Resolución de triángulos rectángulos

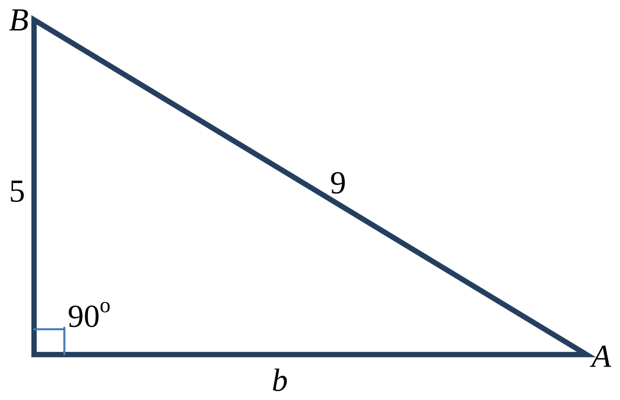
Resolver un triángulo es hallar uno o más elementos desconocidos a partir de los elementos (lados y ángulos) conocidos.

En el caso de un triángulo rectángulo siempre se conoce un ángulo: el ángulo recto o de 90°. Por tanto sólo se pueden presentar dos casos.

Caso 1. Se conocen dos lados.	• El tercer lado se calcula mediante el teorema de Pitágoras. • El ángulo que forme la hipotenusa con uno de los catetos se halla a partir de la razón trigonométrica que los relaciona. • El ángulo que queda por conocer es el complementario del anterior.
Caso 2. Se conocen un lado y uno de los dos ángulos agudos.	• Cualquiera de los otros dos lados se calcula mediante la razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y el ángulo conocidos. • El otro ángulo agudo es el complementario del ángulo conocido.

Ejemplo 1.

Supongamos que conocemos una cateto $a=5$ cm y la hipotenusa $c=9$ cm.



El otro cateto se halla mediante el teorema de Pitágoras: $a^2+b^2=c^2 \Rightarrow b^2=81-25=56 \Rightarrow b=7,48$ cm.

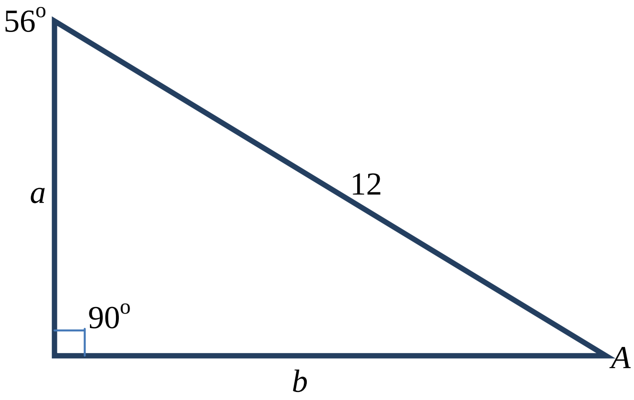
Para calcular el ángulo A:

$$\operatorname{sen} A=\frac{5}{9}=0,56 \Rightarrow A=33,75^\circ.$$

El ángulo B es el complementario del anterior: $B=90^\circ-33,75^\circ=56,25^\circ$

Ejemplo 2.

Supongamos que conocemos la hipotenusa $c=12$ cm y el ángulo $B=56^\circ$.



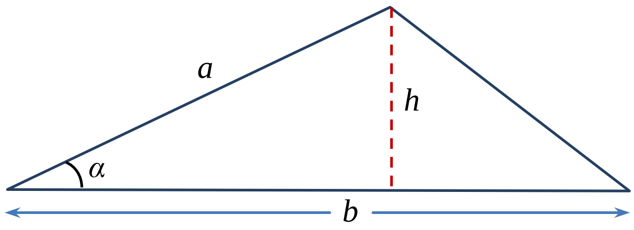
Tenemos que $\cos 56^\circ=\frac{a}{12} \Rightarrow a=12\cos 56^\circ=6,71$ cm., y $\operatorname{sen} 56^\circ=\frac{b}{12} \Rightarrow b=12\operatorname{sen} 56^\circ=9,95$ cm.

El ángulo A es el complementario de B: $A=90^\circ-56^\circ=34^\circ$

Aplicación: cálculo de la altura y del área de un triángulo cualquiera

Conocida la longitud de dos lados a y b de un triángulo cualquiera y el ángulo α que forman ambos, es muy sencillo hallar la altura correspondiente a uno de los lados. Observa que, en el triángulo de la figura de la derecha, la altura h sobre el lado b de longitud conocida, divide al mismo en dos triángulos rectángulos. Si nos fijamos en el de la izquierda tenemos:

$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{h}{a} \Rightarrow h=a\operatorname{sen}\alpha$$



Ahora podemos deducir una fórmula para el área del triángulo:

$$A=\frac{b\,h}{2}=\frac{b\,a\operatorname{sen}\alpha}{2}=\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}\alpha$$

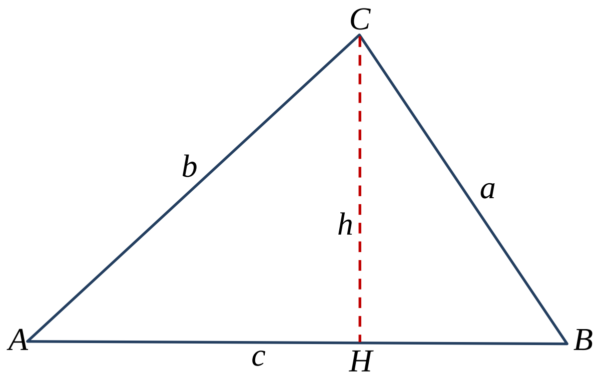
Similar razonamiento se puede hacer en un triángulo cualquiera. Utilizando la altura correspondiente a uno de los lados, conseguiremos dos triángulos rectángulos, y esto permitirá conocer otras longitudes o distancias desconocidas. Este método se conoce con el nombre de ***estrategia de la altura*** para resolver triángulos no necesariamente rectángulos.

Resolución de triángulos cualesquiera: teorema de los senos y teorema del coseno

Teorema de los senos

En un triángulo cualquiera de lados a, b, c y de ángulos A, B, C se cumplen las siguientes igualdades.

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}}$$



Para demostrar este resultado utilizaremos la estrategia de la altura, comentada en la sección anterior. Observa la figura de la derecha. En ella, trazamos la altura h desde el vértice C. Los triángulos AHC y BHC son rectángulos. Por tanto tenemos:

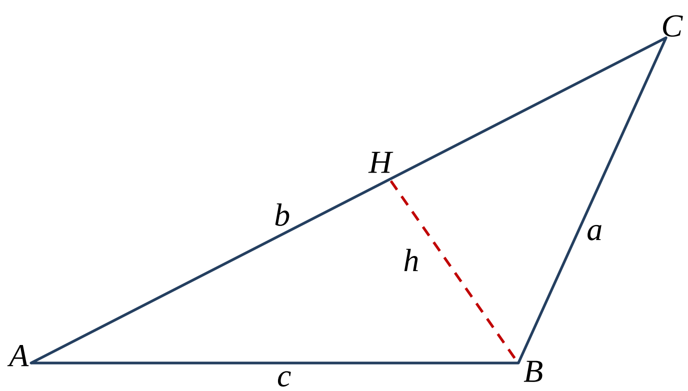
$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen} A=\dfrac{h}{b}\Rightarrow h=b\operatorname{sen} A\\ \operatorname{sen} B=\dfrac{h}{a}\Rightarrow h=a\operatorname{sen} B\end{array}\right\}\Rightarrow b\operatorname{sen} A=a\operatorname{sen} B\Rightarrow\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

Esta es la primera de las igualdades que se pretendían demostrar. Para demostrar la segunda se procede de manera semejante, trazando la altura desde el vértice B, relacionando en este caso los lados a y c con sus ángulos opuestos (intenta hacerlo tú como ejercicio). Se obtiene en este caso: $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A}=\dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$.

Teorema del coseno

En un triángulo cualquiera de lados a, b, c y de ángulos A, B, C se cumple la siguiente igualdad:

$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A}$$



Para hacer la demostración utilizaremos un método similar al ya visto en el teorema de los senos, pero con un triángulo oblicuángulo (ver figura de la derecha). Se traza la altura h sobre el lado b. Entonces, en el triángulo ABH se tiene que

$$\cos A=\frac{AH}{c}\Rightarrow AH=c\cos A \qquad (1)$$

Entonces:

$$HC=b-AH=b-c\cos A \qquad (2)$$

Aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos ABH, BCH y utilizando las igualdades (1) y (2) demostradas anteriormente tenemos:

$$a^2=h^2+HC^2=h^2+\left(b-c\cos A\right)^2=h^2+b^2+c^2\cos^2 A-2bc\cos A$$

$$c^2=h^2+AH^2=h^2+\left(c\cos A\right)^2=h^2+c^2\cos^2 A$$

Restando ambas igualdades se obtiene:

$$a^2-c^2=b^2-2bc\cos A$$

Finalmente, sumando c^2 en los dos miembros, se obtiene lo que queríamos demostrar:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

También son ciertas, y se pueden demostrar de manera similar a como se ha hecho anteriormente, las siguientes igualdades:

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \ \ ; \ \ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$