Concepto de función y funciones elementales

Las funciones describen fenómenos cotidianos, económicos, psicológicos, científicos… Tales funciones se obtienen experimentalmente, mediante observación. Después, se idealizan y sirven de modelos para las grandes familias de funciones que se conocen de cursos anteriores. Veamos el concepto de función y algunas de las familias de funciones más conocidas.

Concepto de función

Una función real de variable real es una aplicación f de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, de tal manera que a cada número real $x \in \text{Dom } f$ le hace corresponder un único número real $y = f(x)$, llamando también imagen de x. Recuerda que $\text{Dom } f$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$, llamado **dominio** de la función f, el cual representa el conjunto de números reales de los que tiene sentido calcular la imagen. El conjunto de todos los números reales que son imagen de los elementos del dominio se le llama **imagen** de f y se representa por $\text{Im } f$. Normalmente a la variable x, se le llama **variable independiente** y a la variable y, **variable dependiente**. Simbólicamente, una función se representa así:

$$f : \text{Dom } f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x)$$

Funciones lineales

Se describen mediante ecuaciones de primer grado, $y = mx + n$, y su representación gráfica es una **recta**. Recordemos que al coeficiente m se le llama **pendiente** de la recta y al término independiente, n, **ordenada en el origen**. Si $n = 0$ la función lineal queda de la forma $y = mx$, y la recta pasa por el origen de coordenadas. Si $m = 0$, la función es $y = n$, cuya representación es una recta vertical que pasa por el punto $(0, n)$. Además, si $m > 0$, la función lineal es creciente; y si $m < 0$, es decreciente. Para hacer la representación gráfica de una función lineal basta con obtener dos puntos de la misma: (x_1, y_1), (x_2, y_2), representarlos en unos ejes de coordenadas y unirlos mediante una recta. El dominio de una función lineal es todo $\mathbb{R}$.

Funciones cuadráticas

Se describen mediante ecuaciones de segundo grado, $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$). Su representación gráfica es una **parábola**. Recordemos que si $a > 0$ la parábola se "abre hacia arriba", y si $a < 0$ la parábola se "abre hacia abajo". El **vértice** de la parábola es el punto más alto o más bajo de la parábola, cuya coordenada x viene dada por la expresión $x = -\dfrac{b}{2a}$. Por tanto, las coordenadas del vértice son $\left(-\dfrac{b}{2a}, f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)$. La parábola corta al eje Y en el punto de coordenadas $(0, c)$ y al eje X en los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$, donde x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Si la ecuación anterior tiene una única solución, sólo habrá un punto de corte con el eje X, $(x_1, 0)$, y la parábola será tangente al eje X. Si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene soluciones reales, la parábola no corta al eje X, y estará toda ella por encima o por debajo del eje X. Se llama **eje de la parábola** a la recta $x = -\dfrac{b}{2a}$, que es una recta vertical que pasa por el punto $\left(-\dfrac{b}{2a}, 0\right)$. El eje de la parábola pasa por el vértice y divide a ésta en dos ramas simétricas. Es como un "espejo" en el que el reflejo de una rama de la parábola es la otra rama de la parábola. El dominio de una función cuadrática es todo $\mathbb{R}$.

Funciones polinómicas

La ecuación de una función polinómica viene dada mediante un polinomio de grado n:

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Su representación gráfica es una curva que se "dobla" varias veces, dependiendo del grado del polinomio. Su dominio también es todo el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

Funciones de proporcionalidad inversa

Son funciones cuya ecuación es de la forma $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, con $c\neq 0$. Su representación gráfica es una **hipérbola** cuyas asíntotas son la recta horizontal $y=\dfrac{a}{c}$, y la recta vertical $x=-\dfrac{d}{c}$.

Las hipérbolas más sencillas son de la forma $y=\dfrac{k}{x}$, cuya representación gráfica son hipérbolas cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas. En este caso, si $k>0$, las ramas de la hipérbola se encuentran en el primer y tercer cuadrantes, y si $k<0$, las ramas de la hipérbola se encuentran en el segundo y cuarto cuadrantes.

El dominio de una función de proporcionalidad inversa, $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, es $\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$, ya que el punto $x=-\dfrac{d}{c}$ anula el denominador, y sabemos que cuando el denominador es cero la expresión correspondiente no existe o no tiene sentido.

Funciones racionales

La ecuación de una función racional viene dada por una fracción algebraica, es decir, $y=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios. El dominio de una función racional es $\mathrm{Dom}\, f=\mathbb{R}-\{x\in\mathbb{R}: q(x)=0\}$. Es decir, el dominio está formado por todo el conjunto de los números reales, salvo aquéllos que anulan el denominador.

Las funciones raciones tienen representaciones gráficas muy variadas. Para poder hacer la representación gráfica de una función racional debemos hacer un estudio detallado de la función: puntos de corte con los ejes, simetría, asíntotas, tendencias, monotonía, extremos, puntos de inflexión, etc. Todo ellos se verá en los dos temas siguientes.

Funciones raíz o funciones radicales

Son funciones de la forma $y=\sqrt{f(x)}$ donde f es una función elemental cualquiera (por ejemplo, de las vistas anteriormente). Su dominio es $\mathrm{Dom}\, f=\{x\in\mathbb{R}: f(x)\geq 0\}$ (recuérdese que la raíz cuadrada no es un número real si el radicando es menor que cero). Por tanto para calcular el dominio debemos resolver la inecuación $f(x)\geq 0$. El intervalo o intervalos solución de esta inecuación coincide justamente con el dominio de la función.

Las funciones raíz también tienen representaciones gráficas muy variadas. Para hacernos una idea de la representación gráfica, al igual que ocurre con las racionales, hemos de estudiar detalladamente la función, y para eso debemos tener en cuenta los contenidos de los dos temas siguientes.

De todas formas, un caso particular muy sencillo son la familia de funciones del tipo $y=\sqrt{kx}$, donde k es un número real. Su representación gráfica es una rama de parábola que se encuentra por encima del eje X y cuyo eje es precisamente el eje X. Un ejemplo es la función $y=\sqrt{-2x}$. Su representación gráfica es la siguiente:

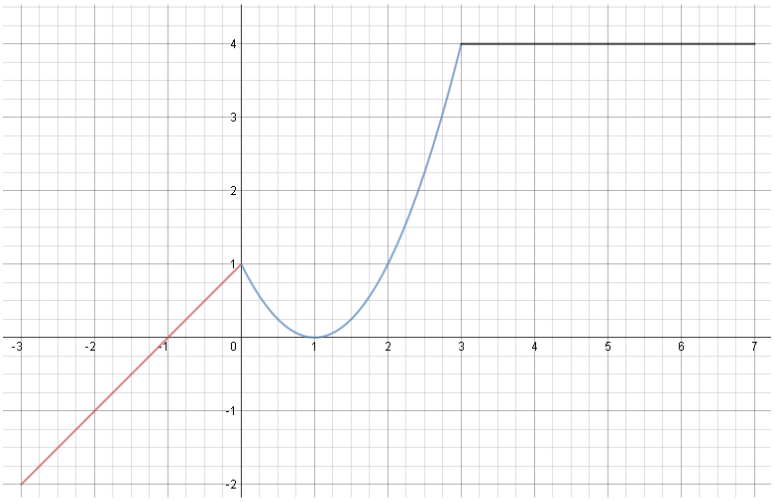
Funciones definidas "por trozos"

A veces un fenómeno cambia drásticamente con el tiempo y, por tanto, también su representación gráfica sufre cambios bruscos. Esa es la razón por la que conviene expresar la función mediante varios "trozos". Una función definida "por trozos" será entonces algo así como varias funciones elementales, pero expresadas de una sola vez.

Representar la gráfica de un función definida por trozos será sencillo si sabemos representar cada uno de los tramos o trozos correspondientes. Además tendremos que tener especial cuidado en aquellos puntos en donde termina un trozo y comienza otro, puntos que a veces estarán en contacto y a veces no.

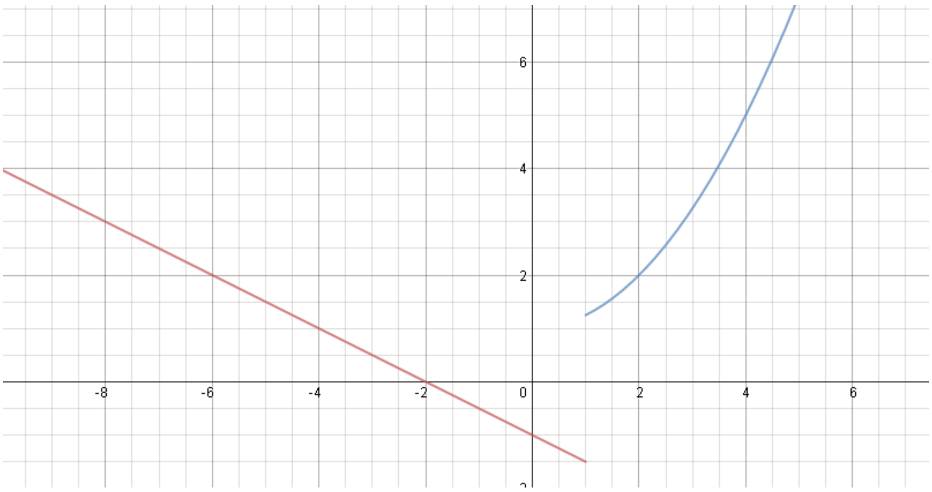
Como ejemplo vamos a dar dos funciones definidas por trozos y su correspondiente representación gráfica

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x\in[-3,0) \\ x^2-2x+1 & \text{si} \quad x\in[0,3] \\ 4 & \text{si} \quad x\in(3,7) \end{cases}$$



Observa que, empezando por la izquierda, el primer trozo (la recta inclinada) corresponde a la función $y=x+1$, el segundo trozo (la parábola) a la función $y=x^2-2x+1$, y el tercer trozo (la recta horizontal) a la función constante $y=4$. Observa que la primera se encuentra en la franja del eje X entre -3 y 0, la segunda en la franja entre 0 y 3 y la tercera en la franja situada entre 3 y 7. Además es conveniente observar que en los puntos en que la función pasa de un trozo al siguiente los trozos o ramas correspondientes "pegan bien", es decir, en esos puntos la función es continua.

$$g(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x<1 \\ x^2-1 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$$



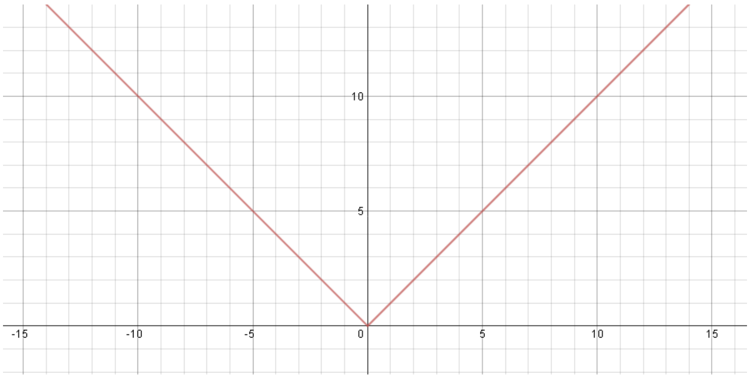
En este caso la recta es la gráfica de la función $y=2x+1$, y la parábola es la gráfica de la función $y=x^2-1$. La primera está definida para valores de x menores que 1, y la segunda para valores de x mayores o iguales que 1. En este caso los trozos no pegan bien cuando se pasa de la primera a la segunda y se dice que la función no es continua en el punto $x=1$.

Valor absoluto de una función

Recordemos que el valor absoluto de un número x coincide con el propio x si éste es positivo o cero, o con su opuesto, si x es negativo. Por tanto la función "valor absoluto de x", se define de la siguiente manera:

$$y=|x|=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

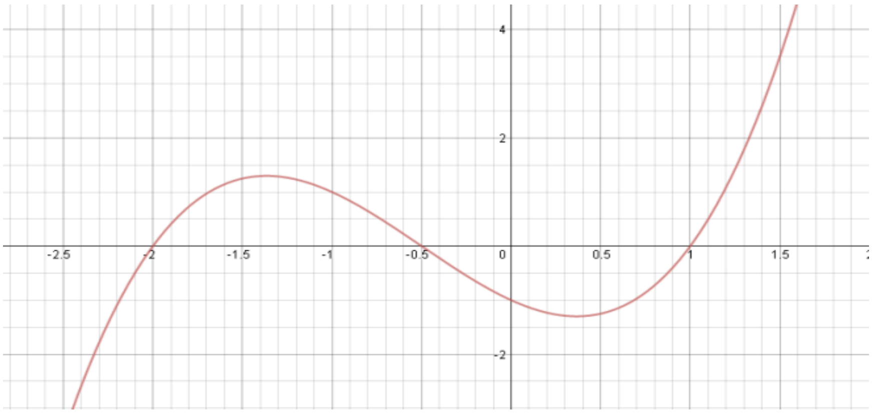
Obsérvese que esta es una función definida por trozos. Su representación gráfica es:

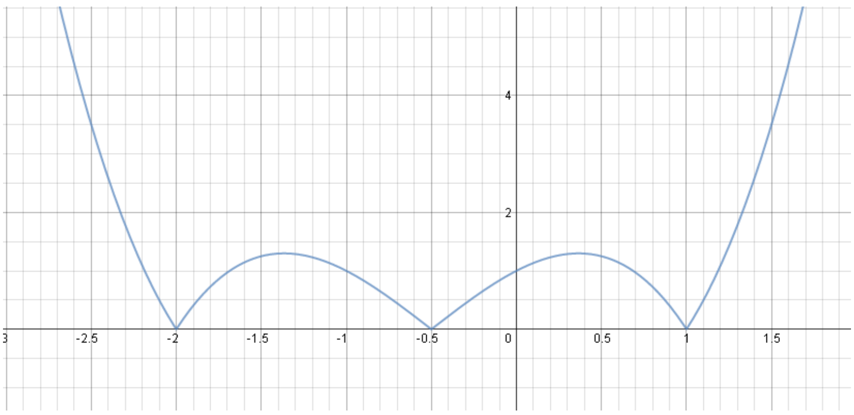


En general, la función valor absoluto de una función cualquiera $f\left(x\right)$ se define así:

$$y=\left|f\left(x\right)\right|=\begin{cases} f\left(x\right) & \text{si} \quad x\geq 0 \\ -f\left(x\right) & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

Para representarla gráficamente, se representa la función $f\left(x\right)$ y se traslada, tomando como eje de simetría el eje X, la parte de la gráfica de $f\left(x\right)$ que esté debajo del mismo, justamente por encima. Como ejemplo representaremos gráficamente las funciones $f\left(x\right)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1$, y su valor absoluto $\left|f\left(x\right)\right|=\left|x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-1\right|$.

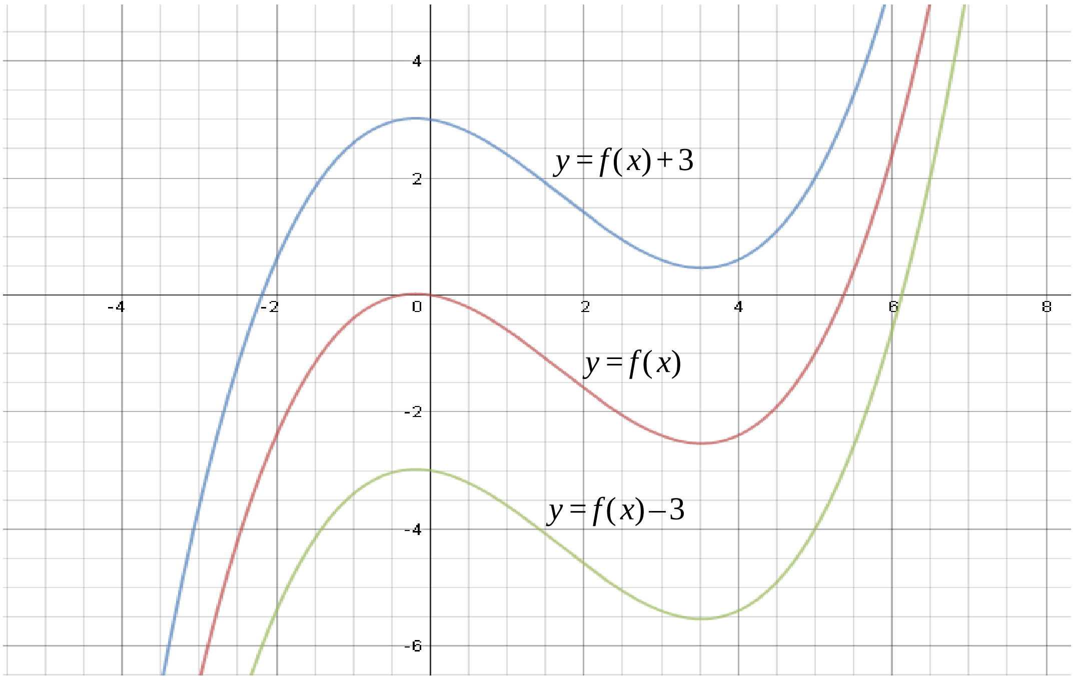




Transformaciones elementales de funciones

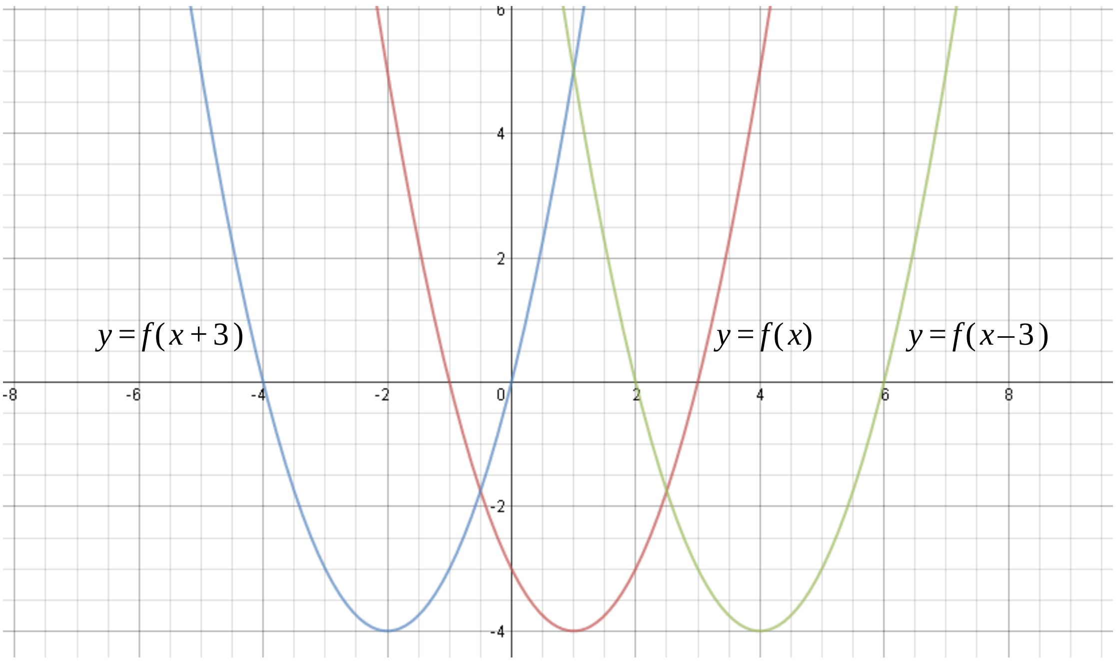
Traslaciones verticales

Dada una función cualquiera $y=f\left(x\right)$ y un número real positivo, $k>0$, la gráfica de las funciones $y=f\left(x\right)+k$, $y=f\left(x\right)-k$ son como la de $y=f\left(x\right)$ pero trasladadas k unidades hacia arriba o hacia abajo, respectivamente.



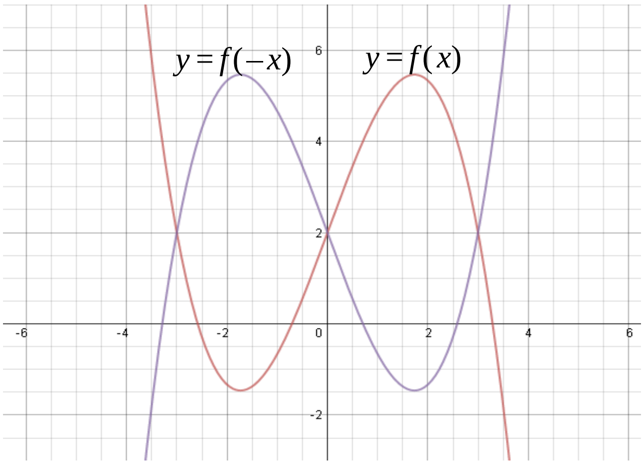
Traslaciones horizontales

Dada una función cualquiera $y=f\left(x\right)$ y un número real positivo, $k>0$, la gráfica de las funciones $y=f\left(x+k\right)$, $y=f\left(x-k\right)$ son como la de $y=f\left(x\right)$ pero trasladadas k unidades hacia la derecha o hacia la izquierda, respectivamente.



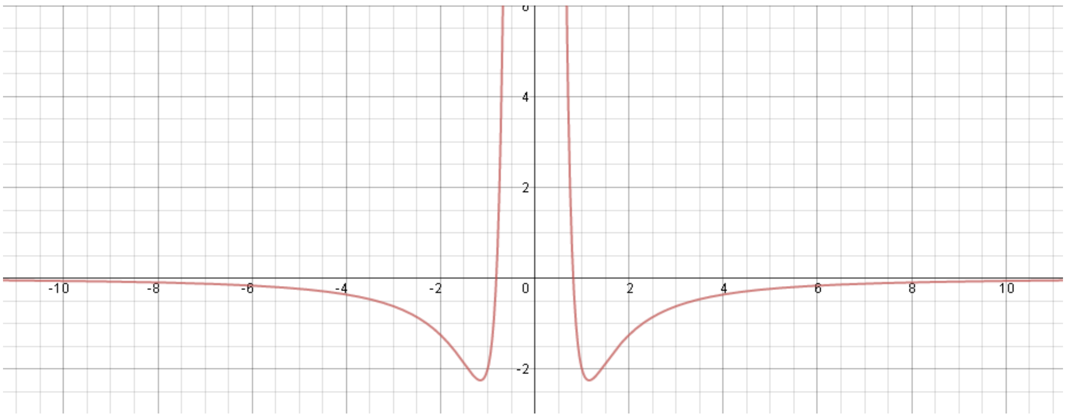
Simetría respecto del eje Y

La gráfica de la función $y=f\left(-x\right)$ es simétrica a la de $y=f\left(x\right)$ respecto del eje Y (es como si el eje Y actuara como un espejo). Un ejemplo son las funciones $f\left(x\right)=-\frac{1}{3}x^3+3x+2$ y $f\left(-x\right)=-\frac{1}{3}\left(-x\right)^3+3\left(-x\right)+2=\frac{1}{3}x^3-3x+2$:

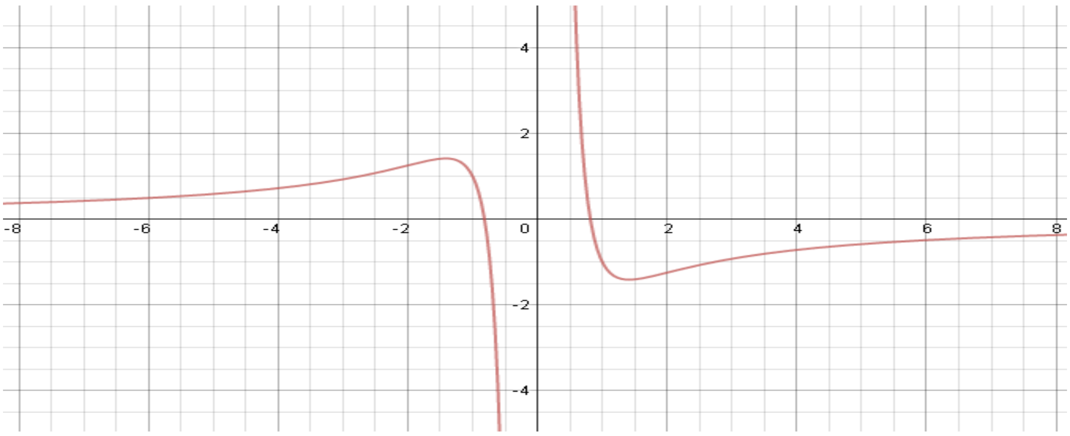


Si una función $y=f\left(x\right)$ cumple que $f\left(x\right)=f\left(-x\right)$, para todo x, entonces se dirá que es una **función par** y su propia gráfica será simétrica respecto del eje Y (es decir, si doblamos por el eje Y, las ramas de la gráfica de la función coinciden).

Por ejemplo, la función $f\left(x\right)=-\frac{6x^2-4}{x^4}$ es par, ya que $f\left(x\right)=f\left(-x\right)$ (¡compruébalo!). Su gráfica es:



Si una función $y=f\left(x\right)$ cumple que $f\left(x\right)=-f\left(-x\right)$, para todo x, entonces se dirá que es una **función impar** y su propia gráfica será simétrica respecto del origen de coordenadas. Esto quiere decir que si doblamos dos veces, una por el eje X, y otra por el eje Y, las ramas de la función coinciden. Por ejemplo la función $f\left(x\right)=-\frac{3x^2-2}{x^3}$ es impar ya que $f\left(x\right)=-f\left(-x\right)$ (¡compruébalo!). Su gráfica es:



Composición de funciones. Función inversa de una función

Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g se denomina **función compuesta** de f y g, y se designa por $g\circ f$, a la función que transforma $x\in\mathrm{Dom}\, f$ en $(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)$. Observa el siguiente esquema:

$$x\xrightarrow{f}f(x)\xrightarrow{g}g\left(f(x)\right)$$

La expresión $(g\circ f)(x)$ se lee f *compuesta con* g. Se nombra en primer lugar a la función f que está a la derecha porque es la primera en actuar sobre x. Obsérvese que para que la función compuesta $g\circ f$ tenga sentido se debe de cumplir que $f(x)\in\mathrm{Dom}\, g$. Veamos un ejemplo.

Dadas las funciones $f(x)=\dfrac{1}{3x-6}$ y $g(x)=2+\sqrt{x}$, vamos a hallar $f\circ g$.

- $(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=f\left(2+\sqrt{x}\right)=\dfrac{1}{3\left(2+\sqrt{x}\right)-6}=\dfrac{1}{6+3\sqrt{x}-6}=\dfrac{1}{3\sqrt{x}}$
- $(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=f\left(\dfrac{1}{3x-6}\right)=2+\sqrt{\dfrac{1}{3x-6}}$

Observa que no se cumple en general que $f\circ g=g\circ f$, es decir, **la composición de funciones no es conmutativa**.

Función inversa o recíproca de una función

Se llama **función inversa** de una función f a otra función, que designaremos por f^{-1}, cumpliendo la siguiente condición:

$$a\in\mathrm{Dom}\, f \text{ y } f(a)=b\text{, entonces } f^{-1}(b)=a$$

Como consecuencia de la definición anterior se dan las relaciones siguientes:

$$x\xrightarrow{f}f(x)\xrightarrow{f^{-1}}f^{-1}\left(f(x)\right)=x\ \ ;\ \ x\xrightarrow{f^{-1}}f(x)\xrightarrow{f}f\left(f^{-1}(x)\right)=x$$

La función inversa de f^{-1} es, a su vez, f. Por eso se dice, simplemente, que las funciones f y f^{-1} son inversas o recíprocas.

Es necesario hacer una observación: para que una función *tenga* inversa ha de ser **inyectiva**, es decir, cada valor $y=f(x)$ ha de corresponder a *un único valor* de x, es decir, *no puede haber dos valores distintos del dominio de* f, x_1 y x_2, tales que $y=f(x_1)=f(x_2)$ pues, si así fuera, la función inversa cumpliría lo siguiente:

$$f^{-1}(y)=f^{-1}\left(f(x_1)\right)=f^{-1}\left(f(x_2)\right)\Rightarrow f^{-1}(y)=x_1=x_2$$

Lo cual es absurdo pues hemos supuesto que x_1 y x_2 son distintos.

El procedimiento práctico para hallar la inversa de $y=f(x)$ consiste en intercambiar las variables x e y, despejando posteriormente la variable y en esta última expresión. Veamos un ejemplo.

Para hallar la inversa de la función $g(x)=2+\sqrt{x}$ del ejemplo anterior procedemos así. Llamamos $y=g(x)$: $y=2+\sqrt{x}$. Intercambiamos las variables: $x=2+\sqrt{y}$. Despejamos y: $\sqrt{y}=x-2\Rightarrow y=(x-2)^2$. Por tanto la función inversa de g es $g^{-1}(x)=(x-2)^2$. Comprobamos finalmente que así es:

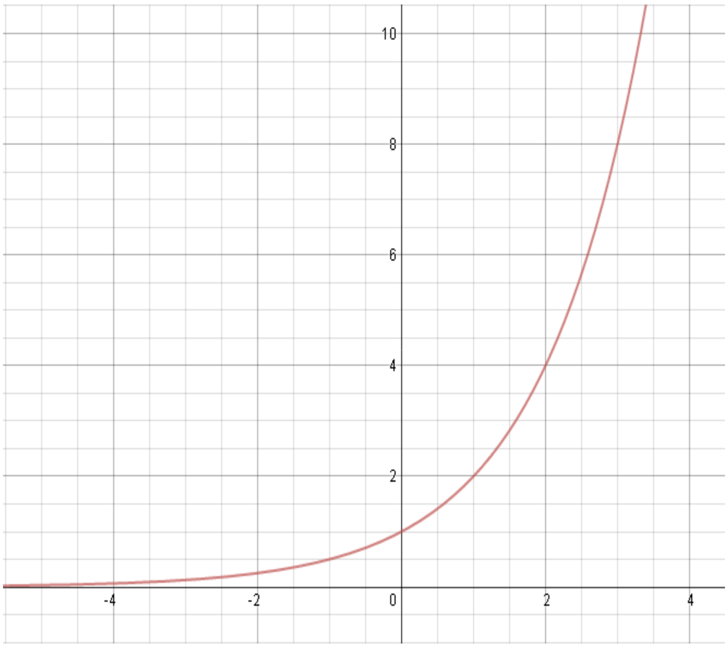
- $\left(g\circ g^{-1}\right)(x)=g\left(g^{-1}(x)\right)=g\left((x-2)^2\right)=2+\sqrt{(x-2)^2}=2+x-2=x$
- $\left(g^{-1}\circ g\right)(x)=g^{-1}\left(g(x)\right)=g^{-1}\left(2+\sqrt{x}\right)=\left(2+\sqrt{x}-2\right)^2=\sqrt{x}^2=x$

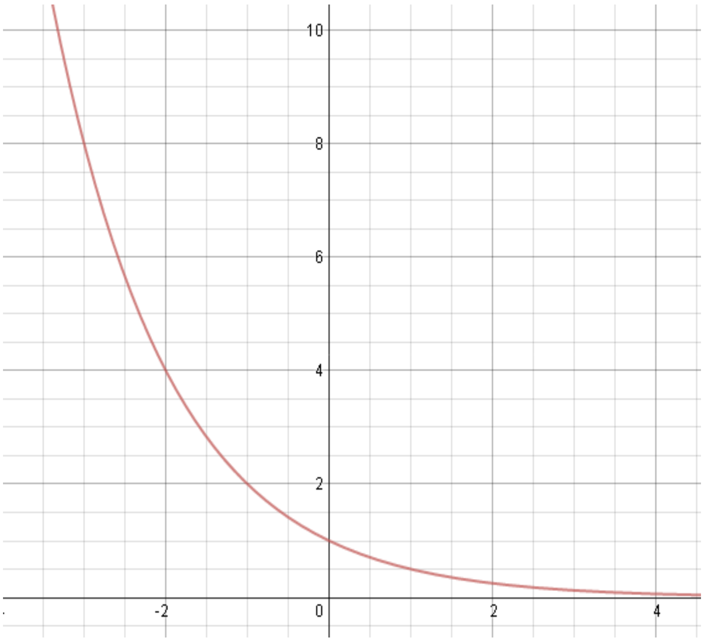
La función exponencial

Una **función exponencial** es de la forma $f(x)=a^x$, donde $a>0$ y $a\neq 1$. Las propiedades o características de la función exponencial son las siguientes:

1. Son continuas en todo el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales (que es su dominio de definición), y pasan por los puntos $(0\,,\,1)$ y $(1\,,\,a)$, ya que $a^0=1$ y $a^1=a$. De aquí se deduce que siempre cortan al eje Y en el punto $(0\,,\,1)$.
2. La imagen de la función exponencial es siempre el intervalo $(0\,,\,+\infty)$.
3. Si $a>1$ son crecientes, tanto más cuanto mayor sea a. El crecimiento de cualquiera de ellas llega a ser muy rápido, superando incluso a cualquier función potencial del tipo $y=kx^n$. Es por ello que la expresión *crecimiento exponencial* es sinónimo de crecimiento muy rápido. Además, si $a>1$, se dan las siguientes tendencias:
$$x\to-\infty\Rightarrow a^x\to 0\ ;\ x\to+\infty\Rightarrow a^x\to+\infty$$
4. Si $0<a<1$ son decrecientes. Además se dan las siguientes tendencias:
$$x\to-\infty\Rightarrow a^x\to+\infty\ ;\ x\to+\infty\Rightarrow a^x\to 0$$
5. Se abren siempre hacia arriba, es decir, son cóncavas.
6. Se acercan indefinidamente al eje X sin llegar a cortarlo; por la izquierda si $a>1$ y por la derecha si $0<a<1$. Es decir, el eje X es una asíntota horizontal.
7. En matemáticas superiores la función $y=e^x$ es extraordinariamente importante. Tanto es así que cuando se habla de “la función exponencial”, sin mencionar cuál es su base, se está haciendo referencia a ella.
8. También son exponenciales las funciones del tipo $y=a^{kx}$, ya que $a^{kx}=\left(a^k\right)^x$, es decir, $y=a^{kx}$ es la función exponencial de base a^k.

Como ejemplo representaremos a continuación las funciones $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$





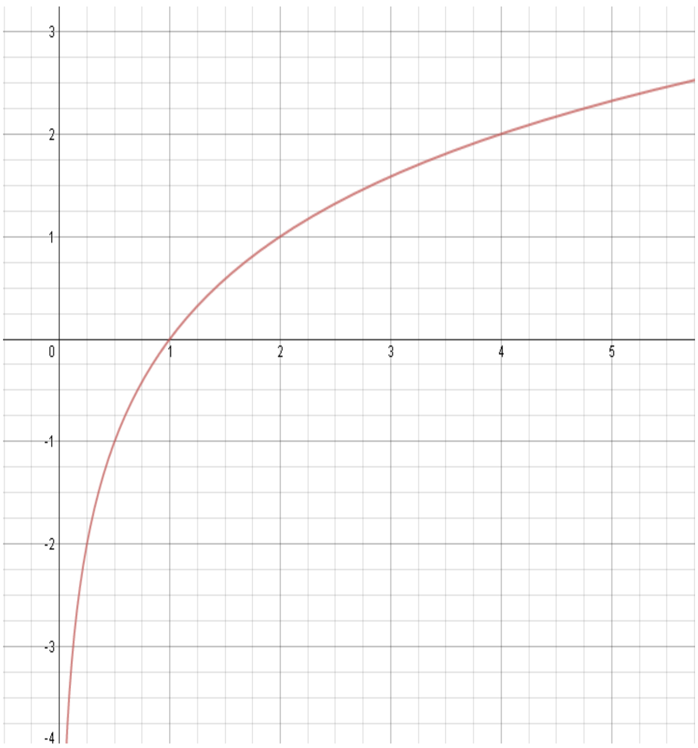
La función logarítmica

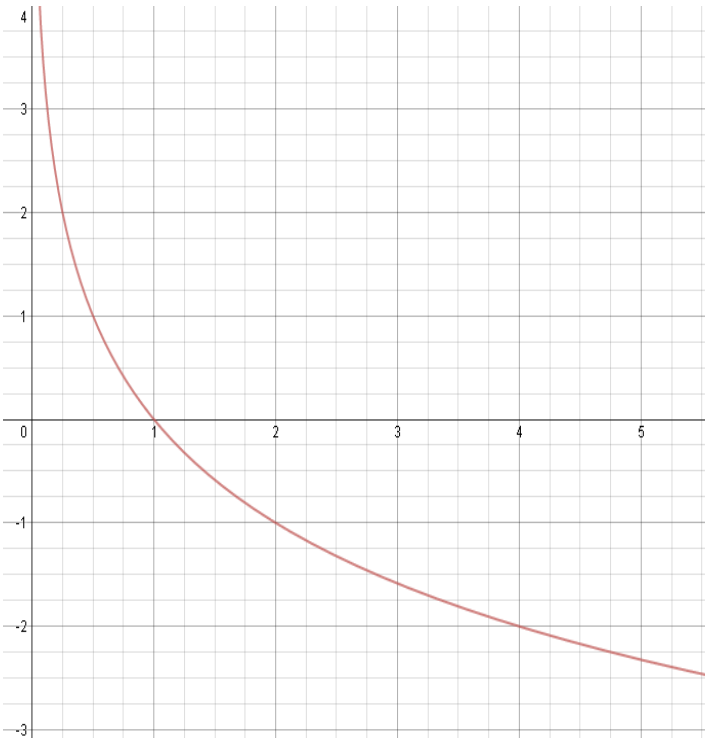
Una **función logarítmica** es de la forma $f(x)=\log_a x$, donde $a>0$ y $a\neq 1$. La función logarítmica de base a es la inversa de la función exponencial vista anteriormente, $g(x)=a^x$. Es fácil demostrar que, efectivamente, $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)=x$.

Las propiedades o características de la función logarítmica son las siguientes:

1. Son continuas el intervalo $(0\,,\,+\infty)$ (que es su dominio de definición), y pasan por los puntos $(1\,,\,0)$ y $(a\,,\,1)$, ya que $\log_a 1=0$ y $\log_a a=1$. De aquí se deduce que siempre cortan al eje X en el punto $(1\,,\,0)$.
2. La imagen de la función logarítmica es todo el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.
3. Si $a>1$ son crecientes. Su crecimiento es muy lento, tanto más cuanto mayor sea a. Para valores muy grandes de x llegan a tomar valores mucho menores que los de cualquier función raíz $y=\sqrt[n]{x}$, por grande que sea n. Además, si $a>1$, se dan las siguientes tendencias:
$$x\to 0\Rightarrow \log_a x\to -\infty\ ;\ x\to +\infty\Rightarrow \log_a x\to +\infty$$
4. Si $0<a<1$ son decrecientes. Además se dan las siguientes tendencias:
$$x\to 0\Rightarrow \log_a x\to +\infty\ ;\ x\to +\infty\Rightarrow \log_a x\to -\infty$$
5. Si $a>1$ se abren hacia abajo, es decir, son convexas. Y si $0<a<1$ se abren hacia arriba, es decir, son cóncavas.
6. Se acercan indefinidamente al eje Y sin llegar a tocarlo; para valores de y negativos sin $a>1$, y para valores de y positivos si $0<a<1$. Es decir, el eje Y es una asíntota vertical.
7. En matemáticas superiores la función $f(x)=\log_e x$ es muy importante. Se le llama **logaritmo neperiano** y se designa por $f(x)=\ln x$. Es la función inversa de la exponencial de base e.

Como ejemplo representaremos a continuación las funciones $y=\log_2 x$ y $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

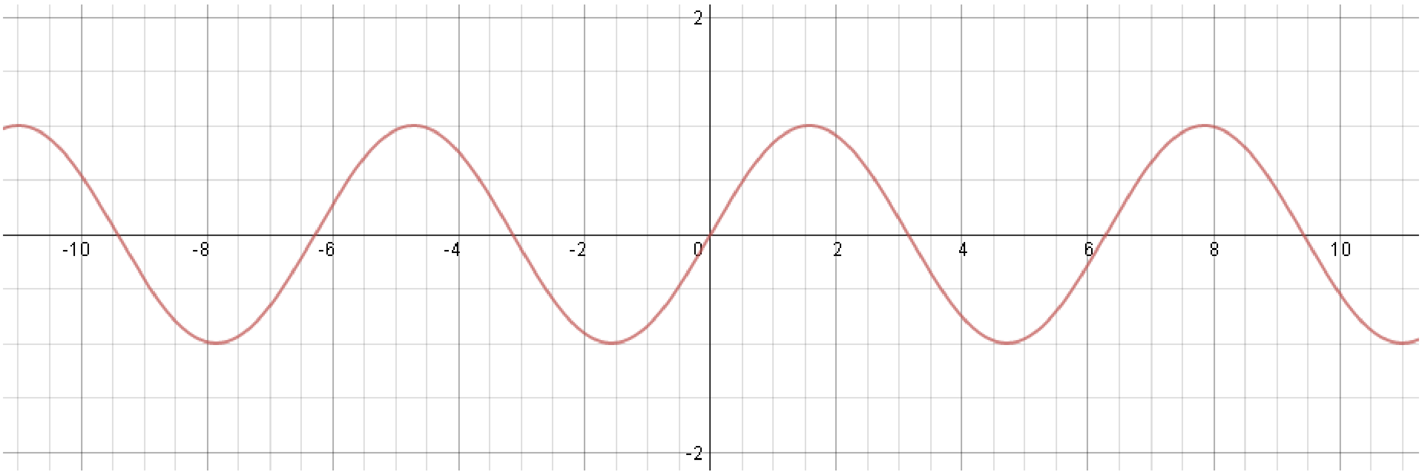




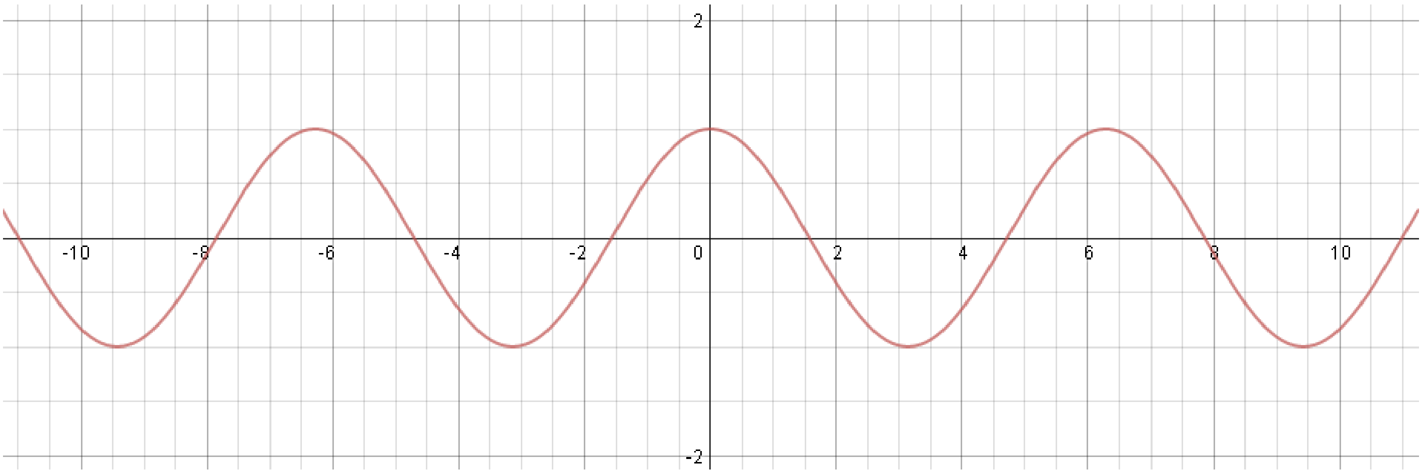
Funciones trigonométricas

Veremos las tres funciones trigonométricas más importantes: seno, coseno y tangente. Sabemos que los ángulos α y $\alpha+2\pi k$ son iguales en el sentido de que tienen las mismas razones trigonométricas. Por tanto la gráfica de las funciones trigonométricas se repetirá periódicamente en cada intervalo de longitud 2π (cada vuelta completa).

Función seno



Función coseno



Función tangente