. $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$ b. $2x + y = 3$

23. Sea la recta $s : x - 2y + 1 = 0$

a. Calcula una recta que sea perpendicular a ella y pase por (1, 1).

b. Calcula una recta que pase por (0, 1) y sea paralela a s.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

24. Halla la posición relativa de las rectas $r: \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{-1}$ y $s: (x, y) = (1, -2) + \lambda(1, 1) = 0$ así como el ángulo que forman.

25. Tres puntos de un rectángulo $ABCD$ son A = (2, 1), B= (0, 7) y D = (5, 2). Se pide:

a. Comprobar que el ángulo B es de 90º.

b. Calcular las longitudes de los lados AB, CD y de la diagonal BD, del rectángulo.

c. Calcular el punto C.

26. Calcula la distancia del punto (1, 4) a la recta $y - x = 1$

27. Tres puntos de un triángulo son A = (2, 1), B = (2, 8) y C = (4, –1). Calcular sus lados y ángulos.

28. Sea la recta $s: x + \mathrm{y} = 4$.

a. Calcula una recta perpendicular con ella y pase por (1, 1).

b. Calcula la distancia de esa recta al punto (2, 3).

29. Halla la posición relativa de las rectas $r: 3\mathrm{x} + \mathrm{y} = 5$ y $s: (x, y) = (1, -2) + \lambda(-1, 3) = 0$ así como el ángulo que forman.

30. Calcula la recta perpendicular a $y = 2x - 4$ que pase por el punto medio de A = (1, 3) y B = (3,-1)

31. En un paralelogramo $ABCD$ vienen dados por A = (1, 1), B = (2, 3) y C = 3, –1).

a. Calcula el ángulo B (entre BA y BC).

b. Calcula la ecuación de la recta que pasa por A y C (la diagonal del paralelogramo).

c. Calcula el perímetro de la figura.

d. Calcula el punto D.

32. Ya sabes que la mediatriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos puntos dados. Escribe la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos A = (2, 5) y B = (4, –1).

33. Recordemos que el circuncentro de un triángulo es el punto de corte de las mediatrices de sus lados. Calcula el circuncentro del triángulo A = (1, 2), B = (1, 6) y C = (3, 8) escribiendo las ecuaciones de las tres mediatrices.

34. Recordemos que el baricentro de un triángulo es el punto de intersección de las medianas (la mediana es la recta que va desde un vértice al punto medio del lado opuesto). Sabiendo esto, calcula el baricentro del triángulo A = (–2, 2), B = (1, 4) y C = (1, 0), escribiendo las ecuaciones de las tres medianas.

35. Ya sabes que la bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados del ángulo. Escribe la ecuación de la bisectriz del ángulo formado por las rectas $y = 2x + 3$, y $3x + 5y = 1$. ¿Cuántas hay? ¿Cómo son?

Cónicas

36. Calcula la circunferencia que pasa por el punto A = (1, 1) y tiene por centro a C = (–1, 3)

37. Identifica las figuras y dibújalas

a. $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(y+1)^2}{9}=1$

c. $\frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y-1)^2}{2^2}=1$

b. $y^2-2x=0$

d. $x^2-2x+y^2=0$

38. Calcula la circunferencia que pasa por los puntos A = (1, 4), B = (3, 4) y C = (5, 5).

39. Calcular la ecuación de una hipérbola con centro en (–1, 1) y radios 8 y 5. Dibuja dicha hipérbola

40. Identifica las figuras y dibújalas. Calcula el foco o focos.

a. $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

b. $y^2-2x=1$

c. $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

d. $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$

41. Identifica las figuras y dibújalas.

a. $x^2+2y^2-4x=0$

b. $x^2-y^2+2y=0$

42. Calcula la circunferencia que pasa por A = (1, 4), B = (3, 6) y cuyo centro es su punto medio.

43. Considera la hipérbola equilátera $xy=50$. Calcula sus focos, excentricidad y asíntotas y dibújala.

44. Dibuja con *Geogebra* o cualquier programa equivalente las siguientes cónicas. En función del dibujo, clasifícalas en elipses, parábolas o hipérbolas.

a. $x^2-3xy=2$

c. $x^2+xy+y^2-y=0$

e. $2x^2-4xy+y^2+4=0$

b. $x^2-2xy+2y^2=1$

d. $3x^2-6xy+4y^2-2x=0$

f. $4x^2+xy+y^2-2=0$

45. Una elipse tiene focos en (1, 1) y en (4, 1) y pasa por el punto (1, 0). Calcula su ecuación y dibújala. ¿Cuánto vale su excentricidad?

46. Una elipse tiene por centro el punto (1, –1) y pasa por los puntos (5, –1) y (1, 1). Sabiendo que su radio mayor es 4:

a. Da su ecuación y dibuja la elipse.

b. Calcula sus focos y excentricidad.

47. Una hipérbola equilátera con centro el origen pasa por el punto (1, 3). Calcula sus focos y dibújala.

48. Sabiendo que las asíntotas de una hipérbola son $y=2x$ e $y=-2x$ y que pasa por el punto (2,0) calcular la ecuación de dicha hipérbola.

49. Una hipérbola equilátera tiene como ecuación $xy=50$. Calcula sus focos.

AUTOEVALUACIÓN

1. Comenzamos en el punto (1, 1) y nos movemos primero con el vector $\vec{v} = (1,-3)$ y después con el vector $\vec{w} = (-4,5)$.

   a. ¿En qué posición estamos al final?

   b. Si quisiéramos hacer los dos pasos en uno, ¿qué vector seguiríamos?

2. Dados los puntos $P = (2, 2)$, $Q = (1, 0)$ y el vector $\vec{v} = \overrightarrow{(1, -1)}$, calcula, indicando si son puntos o vectores:

a. $\overrightarrow{QP}$ b. $2\overrightarrow{PQ} + 3\vec{v}$ c. $P + 2\vec{v}$

3. Realiza las siguientes operaciones:

a. $\overrightarrow{(1, 2)} \cdot \overrightarrow{(1, -2)}$ b. $(2, -3) \cdot [(0, 2) - (1, -1)]$

4. Calcula la recta que es paralela a $r \equiv 2x + y = 5$ y pasa por el punto $(2, -1)$. Exprésala al menos de cuatro formas, calcula su pendiente y dibújala.

5. Calcula el ángulo entre las rectas $r \equiv x + 2y = 5$ y $y = x + 3$

6. Sean las rectas $r \equiv (1, 2) + \lambda(-1, 2)$ y $s \equiv y - 2 = -2(x + 1)$. Estudia su posición relativa y calcula sus puntos de corte si los hubiera.

7. Calcula la distancia del punto (1, 3) a la recta $(x, y) = (2, 2) + \lambda\overrightarrow{(1, -1)}$ e interpreta el resultado

8. Consideremos el triángulo ABC rectángulo en B e isósceles. Si A = (2, 1) y B = (1, 4), calcula:

   a. El vértice C (hay dos soluciones posibles).

   b. Los otros dos ángulos del triángulo.

   c. El área y el perímetro del triángulo.

9. Tres puntos de un triángulo son A = (1, 1), B = (3, 3) y C = (5, 2). Calcula sus lados y ángulos.

10. Calcula la circunferencia que pasa por los puntos A = (4, 5), B = (–3, 4) y C = (6, 1).

11. Calcula la ecuación de una elipse horizontal con centro en (–1, 3) y radios 2 y 4. Calcula sus focos y dibujarla. ¿Cómo cambiaría la respuesta si la elipse fuera vertical?

12. Dibuja la hipérbola $4x^2 - 8y^2 = 2$ y sus asíntotas. Calcula sus focos y excentricidad.

13. Identifica las figuras y dibújalas

   a. $4x^2 + 3y^2 - 8x = 0$

   b. $\dfrac{(x-1)^2}{4} - y^2 = 2$

   c. $x^2 + 2x + 1 - 3y = 0$

   d. $4x^2 - 8x + 4y^2 - 16y + 4 = 0$

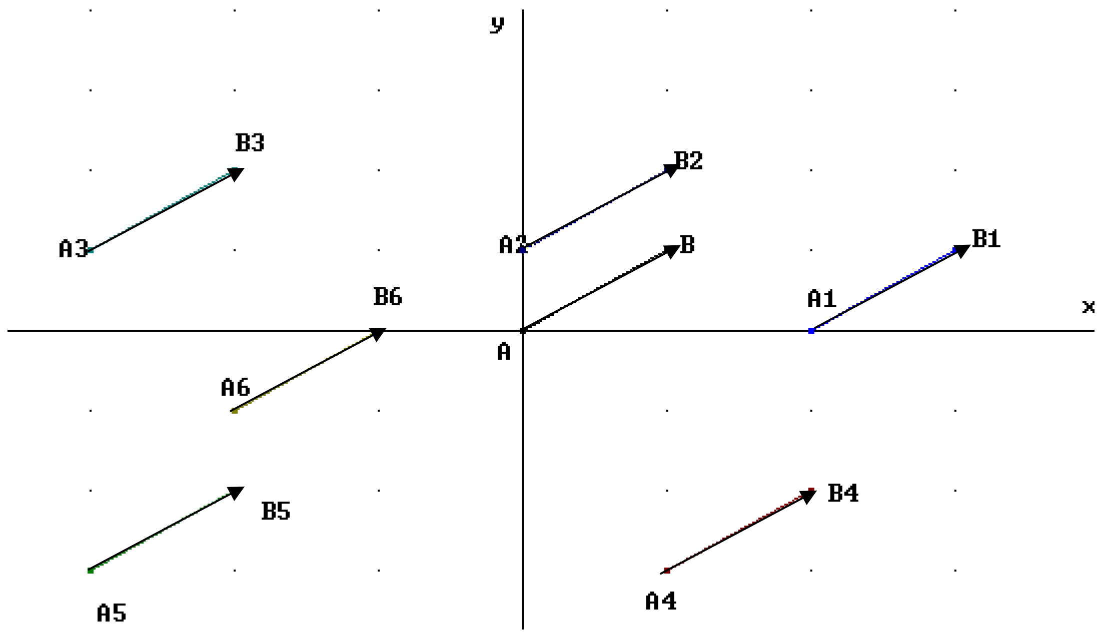
14. Una parábola vertical tiene el vértice en (1, 2) y las ramas hacia arriba. Si sabemos que pasa por el punto (0, 5) calcula su ecuación y su foco.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Apéndice I. Vectores libres y ligados

Vectores ligados o fijos: Son aquellos que tiene un punto de aplicación (origen) y por tanto un extremo. Se denota como el vector $\overrightarrow{PQ}$, donde $P(p_x, p_y)$ es el origen y $Q(q_x, q_y)$ el extremo. El vector, que no olvidemos nos da el grado de avance en las dos direcciones, se calcula restando las coordenadas x e y de Q y P: $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (q_x - p_x,\ q_y - p_y)$.

Vector libre: Es el conjunto de todos los vectores con misma dirección, módulo y sentido. Se suelen denotar por $\vec{v}$



Para representar un vector libre, es suficiente con dar dos coordenadas, como en $\vec{v} = (1, 2)$. Ahora bien, para representar un vector ligado necesitamos o bien un punto y un vector libre, como en $P = (-1, 3); \vec{v} = (1, 2)$ o dos puntos (origen y extremo) como en $P = (-1, 3); Q = (0, 5)$.

Observa que los vectores ligados $P = (-1, 3); \vec{v} = (1, 2)$ y $R = (0, 2); \vec{v} = (1, 2)$ NO son iguales aunque contengan el mismo vector libre, pues empiezan en puntos distintos.

El uso de vectores ligados es infrecuente en Matemáticas, pero se utilizan bastante en Física.

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Apéndice II. Deducción de la fórmula de la distancia de un punto a una recta

Supongamos una recta r en forma implícita $Ax+By+C=0$ y un punto P cualquiera de coordenadas (x_0, y_0). Queremos demostrar que la distancia del punto a la recta es $d(P,r)=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$.

Pongamos que el punto de mínima distancia es Q, con coordenadas $Q\equiv(q_x, q_y)$. Ya hemos visto que el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a la recta. También hemos visto que el vector director de la recta es $(-B, A)$ por lo que el vector (A, B) es perpendicular a la recta.

Pero si $\overrightarrow{PQ}$ y (A, B) son perpendiculares al mismo vector entonces es porque son paralelos, es decir $\overrightarrow{PQ}=t\,(A,B)$. Sabemos además que la distancia que buscamos es el módulo de $\overrightarrow{PQ}$. Si hacemos el vector (A,B) unitario, entonces tenemos (A,B) y $|k|$ es EXACTAMENTE la distancia (observa que tenemos que poner valor absoluto porque puede ser negativo).

Vamos a calcular k. Si multiplicamos los dos lados por el vector $\frac{(A,B)}{\|(A,B)\|}$ obtenemos directamente el valor de k. $\overrightarrow{PQ}\frac{(A,B)}{\|(A,B)\|}=k\frac{(A,B)}{\|(A,B)\|}\frac{(A,B)}{\|(A,B)\|}=k\frac{\|(A,B)\|^2}{\|(A,B)\|^2}=1$.

Por tanto, basta hacer el producto. Hagámoslo.

$k=\overrightarrow{PQ}\cdot\frac{(A,B)}{\|(A,B)\|}=(q_x-x_0, q_y-y_0)\cdot\frac{(A,B)}{\sqrt{A^2+B^2}}$ pues $\overrightarrow{PQ}=(q_x-x_0, q_y-y_0)$ y $\overline{(A,B)}=\sqrt{A^2+B^2}$.

Operando: $k=\frac{Aq_x+Bq_y-Ax_0-By_0}{\sqrt{A^2+B^2}}$ Pero esto no nos arregla mucho, queremos una fórmula donde no aparezca el punto Q. Para ello, tenemos en cuenta que $Aq_x+Aq_y+C=0$ por ser un punto de la recta. Por tanto, encontramos $Aq_x+Bq_y=-C$ y llevándolo a la ecuación obtenemos la fórmula:

$k=\frac{-Ax_0-By_0-C}{\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Tomando valores absolutos, tenemos la fórmula final:

$$d(P,r)=\left|\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

Autor: Andrés García Mirantes
Revisor: José Luis Lorente Aragón
Ilustraciones: Banco de Imágenes de INTEF

Apéndice III. Deducción de las fórmulas de las cónicas

Elipse:

Los focos están en $(-c,0)$ y $(c,0)$ siendo $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Es el lugar geométrico de los puntos cuya suma de las distancias a los focos es constantemente igual a $2a$, así que planteamos la distancia.

Tomamos un punto genérico de la elipse, (x,y). Su distancia a $(-c,0)$ es el módulo del vector que los une, es decir: $\sqrt{[x-(-c)]^2+(y-0)^2}$ o, lo que es lo mismo $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$.

La otra distancia es $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Si planteamos que la suma sea $2a$ el lugar geométrico es:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Puesto así, no se parece mucho a una elipse, ¿verdad? Bien, vamos a simplificarlo un poco y veremos que no sólo se parece, sino que es el mismo.

Pasando al otro término: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

Elevando al cuadrado para quitar raíces: $(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$

Operando: $x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$

Dejamos la raíz sola: $x^2+2cx+c^2+y^2-4a^2-x^2+2cx-c^2-y^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

Y se nos simplifica casi todo: $4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Dividimos por cuatro para hacerlo más fácil: $cx-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Y ahora sí, elevamos al cuadrado: $(xc-a^2)^2=\left[-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2$

Operando: $c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2\left[x^2-2cx+c^2+y^2\right]\to$
$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$
Pasamos las x e y a la izquierda y el resto a la derecha:

$$c^2x^2-2a^2cx-a^2x^2+2a^2cx-a^2y^2=-a^4+a^2c^2$$

Operando y sacando factor común: $(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$

Ahora bien, por definición, $c=\sqrt{a^2-b^2}$, es decir $c^2=a^2-b^2$ de donde $c^2-a^2=-b^2$.

Por tanto: $-b^2x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)=-a^2b^2$.

En resumen, tenemos $-b^2x^2-a^2y^2=-a^2b^2$. Dividiendo por $-a^2b^2$ se obtiene finalmente la ecuación de la elipse:

Es $\dfrac{-b^2}{-a^2b^2}x^2+\dfrac{-a^2}{-a^2b^2}y^2=\dfrac{-a^2b^2}{-a^2b^2}$ o, más bonito $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Hipérbola:

La deducción es muy parecida a la de la elipse. Los focos están en $(-c, 0)$ y $(c, 0)$ siendo $c=\sqrt{a^2+b^2}$. Es el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de las distancias a los focos es constantemente igual a $2a$, así que planteamos la distancia.

Tomamos un punto genérico de la elipse, (x, y). Su distancia a $(-c, 0)$ es el módulo del vector que los une, es decir: $\sqrt{[x-(-c)]^2+(y-0)^2}$ o, lo que es lo mismo $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$.

La otra distancia es $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$. Si planteamos que la diferencia sea $2a$ el lugar geométrico es:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a.$$

Naturalmente, podríamos plantearnos la diferencia al revés, $\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$. Vamos hacer primero el primer caso y muy brevemente, describiremos el segundo.

Como antes, no es demasiado similar a una hipérbola. Y como antes lo vamos a simplificar un poco.

Pasando al otro término: $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

Elevando al cuadrado para quitar raíces: $(x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$

Operando: $x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2$

Dejamos la raíz sola: $x^2+2cx+c^2+y^2-4a^2-x^2+2cx-c^2-y^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

Y se nos simplifica casi todo: $4cx-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Dividimos por cuatro para hacerlo más fácil: $cx-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$.

Y ahora sí, elevamos al cuadrado: $(xc-a^2)^2=\left[a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right]^2$

Observa que es exactamente lo que nos salía en la elipse. Pero ahora a y c tienen interpretaciones distintas, entre otras cosas es $c>a$. Procediendo igual que en la elipse:

Operando: $c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2\left[x^2-2cx+c^2+y^2\right]$

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+c^2a^2y^2$$

Pasamos las x e y a la izquierda y el resto a la derecha:

$$c^2x^2-2a^2cx-a^2x^2+2a^2cx-a^2y^2=-a^4+a^2c^2$$

Operando y sacando factor común: $(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$

Exactamente igual que en la elipse. Pero ahora es distinto $c^2=a^2+b^2$ por lo que $c^2-a^2=b^2$.

$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)\Rightarrow b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.

En resumen, tenemos $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

Dividiendo por a^2b^2 se obtiene finalmente la ecuación de la hipérbola:

Es $\frac{b^2}{a^2b^2}x^2 + \frac{a^2}{a^2b^2}y^2 = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}$ o, más elegante: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

¿Y qué pasa con la otra ecuación? Pues que si empezamos con $\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$ y realizamos las operaciones igual, obtenemos lo mismo cambiando *c* por $-c$.

Llegaríamos a la ecuación $\left(-xc - a^2\right)^2 = \left[a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right]^2$ que, operando, acaba siendo la misma ecuación que antes, $\left(c^2 - a^2\right)x^2 - a^2y^2 = a^2\left(c^2 - a^2\right)$.

Apéndice IV. Deducción de la fórmula de la hipérbola equilátera.

Los focos están en $(-a,-a)$ y (a,a) y la distancia es $2a$. Como ya hemos visto, la ecuación es:

$$\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2} - \sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2} = 2a$$

Llevamos el segundo sumando al otro término y elevamos al cuadrado:

$$\left[\sqrt{(x+a)^2+(y+a)^2}\right]^2 = \left[2a + \sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}\right]^2$$

$$(x+a)^2+(y+a)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2} + (x-a)^2 + (y-a)^2$$

Operando:

$$x^2+2xa+a^2+y^2+2ya+a^2 = 4a^2 - 2\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2} + x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2ya + a^2$$

Pasando las x^2, y^2, a^2, x e y a la izquierda:

$$4xa + 4ya - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}$$

Dividiendo por $4a$. $x + y - a = \sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}$.

Elevando al cuadrado (otra vez):

$$(x+y-a)^2 = \left[\sqrt{(x-a)^2+(y-a)^2}\right]^2$$

$$x^2+y^2+a^2+2xy-2xa-2ya = (x-a)^2+(y-a)^2$$

Desarrollamos:

$$x^2+y^2+a^2+2xy-2xa-2ya = x^2-2xa+a^2+y^2-2ya+a^2$$

Si pasamos todo excepto a^2 al otro lado tenemos:

$2xy = a^2$ que es la fórmula $xy = \frac{a^2}{2}$ que buscábamos.