6 Lugares geométricos. Cónicas

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

El rescoldo

Después de Navidad [1922], Jesús Vio tuvo una larga charla con [el profesor] Harold Lardy para orientar el trabajo de la tesis que debía comenzar. Había pensado encaminar su investigación atacando, en la medida de sus fuerzas, el último teorema de Fermat. Le atraía, como a tantos, la sencillez del planteamiento. Lo que Pierre de Fermat había escrito en el margen de la *Arithmetica* de Diofanto, probablemente en 1637, era muy simple: «Es imposible escribir un cubo como la suma de dos cubos o, en general, escribir cualquier potencia mayor que dos como la suma de dos potencias iguales».

Cuando el español le planteó a Lardy su intención de centrar la tesis en el teorema de Fermat, el profesor sonrió, pero no se lo desaconsejó. Estaban sentados en torno a una mesa en la sala de estar contigua a la habitación donde vivía el soltero Lardy. [...] Una pizarra negra con sus tizas completaba la decoración mural. «Comencemos, pues», indicó Lardy y, levantándose, se acercó a la pizarra. Allí escribió la ecuación de Fermat:

$$x^n + y^n = z^n$$

–No existe una terna (x, y, z) de números enteros que, para n mayor que 2, satisfaga esta ecuación –concluyó Lardy.

En lugar de sentarse, el profesor siguió de pie.

–Si me lo permite –continuó Lardy–, le haré una pequeña digresión histórica que quizá le sea de utilidad. [...] Euler, siguiendo el método conocido como «descenso infinito», que el propio Fermat utilizó, aunque no para demostrar esta conjetura, demostró la no existencia de solución para la potencia tres. Así se lo anunció a Goldbach en una carta fechada en agosto de 1753. Un siglo después de la muerte de Fermat, tan sólo se había demostrado la validez de su teorema para las potencias 3 y 4. Si le he de ser sincero –continuó Lardy–, no creo que en este asunto de Fermat se haya avanzado mucho desde entonces. En cualquier caso, le prepararé una bibliografía lo más exhaustiva que pueda acerca de este enigma. Trabaje usted con ella y luego propóngame una vía de ataque, la discutiremos. Creo que ha llegado el momento de que tengamos un encuentro en la cancha de tenis. La he reservado para dentro de media hora. ¿Es tiempo suficiente?

JOAQUÍN LEGUINA

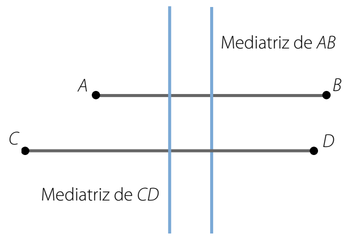
En 1994, Wiles demostró, tras ocho años de intenso trabajo, que el teorema de Fermat es verdadero. Lo más curioso es que, para $n = 2$, la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ tiene infinitas soluciones enteras. En esta ecuación, si consideramos z como una constante, por ejemplo, $z = 5$, obtenemos la ecuación de una figura geométrica que no es una recta.
¿Qué figura crees que puede ser?

$x^2 + y^2 = z^2$

Si $z = 5 \rightarrow x^2 + y^2 = 5^2$ es una circunferencia de centro (0, 0) y radio 5, porque los puntos que verifican esta ecuación equidistan del origen de coordenadas una medida constante de 5 unidades.

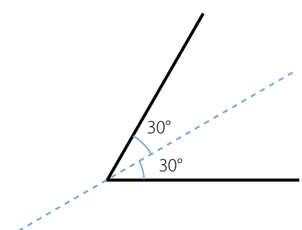
ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Dibuja dos segmentos *AB* y *CD*, paralelos entre sí, de 8 cm y 10 cm, y traza con la escuadra sus mediatrices. ¿Cómo son las mediatrices entre sí?



Las mediatrices son paralelas.

002 Dibuja un ángulo de 60° y traza su bisectriz. Comprueba que el ángulo queda dividido en dos partes iguales.



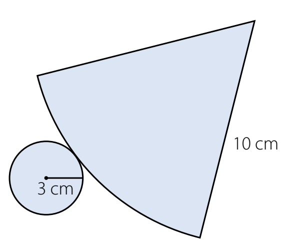
003 Si el radio de una circunferencia mide 12 cm, ¿cuánto medirá su diámetro?

El diámetro medirá el doble: 24 cm.

004 ¿Qué tipo de poliedro es un cubo? ¿Y un ortoedro?

Un cubo es un prisma. Un ortoedro es un prisma también.

005 Dibuja el desarrollo plano de un cono con radio de la base 3 cm y generatriz 10 cm.



006 Halla la ecuación de la recta:

a) Paralela al eje *X* y que pasa por $P(1, 3)$.

b) Paralela al eje *Y* y que pasa por $P(-1, 4)$.

a) $y = 3$ b) $x = -1$

ACTIVIDADES

001 **Si en vez de una superficie cónica se utiliza un cilindro, ¿qué cónicas se pueden obtener?**

Si el plano es perpendicular a la generatriz del cilindro, la sección es una circunferencia.

Si no es perpendicular, la sección es una elipse.

002 **Razona por qué la parábola es una sección cónica que no tiene dos ramas.**

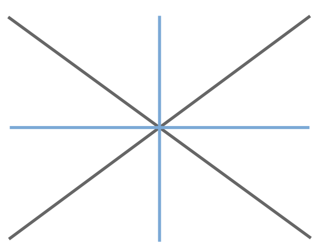
Porque el plano solo corta a uno de los conos de la superficie cónica.

003 **Dibuja el lugar geométrico de los puntos que equidistan de dos rectas:**

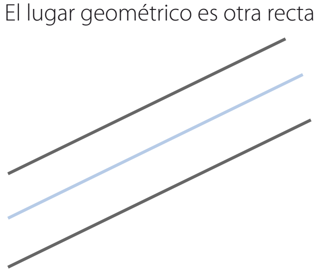
a) Que se cortan.

b) Que son paralelas.

a) El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de los ángulos que forman las rectas al cortarse.



b) El lugar geométrico es otra recta paralela a ambas.



004 **Halla el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de coordenadas cartesianas es 10.**

¿Y si la condición del lugar geométrico es que su producto sea 10?

Los puntos que verifican la primera condición forman una recta de ecuación: $x + y = 10$

Los puntos que verifican la segunda condición forman una hipérbola equilátera de ecuación: $xy = 10$

005 **Los ejes mayor y menor de una elipse miden, respectivamente, 10 y 6 cm. Halla la distancia que hay entre los dos focos de la elipse y también la distancia que hay hasta los vértices.**

$2a = 10$ cm $\rightarrow a = 5$ cm

$2b = 6$ cm $\rightarrow b = 3$ cm

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 4$ cm

Luego la distancia entre los focos es de 8 cm.

La distancia desde los focos hasta los vértices A y A' es de 1 cm y hasta los vértices B y B' es de 5 cm.

006 **Un punto de una elipse dista de cada uno de los focos 6 y 7 cm, respectivamente, y la longitud del eje menor es 6,6 cm. Calcula la longitud del eje mayor y la distancia entre los focos.**

$2a = d(P, F) + d(P, F') = 6 + 7 = 13$ cm

El eje mayor mide 13 cm.

$2a = 13$ cm $\rightarrow a = 6{,}5$ cm

$2b = 6{,}6$ cm $\rightarrow b = 3{,}3$ cm

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 5{,}6$ cm

Así, la distancia entre los focos mide 11,2 cm.

007 **Calcula la ecuación de una elipse cuyos focos son los puntos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$ y dos de sus vértices se sitúan en los puntos $A(8, 0)$ y $A'(-8, 0)$.**

$$\left.\begin{array}{l} c = 5 \\ a = 8 \end{array}\right\} \rightarrow b = \sqrt{39} \rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$$

008 **Halla la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos:**

(−4, 0) (0, −2) (4, 0) (0, 2)

$$\left.\begin{array}{l} a = 4 \\ b = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

009 **Halla los focos y los vértices de las elipses.**

a) $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{25} = 1$ **b)** $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{64} = 1$

a) $$\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{25} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 11 \rightarrow A(11, 0) \quad A'(-11, 0) \\ b = 5 \rightarrow B(0, 5) \quad B'(0, -5) \end{cases}$$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{96} = 4\sqrt{6} \rightarrow F\left(4\sqrt{6}, 0\right) \quad F'\left(-4\sqrt{6}, 0\right)$

b) $$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{64} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 9 \rightarrow A(9, 0) \quad A'(-9, 0) \\ b = 8 \rightarrow B(0, 8) \quad B'(0, -8) \end{cases}$$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{17} \rightarrow F\left(\sqrt{17}, 0\right) \quad F'\left(-\sqrt{17}, 0\right)$

010 Calcula las excentricidades de estas elipses.

a) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{121}=1$ b) $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{9}=1$

a) $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{121}=1 \rightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=11 \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=\sqrt{23} \rightarrow e=\frac{\sqrt{23}}{12}=0{,}39$

b) $\frac{x^2}{225}+\frac{y^2}{9}=1 \rightarrow \begin{cases} a=15 \\ b=3 \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=\sqrt{216}=6\sqrt{6} \rightarrow e=\frac{6\sqrt{6}}{15}=\frac{2\sqrt{6}}{5}=0{,}97$

011 En una hipérbola, la distancia entre los vértices es de 8 cm, si $B(0, 3)$ y su punto simétrico es $B'(0, -3)$. Calcula los focos de la hipérbola.

$2a=8 \rightarrow a=4$

$b=3$

Como $c^2=a^2+b^2 \rightarrow c=5 \rightarrow F(5, 0)$ $F'(-5, 0)$

012 Conocidos los focos de una hipérbola: $F(10, 0)$ y $F'(-10, 0)$, y sabiendo que la distancia entre los vértices es de 16 unidades, halla B y B'.

$c=10$

$2a=16 \rightarrow a=8$

Como $c^2=a^2+b^2 \rightarrow b=6 \rightarrow B(0, 6)$ $B'(0, -6)$

013 Calcula la ecuación de la hipérbola que tiene dos de sus vértices en $(-6, 0)$ y $(6, 0)$ y que pasa por el punto $\left(36, 7\sqrt{35}\right)$.

$a=6$

Como $c^2=a^2+b^2 \rightarrow b^2=c^2-36$

Así, la ecuación de la hipérbola es de la forma: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{c^2-36}=1$

Como el punto $\left(36, 7\sqrt{35}\right)$ pertenece a la hipérbola:

$$\frac{36^2}{36}-\frac{1.715}{c^2-36}=1 \rightarrow 36-\frac{1.715}{c^2-36}=1 \rightarrow \frac{1.715}{c^2-36}=35 \rightarrow c^2-36=49$$
$$\rightarrow c^2=85 \rightarrow c=\sqrt{85}$$

La ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{49}=1$

014 Halla la ecuación de la hipérbola que tiene sus focos en los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$ y sus vértices en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$.

$$\left.\begin{matrix} c=2 \\ a=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow b=\sqrt{3} \rightarrow \frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$$

015 Halla los focos y los vértices de la hipérbola que tiene por ecuación:

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{144} = 1$$

$$\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{144} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 15 \rightarrow A(15, 0) \quad A'(-15, 0) \\ b = 12 \rightarrow B(0, 12) \quad B'(0, -12) \end{cases}$$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{369} = 3\sqrt{41} \rightarrow F\left(3\sqrt{41}, 0\right) \qquad F'\left(-3\sqrt{41}, 0\right)$

016 Calcula la excentricidad de las hipérbolas que vienen dadas por estas ecuaciones.

a) $\dfrac{x^2}{225} - \dfrac{y^2}{196} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{121} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

a) $\dfrac{x^2}{225} - \dfrac{y^2}{196} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 15 \\ b = 14 \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{421} \rightarrow e = \dfrac{\sqrt{421}}{15} = 1{,}36$

b) $\dfrac{x^2}{121} - \dfrac{y^2}{36} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 11 \\ b = 6 \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{157} \rightarrow e = \dfrac{\sqrt{157}}{11} = 1{,}13$

017 Halla la ecuación de la parábola con vértice en el origen de coordenadas y foco $F(0, 2)$.

$p = 4 \rightarrow x^2 = 8y$

018 Calcula la ecuación de la parábola que tiene el vértice en el origen de coordenadas y foco $F(2, 0)$.

$p = 4 \rightarrow y^2 = 8x$

019 Determina la ecuación de la circunferencia con centro $C(-3, 1)$ y que pasa por el origen de coordenadas.

$r = d(P, C) = \sqrt{(-3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{10}$

La ecuación de la circunferencia es: $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 10 \rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$

020 Calcula el centro y la longitud del radio de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$.

Como $A = -2a$: $2 = -2a \rightarrow a = -1$

Como $B = -2b$: $2 = -2b \rightarrow b = -1$

Como $C = a^2 + b^2 - r^2$: $2 - r^2 = 0 \rightarrow r = \sqrt{2}$

Así, el centro es $C(-1, -1)$ y el radio mide $\sqrt{2}$

021 **Estudia la posición relativa de las circunferencias.**

$$x^2 + y^2 - 9 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 9 = 0 \rightarrow \begin{cases} C_1(0, 0) \\ r_1 = 3 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} C_2(1, 1) \\ r_2 = 1 \end{cases}$$

$$d(C_1, C_2) = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2} < r_2 - r_1 = 2$$

Las circunferencias son interiores.

022 **Encuentra una circunferencia tangente interior a la circunferencia de ecuación $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$.**

Respuesta abierta.

Una de las circunferencias tangentes interiores es: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$

023 **Discute la posición relativa de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ y los ejes de coordenadas.**

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} C(3, -2) \\ r = 3 \end{cases}$$

La distancia del centro al eje de abscisas es: $d(C, r) = \dfrac{|-2|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 2$

Al ser menor que el radio, el eje es secante a la circunferencia.

La distancia del centro al eje de ordenadas es: $d(C, s) = \dfrac{|3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = 3$

Al coincidir con el radio, el eje es tangente a la circunferencia.

024 **Encuentra tres rectas no paralelas, que sean secante, tangente y exterior a la circunferencia de ecuación $x^2 + (y - 3)^2 = 36$.**

Respuesta abierta.

Una recta secante es: $x - y = 0$

Una recta tangente es: $y + 3 = 0$

Una recta exterior es: $x - 7 = 0$

025 **Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de $A(3, -5)$ y de $B(7, 1)$. ¿De qué figura se trata?**

Sea (x, y) un punto equidistante de A y B:

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+5)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2}$$

$$\rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$$

$$\rightarrow 2x + 3y - 4 = 0$$

Se trata de una recta, la mediatriz del segmento AB.

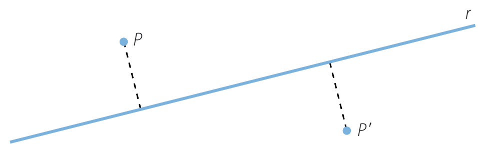
026 Halla el lugar geométrico de los puntos que distan 3 unidades del punto $P(-1, 4)$. ¿De qué figura se trata?

Sea (x, y) un punto del lugar geométrico, entonces:

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}=3 \rightarrow (x+1)^2+(y-4)^2=9 \rightarrow x^2+y^2+2x-8y+8=0$$

Esta es la ecuación de la circunferencia de centro $(-1, 4)$ y radio 3.

027 Calcula el lugar geométrico de los puntos que distan 4 unidades de la recta r: $4x-2y+5=0$.



Sea (x, y) un punto del lugar geométrico, entonces: $\dfrac{|4x-2y+5|}{\sqrt{4^2+(-2)^2}}=4$

$$\rightarrow |4x-2y+5|=4\sqrt{20} \rightarrow |4x-2y+5|=8\sqrt{5} \rightarrow \begin{cases} 4x-2y+5-8\sqrt{5}=0 \\ -4x+2y-5-8\sqrt{5}=0 \end{cases}$$

028 Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los siguientes pares de rectas.

a) $3x-4y-26=0$ y $12x+5y+1=0$ b) $-2x+7y+9=0$ y $4x-14y+11=0$

a) $$\frac{|3x-4y-26|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|12x+5y+1|}{\sqrt{12^2+5^2}} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{3x-4y-26}{5}=\dfrac{12x+5y+1}{13} \\ \dfrac{3x-4y-26}{5}=\dfrac{-12x-5y-1}{13} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 39x-52y-338=60x+25y+5 \\ 39x-52y-338=-60x-25y-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x-11y+49=0 \\ 11x-3y-37=0 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por las dos bisectrices de las rectas.

b) $$\frac{|-2x+7y+9|}{\sqrt{(-2)^2+7^2}}=\frac{|4x-14y+11|}{\sqrt{4^2+(-14)^2}} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{-2x+7y+9}{\sqrt{53}}=\dfrac{4x-14y+11}{2\sqrt{53}} \\ \dfrac{-2x+7y+9}{\sqrt{53}}=\dfrac{-4x+14y-11}{2\sqrt{53}} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -4x+14y+18=4x-14y+11 \\ -4x+14y+18=-4x+14y-11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 8x-28y-7=0 \\ 0=0 \end{cases}$$

Como las rectas son paralelas, el lugar geométrico es otra recta paralela a ambas.

029 Determina el lugar geométrico de los puntos que están a doble distancia del punto $P(3, 5)$ que del punto $Q(1, -2)$. ¿Qué figura es?

Sea (x, y) un punto del lugar geométrico.

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2}=2\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$$

$$\rightarrow x^2-6x+9+y^2-10y+25=4(x^2-2x+1+y^2+4y+4)$$

$$\rightarrow 3x^2+3y^2-2x+26y-14=0$$

La figura es la circunferencia de ecuación: $x^2+y^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{26}{3}y-\dfrac{14}{3}=0$

030 **Calcula el lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia a la recta de ecuación $3x - 5y - 15 = 0$ tenga el mismo valor que la ordenada y.**

Sea (x, y) un punto del lugar geométrico.

$$\frac{|3x - 5y - 15|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2}} = y \rightarrow |3x - 5y - 15| = \sqrt{34}\,y$$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x - 5y - 15 = \sqrt{34}\,y \\ -3x + 5y + 15 = \sqrt{34}\,y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - \left(5 + \sqrt{34}\right)y - 15 = 0 \\ 3x - \left(5 - \sqrt{34}\right)y - 15 = 0 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por dos rectas perpendiculares.

031 **Halla el lugar geométrico de los puntos del plano Q tales que el punto medio del segmento PQ: $P(2, 6)$, es un punto de la recta que tiene por ecuación $2x + 4y - 5 = 0$.**

Si $Q(x, y)$ es un extremo del segmento PQ, su punto medio es de la forma:

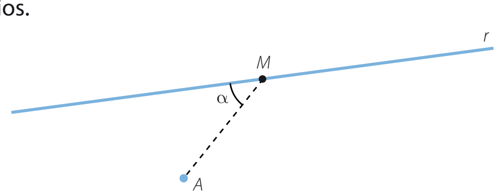
$$\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+6}{2}\right)$$

Si este punto pertenece a la recta:

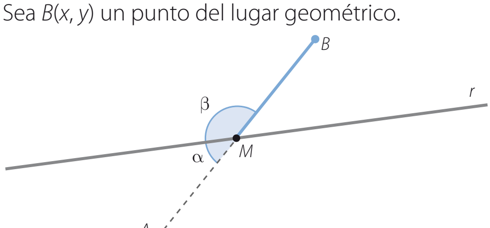
$$2 \cdot \frac{x+2}{2} + 4 \cdot \frac{y+6}{2} - 5 = 0 \rightarrow x + 2y + 9 = 0$$

El lugar geométrico es otra recta.

032 **Consideramos la recta r: $3x - 2y + 15 = 0$ y el punto $A(-1, 2)$. Encuentra el lugar geométrico de los puntos B tales que, para cada punto M de la recta, se verifica que $\overline{AM} = \overline{MB}$ y, además, los ángulos que forman dichos segmentos con la recta son suplementarios.**



Sea $B(x, y)$ un punto del lugar geométrico.



Si los puntos M verifican las condiciones del enunciado, son los puntos medios de los segmentos AB para cada punto B, siendo: $M\left(\frac{-1+x}{2}, \frac{2+y}{2}\right)$

Como los puntos M pertenecen a la recta r, se verifica que:

$$3 \cdot \frac{-1+x}{2} - 2 \cdot \frac{2+y}{2} + 15 = 0 \rightarrow -3 + 3x - 4 - 2y + 30 = 0 \rightarrow 3x - 2y + 23 = 0$$

El lugar geométrico es una recta paralela a r.

033 Halla los vértices, los focos y las excentricidades de las siguientes elipses.

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

c) $25x^2+16y^2=1.600$

d) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

e) $9x^2+25y^2=900$

f) $x^2+2y^2=16$

a) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \rightarrow \begin{cases} a=5 \rightarrow A(5,0) \quad A'(-5,0) \\ b=3 \rightarrow B(0,3) \quad B'(0,-3) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=4 \rightarrow F(4,0) \qquad F'(-4,0)$

La excentricidad es: $e=\frac{4}{5}=0,8$

b) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1 \rightarrow \begin{cases} b=4 \rightarrow B(4,0) \quad B'(-4,0) \\ a=5 \rightarrow A(0,5) \quad A'(0,-5) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=3 \rightarrow F(0,4) \qquad F'(0,-4)$

La excentricidad es: $e=\frac{3}{5}=0,6$

c) $25x^2+16y^2=1.600 \rightarrow \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1 \rightarrow \begin{cases} b=8 \rightarrow A(8,0) \quad A'(-8,0) \\ a=10 \rightarrow B(0,10) \quad B'(0,-10) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=6 \rightarrow F(0,6) \qquad F'(0,-6)$

La excentricidad es: $e=\frac{6}{10}=0,6$

d) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \rightarrow \begin{cases} a=5 \rightarrow A(5,0) \quad A'(-5,0) \\ b=4 \rightarrow B(0,4) \quad B'(0,-4) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=3 \rightarrow F(3,0) \qquad F'(-3,0)$

La excentricidad es: $e=\frac{3}{5}=0,6$

e) $9x^2+25y^2=900 \rightarrow \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1 \rightarrow \begin{cases} a=10 \rightarrow A(10,0) \quad A'(-10,0) \\ b=6 \rightarrow B(0,6) \quad B'(0,-6) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=8 \rightarrow F(8,0) \qquad F'(-8,0)$

La excentricidad es: $e=\frac{8}{10}=0,8$

f) $x^2+2y^2=16 \rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1 \rightarrow \begin{cases} a=4 \longrightarrow A(4,0) \quad A'(-4,0) \\ b=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \rightarrow B\left(0,2\sqrt{2}\right) \quad B'\left(0,-2\sqrt{2}\right) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=2\sqrt{2} \rightarrow F\left(2\sqrt{2},0\right) \quad F'\left(-2\sqrt{2},0\right)$

La excentricidad es: $e=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0,707$

034 Busca tres puntos de la elipse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ y determina sus focos. Comprueba que la suma de las distancias de esos puntos a los focos coincide con el eje mayor.

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1 \rightarrow \begin{cases} a=10 \rightarrow 2a=20 \\ b=6 \end{cases}$$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=8 \rightarrow F(8, 0) \qquad F'(-8, 0)$

Tres puntos de la elipse son:

$$A(10, 0) \rightarrow d(A, F)+d(A, F')=\sqrt{(10-8)^2+(0-0)^2}+\sqrt{(10+8)^2+(0-0)^2}= \\ =2+18=20$$

$$B(0, 6) \rightarrow d(B, F)+d(B, F')=\sqrt{(0-8)^2+(6-0)^2}+\sqrt{(0+8)^2+(-6-0)^2}= \\ =10+10=20$$

$$C\left(5, 3\sqrt{3}\right) \rightarrow d(C, F)+d(C, F')=\sqrt{(5-8)^2+(3\sqrt{3}-0)^2}+\sqrt{(5+8)^2+(3\sqrt{3}-0)^2}= \\ =6+14=20$$

035 Encuentra las ecuaciones de las elipses que cumplen las siguientes condiciones.

a) La excentricidad es 0,6 y su eje mayor mide 20.

b) Los focos son (6, 0) y (−6, 0) y su excentricidad es $\frac{1}{3}$.

c) Pasa por el punto (3, −2) y su eje mayor mide 10.

d) Sus focos están en (4, 0) y (−4, 0) y dos de sus vértices son (5, 0) y (−5, 0).

a) $2a=20 \rightarrow a=10$

Si $e=0{,}6 \rightarrow c=6$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow b=8 \rightarrow \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

b) $c=6$

Si $e=\frac{1}{3} \rightarrow a=18$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow b=12\sqrt{2} \rightarrow \frac{x^2}{324}+\frac{y^2}{288}=1$

c) $2a=10 \rightarrow a=5$

Por ser el punto (3, 2) un punto de la elipse:

$$\frac{9}{25}+\frac{4}{b^2}=1 \rightarrow \frac{4}{b^2}=\frac{16}{25} \rightarrow b^2=\frac{25}{4} \rightarrow b=\frac{5}{2}$$

Así, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{25}{4}}=1 \rightarrow x^2+4y^2=25$$

d) $\left.\begin{array}{l} c=4 \\ a=5 \end{array}\right\}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow b=3 \rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

036 Determina la ecuación de una elipse en la que el eje mayor mide el doble que el menor y uno de los focos se halla en (−7, 0).

$c = 7$

$2a = 2 \cdot 2b \rightarrow a = 2b$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow 4b^2 = b^2 + 49 \rightarrow b^2 = \dfrac{49}{3} \rightarrow b = \dfrac{7\sqrt{3}}{3} \rightarrow a = \dfrac{14\sqrt{3}}{3}$

Por tanto, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{\frac{196}{3}} + \frac{y^2}{\frac{49}{3}} = 1 \rightarrow 3x^2 + 12y^2 = 196$$

037 Calcula la intersección de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 72$ y la recta $2\left(\sqrt{2} - 1\right)x + 3y - 6\sqrt{2} = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} 4x^2 + 9y^2 = 72 \\ 2\left(\sqrt{2} - 1\right)x + 3y - 6\sqrt{2} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{6\sqrt{2} - 2\left(\sqrt{2} - 1\right)x}{3}$$

Sustituyendo, tenemos que:

$$4x^2 + \left(6\sqrt{2} - 2\left(\sqrt{2} - 1\right)x\right)^2 = 72$$

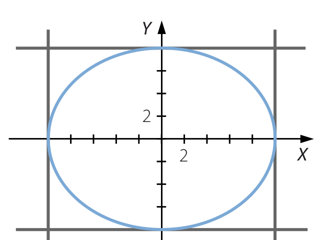
$$\rightarrow 4x^2 + 72 - 24\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)x + 4\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 x^2 = 72$$

$$\rightarrow 4x^2 - 48x + 24\sqrt{2}\,x + 8x^2 - 8\sqrt{2}\,x^2 + 4x^2 = 0$$

$$\rightarrow \left(2 - \sqrt{2}\right)x^2 - 3\left(2 - \sqrt{2}\right)x = 0 \rightarrow x^2 - 3x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Los puntos de intersección son: $P\left(0, 2\sqrt{2}\right)$ y $Q(3, 2)$

038 Una elipse es tangente a los lados del rectángulo definido por las rectas $y = 8$, $y = -8$, $x = 10$ y $x = -10$. Halla su ecuación y las coordenadas de cinco puntos.



$$\left.\begin{array}{l} a = 10 \\ b = 8 \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

Cinco puntos de la elipse son: $A(10, 0)$, $A'(-10, 0)$, $B(0, 8)$, $B'(0, -8)$ y $C\left(5, 4\sqrt{3}\right)$

039 Decide la posición relativa de las rectas respecto de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

a) $2x + 3y - 5 = 0$ b) $-3x + 2y - 20 = 0$ c) $3x + 10y - 15\sqrt{5} = 0$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y - 5 = 0 \\ 9x^2 + 25y^2 = 225 \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{5 - 2x}{3}$

Sustituyendo, tenemos que:

$$9x^2 + 25 \cdot \frac{25 - 20x + 4x^2}{9} = 225 \rightarrow 81x^2 + 625 - 500x + 100x^2 = 2.025$$
$$\rightarrow 181x^2 - 500x - 1.400 = 0$$

$\Delta = 1.263.600 > 0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones; por tanto, la elipse y la recta son secantes.

b) $\left.\begin{array}{r} -3x + 2y - 20 = 0 \\ 9x^2 + 25y^2 = 225 \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{3x + 20}{2}$

Sustituyendo, tenemos que:

$$9x^2 + 25 \cdot \frac{9x^2 + 120x + 400}{4} = 225 \rightarrow 36x^2 + 225x^2 + 3.000x + 10.000 = 900$$
$$\rightarrow 261x^2 + 3.000x + 9.100 = 0$$

$\Delta = -500.400 < 0 \rightarrow$ La ecuación no tiene solución; por tanto, la elipse y la recta son exteriores.

c) $\left.\begin{array}{r} 3x + 10y - 15\sqrt{5} = 0 \\ 9x^2 + 25y^2 = 225 \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{15\sqrt{5} - 3x}{10}$

Sustituyendo, tenemos que:

$$9x^2 + 25 \cdot \frac{1.125 - 90\sqrt{5}x + 9x^2}{100} = 225 \rightarrow 36x^2 + 1.125 - 90\sqrt{5}x + 9x^2 = 900$$
$$\rightarrow 45x^2 - 90\sqrt{5}x + 225 = 0$$

$\Delta = 0 \rightarrow$ La ecuación tiene una solución; por tanto, la elipse y la recta son tangentes.

040 Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a (0, −12) y a (0, 12) es 26.

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+12)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-12)^2} = 26$$
$$\rightarrow \sqrt{x^2 + (y+12)^2} = 26 - \sqrt{x^2 + (y-12)^2}$$
$$\rightarrow x^2 + (y+12)^2 = 26^2 + x^2 + (y-12)^2 - 52\sqrt{x^2 + (y-12)^2}$$
$$\rightarrow y^2 + 144 + 24y = 676 + y^2 + 144 - 24y - 52\sqrt{x^2 + y^2 + 144 - 24y}$$
$$\rightarrow 52\sqrt{x^2 + y^2 + 144 - 24y} = 676 - 48y$$
$$\rightarrow 13\sqrt{x^2 + y^2 + 144 - 24y} = 169 - 12y$$
$$\rightarrow 169x^2 + 169y^2 + 24.336 - 4.056y = 28.561 + 144y^2 - 4.056y$$
$$\rightarrow 169x^2 + 25y^2 = 4.225 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$$

041

Determina los focos, los vértices, las asíntotas y las excentricidades de las siguientes hipérbolas.

a) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$

b) $\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{x^2}{16}=1$

c) $16y^2-25x^2=1.600$

d) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$

e) $9x^2-25y^2=900$

f) $x^2-2y^2=16$

a) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1\rightarrow\begin{cases}a=5\rightarrow A(5,0)\quad A'(-5,0)\\ b=3\rightarrow B(0,3)\quad B'(0,-3)\end{cases}$

Como $c^2=a^2+b^2\rightarrow c=\sqrt{34}\rightarrow F\left(\sqrt{34},0\right)\quad F'\left(-\sqrt{34},0\right)$

La excentricidad es: $e=\dfrac{\sqrt{34}}{5}=1{,}16$

b) $\dfrac{y^2}{25}-\dfrac{x^2}{16}=1\rightarrow\begin{cases}a=5\rightarrow A(0,5)\quad A'(0,-5)\\ b=4\rightarrow B(4,0)\quad B'(-4,0)\end{cases}$

Como $c^2=a^2+b^2\rightarrow c=\sqrt{41}\rightarrow F\left(0,\sqrt{41}\right)\quad F'\left(0,-\sqrt{41}\right)$

La excentricidad es: $e=\dfrac{\sqrt{41}}{5}=1{,}28$

c) $16y^2-25x^2=1.600\rightarrow\dfrac{y^2}{100}-\dfrac{x^2}{64}=1\rightarrow\begin{cases}a=10\rightarrow A(0,10)\quad A'(0,-10)\\ b=8\rightarrow B(8,0)\quad B'(-8,0)\end{cases}$

Como $c^2=a^2+b^2\rightarrow c=2\sqrt{41}\rightarrow F\left(0,2\sqrt{41}\right)\quad F'\left(0,-2\sqrt{41}\right)$

La excentricidad es: $e=\dfrac{2\sqrt{41}}{10}=1{,}28$

d) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1\rightarrow\begin{cases}a=5\rightarrow A(5,0)\quad A'(-5,0)\\ b=4\rightarrow B(0,4)\quad B'(0,-4)\end{cases}$

Como $c^2=a^2+b^2\rightarrow c=\sqrt{41}\rightarrow F\left(\sqrt{41},0\right)\quad F'\left(-\sqrt{41},0\right)$

La excentricidad es: $e=\dfrac{\sqrt{41}}{5}=1{,}28$

e) $9x^2-25y^2=900\rightarrow\dfrac{x^2}{100}-\dfrac{y^2}{36}=1\rightarrow\begin{cases}a=10\rightarrow A(10,0)\quad A'(-10,0)\\ b=6\rightarrow B(0,6)\quad B'(0,-6)\end{cases}$

Como $c^2=a^2+b^2\rightarrow c=2\sqrt{34}\rightarrow F\left(2\sqrt{34},0\right)\quad F'\left(-2\sqrt{34},0\right)$

La excentricidad es: $e=\dfrac{2\sqrt{34}}{10}=1{,}16$

f) $x^2-2y^2=16\rightarrow\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{8}=1\rightarrow\begin{cases}a=4\longrightarrow A(4,0)\quad A'(-4,0)\\ b=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\rightarrow B\left(0,2\sqrt{2}\right)\quad B'\left(0,-2\sqrt{2}\right)\end{cases}$

Como $c^2=a^2+b^2\rightarrow c=2\sqrt{6}\rightarrow F\left(2\sqrt{6},0\right)\quad F'\left(-2\sqrt{6},0\right)$

La excentricidad es: $e=\dfrac{2\sqrt{6}}{4}=1{,}22$

042 Halla dos puntos de la hipérbola $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1$, determina sus focos y comprueba que la diferencia de las distancias de esos puntos a los focos coincide con el eje focal.

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{36} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 10 \rightarrow 2a = 20 \\ b = 6 \end{cases}$$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = 2\sqrt{34} \rightarrow F\left(2\sqrt{34}, 0\right) \quad F'\left(-2\sqrt{34}, 0\right)$

Dos puntos de la hipérbola son:

$A(10, 0) \rightarrow (d(A, F) - d(A, F'))^2 =$

$$= \left(\sqrt{\left(10 - 2\sqrt{34}\right)^2 + (0-0)^2} - \sqrt{\left(10 + 2\sqrt{34}\right)^2 + (0-0)^2}\right)^2 =$$
$$= \left(\sqrt{236 - 40\sqrt{34}} - \sqrt{236 + 40\sqrt{34}}\right)^2 =$$
$$= 236 - 40\sqrt{34} + 236 + 40\sqrt{34} - 2\sqrt{55.696 - 54.400} =$$
$$= 472 - 72 = 400 \rightarrow d(A, F) - d(A, F') = 20$$

$A'(-10, 0) \rightarrow (d(A', F) - d(A', F'))^2 =$

$$= \left(\sqrt{\left(-10 - 2\sqrt{34}\right)^2 + (0-0)^2} - \sqrt{\left(-10 + 2\sqrt{34}\right)^2 + (0-0)^2}\right)^2 =$$
$$= \left(\sqrt{236 + 40\sqrt{34}} - \sqrt{236 - 40\sqrt{34}}\right)^2 =$$
$$= 236 + 40\sqrt{34} + 236 - 40\sqrt{34} - 2\sqrt{55.696 - 54.400} =$$
$$= 472 - 72 = 400 \rightarrow d(A', F) - d(A', F') = 20$$

043 Encuentra las ecuaciones de las hipérbolas que cumplen las siguientes condiciones.

a) Sus asíntotas son $y = 2x$ e $y = -2x$ y un foco tiene por coordenadas $\left(3\sqrt{5}, 0\right)$.

b) Los focos son $(-5, 0)$ y $(5, 0)$ y la distancia entre sus vértices es 8.

c) Las asíntotas son $y = \frac{1}{3}x$ e $y = -\frac{1}{3}x$ y pasa por el punto $\left(3\sqrt{29}, 5\right)$.

d) Un foco es $(6, 0)$ y su excentricidad es 1,2.

a) $\frac{b}{a} = 2 \rightarrow b = 2a \qquad c = 3\sqrt{5}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 45 = a^2 + 4a^2 \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = 3 \rightarrow b = 6 \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

b) $c = 5 \qquad 2a = 8 \rightarrow a = 4$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 25 = 16 + b^2 \rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = 3 \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

c) $\frac{b}{a} = \frac{1}{3} \rightarrow a = 3b$

Por ser el punto $\left(3\sqrt{29}, 5\right)$ un punto de la hipérbola:

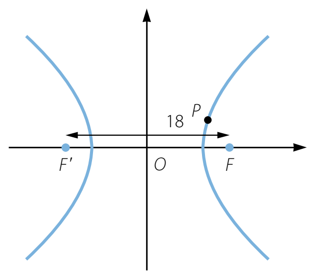
$$\frac{261}{9b^2} - \frac{25}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{36}{9b^2} = 1 \rightarrow b^2 = 4 \rightarrow b = 2 \rightarrow a = 6$$

Así, la ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$

d) $c = 6$ $\qquad e = \frac{c}{a} = 1{,}2 \rightarrow a = 5$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b = \sqrt{11} \rightarrow \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$

044 Encuentra la ecuación de una hipérbola cuyo eje focal mide 18 y pasa por el punto $P(15, 4)$.



$2a = 18 \rightarrow a = 9$

Por pertenecer el punto (15, 4) a la hipérbola:

$$\frac{225}{81} - \frac{16}{b^2} = 1 \rightarrow 225b^2 - 1.296 = 81b^2$$
$$\rightarrow 144b^2 = 1.296 \rightarrow b = 3$$

Así, la ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$

045 El foco de una hipérbola se halla a una distancia de 2 unidades de un vértice y a 18 unidades del otro. Escribe su ecuación.

$$\left.\begin{array}{r} d(A, F) = 2 \\ d(A', F) = 18 \end{array}\right\} \rightarrow d(A, A') = 16 \rightarrow a = 8$$

Al ser $d(A, F) = 2 \rightarrow c = 10$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b = 6 \rightarrow \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

046 Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de las distancias a (0, −12) y a (0, 12) es 10.

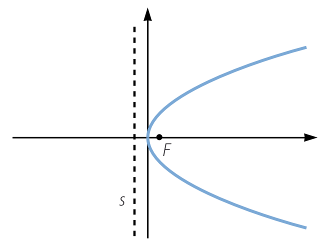
$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+12)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-12)^2} = 10$$
$$\rightarrow \sqrt{x^2 + (y+12)^2} = 10 + \sqrt{x^2 + (y-12)^2}$$
$$\rightarrow x^2 + (y+12)^2 = 10^2 + x^2 + (y-12)^2 + 20\sqrt{x^2 + (y-12)^2}$$
$$\rightarrow y^2 + 144 + 24y = 100 + y^2 + 144 - 24y + 20\sqrt{x^2 + y^2 + 144 - 24y}$$
$$\rightarrow 48y - 100 = 20\sqrt{x^2 + y^2 + 144 - 24y}$$
$$\rightarrow 12y - 25 = 5\sqrt{x^2 + y^2 + 144 - 24y}$$
$$\rightarrow 144y^2 - 600y + 625 = 25x^2 + 25y^2 + 3.600 - 600y$$
$$\rightarrow 119y^2 - 25x^2 = 2.975 \rightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{119} = 1$$

047 Encuentra el foco y la directriz de las siguientes parábolas. Representálas gráficamente.

a) $y^2 = 10x$
b) $y^2 = 7x$
c) $x^2 = 6y$
d) $x^2 = y$
e) $y^2 = -10x$
f) $x^2 = -6y$

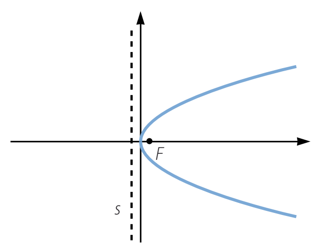
a) $2p = 10 \rightarrow p = 5 \rightarrow F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

Directriz: $x = -\frac{5}{2}$



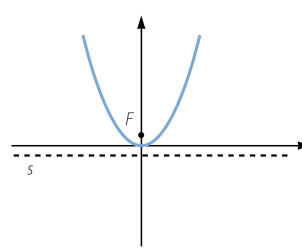
b) $2p = 7 \rightarrow p = \frac{7}{2} \rightarrow F\left(\frac{7}{4}, 0\right)$

Directriz: $x = -\frac{7}{2}$



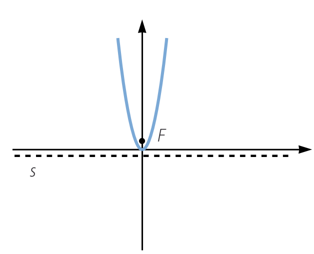
c) $2p = 6 \rightarrow p = 3 \rightarrow F\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = -\frac{3}{2}$



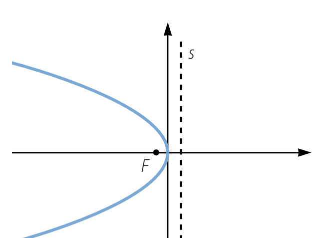
d) $2p = 1 \rightarrow p = \frac{1}{2} \rightarrow F\left(0, \frac{1}{4}\right)$

Directriz: $y = -\frac{1}{4}$



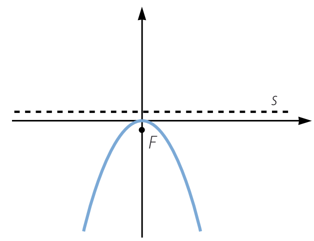
e) $2p = -10 \rightarrow p = -5 \rightarrow F\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

Directriz: $x = \frac{5}{2}$



f) $2p = -6 \rightarrow p = -3 \rightarrow F\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = \frac{3}{2}$



048 Halla la ecuación reducida de una parábola de vértice (0, 0) y directriz horizontal, y que pasa por el punto (−3, 8).

La ecuación de la parábola es de la forma: $x^2 = 2py$

Como pasa por el punto (−3, 8): $9 = 2p \cdot 8 \rightarrow p = \frac{9}{16} \rightarrow x^2 = \frac{9}{8}y$

049 Busca la ecuación reducida de una parábola de vértice (0, 0) y directriz vertical, sabiendo que pasa por el punto (5, −4).

La ecuación de la parábola es de la forma: $y^2 = 2px$

Como pasa por el punto (5, −4): $16 = 2p \cdot 5 \rightarrow p = \frac{8}{5} \rightarrow y^2 = \frac{16}{5}x$

050 Obtén los vértices, focos y directrices de las parábolas.

a) $y^2 = 2(x-3)$
b) $(y-1)^2 = 4(x-4)$
c) $x^2 = 6(y-2)$
d) $(x-3)^2 = 8(y+1)$
e) $x^2 = -4(y+1)$
f) $(y+3)^2 = -8(x-1)$

a) $V(3, 0)$

$2p = 2 \rightarrow p = 1 \rightarrow F\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ Directriz: $x = \frac{5}{2}$

b) $V(4, 1)$

$2p = 4 \rightarrow p = 2 \rightarrow F(5, 1)$ Directriz: $x = 3$

c) $V(0, 2)$

$2p = 6 \rightarrow p = 3 \rightarrow F\left(0, \frac{7}{2}\right)$ Directriz: $y = \frac{1}{2}$

d) $V(3, -1)$

$2p = 8 \rightarrow p = 4 \rightarrow F(3, 1)$ Directriz: $y = -3$

e) $V(0, -1)$

$2p = 4 \rightarrow p = 2 \rightarrow F(0, -3)$ Directriz: $y = 1$

f) $V(1, -3)$

$2p = 8 \rightarrow p = 4 \rightarrow F(-1, -3)$ Directriz: $x = 3$

051 Halla la ecuación de estas parábolas.

a) Foco en (3, 0) y directriz $x = -8$.
b) Foco en (0, 2) y directriz $y = -2$.
c) Foco en (3, 1) y directriz $x = -5$.
d) Foco en (3, 1) y directriz $x = 7$.

a) $d(P, F) = d(P, s) \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |x + 8|$
$x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + 16x + 64 \rightarrow y^2 = 22x + 55$

b) $d(P, F) = d(P, s) \rightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = |y + 2|$
$x^2 + y^2 - 4y + 4 = y^2 + 4y + 4 \rightarrow x^2 = 8y$

c) $d(P, F) = d(P, s) \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = |x + 5|$
$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + 10x + 25 \rightarrow (y-1)^2 = 16x + 16$

d) $d(P, F) = d(P, s) \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = |x - 7|$
$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 14x + 49 \rightarrow (y-1)^2 = -8x + 40$

052 Encuentra la ecuación de la parábola con estos datos y determina los elementos que falten (foco, vértice o directriz).

a) Vértice en (2, 3) y directriz $x = -3$.
b) Vértice en $(-2, 0)$ y directriz $x = 6$.
c) Vértice en (3, 1) y foco en (3, 7).
d) Vértice en (3, 1) y foco en (5, 1).

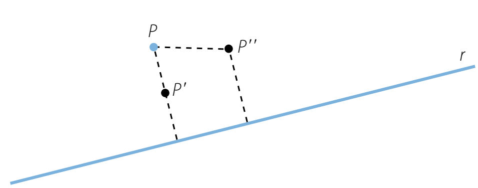
a) La ecuación de la parábola es de la forma: $(y-3)^2 = 2p(x-2)$
Como la directriz es $x = -3 \rightarrow \frac{p}{2} = d(V, d) = 5 \rightarrow p = 10 \rightarrow (y-3)^2 = 20(x-2)$
El foco de la parábola es: $F(7, 3)$

b) La ecuación de la parábola es de la forma: $y^2 = -2p(x+2)$
Como la directriz es $x = 6 \rightarrow \frac{p}{2} = d(V, d) = 8 \rightarrow p = 16 \rightarrow y^2 = -32(x+2)$
El foco de la parábola es: $F(-10, 0)$

c) La ecuación de la parábola es de la forma: $(x-3)^2 = 2p(y-1)$
$F(3, 7) \rightarrow \frac{p}{2} = d(V, F) = 6 \rightarrow p = 12 \rightarrow (x-3)^2 = 24(y-1)$
La directriz de la parábola es: $y = -5$

d) La ecuación de la parábola es de la forma: $(y-1)^2 = 2p(x-3)$
$F(5, 1) \rightarrow \frac{p}{2} = d(V, F) = 2 \rightarrow p = 4 \rightarrow (y-1)^2 = 8(x-3)$
La directriz de la parábola es: $x = 1$

053 Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto $P(3, 1)$ y de la recta $r: 3x - 4y + 5 = 0$.



Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico.

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\frac{|3x-4y+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2-6x+9+y^2-2y+1}=\frac{|3x-4y+5|}{5}$$

$$\rightarrow x^2-6x+9+y^2-2y+1=\frac{9x^2+16y^2+25+30x-40y-24xy}{25}$$

$$\rightarrow 25x^2-150x+225+25y^2-50y+25=$$

$$=9x^2+16y^2+25+30x-40y-24xy$$

$$\rightarrow 16x^2+9y^2+24xy-180x-10y+225=0$$

054 **¿Cuál es el vértice de una parábola cuyo foco es (−1, 3) si su directriz es la bisectriz del primer cuadrante?**

Si la directriz es $y=x$, como el eje de la parábola es una recta perpendicular, se verifica que es de la forma: $y=-x+k$

Al ser $F(-1, 3)$ un punto del eje: $3=1+k \rightarrow k=2$

$$\left.\begin{array}{r} y=x \\ y=-x+2 \end{array}\right\} \rightarrow P(1, 1) \text{ es el punto de intersección del eje y la directriz.}$$

El vértice de la parábola es el punto medio del segmento PF: $V(0, 2)$

055 **Halla las ecuaciones de las circunferencias que tienen las siguientes características.**

a) Centro en (5, −3) y radio 8.

b) Centro en (−2, −4) y diámetro $\sqrt{20}$.

c) Centro en (0, 0) y radio 3.

d) Centro en (−3, 4) y radio 5.

a) $(x-5)^2+(y+3)^2=64 \rightarrow x^2+y^2-10x+6y-30=0$

b) $(x+2)^2+(y+4)^2=20 \rightarrow x^2+y^2+4x+8y=0$

c) $x^2+y^2=9$

d) $(x+3)^2+(y-4)^2=25 \rightarrow x^2+y^2+6x-8y=0$

056 **Determina la ecuación de una circunferencia con centro en (−1, 6) y que pasa por el punto (3, −3). ¿Está el punto (−2, −8) situado en esa circunferencia?**

La ecuación de la circunferencia es de la forma: $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$

Si pasa por el punto (3, −3): $(3+1)^2+(-3-6)^2=97 \rightarrow r=\sqrt{97}$

La ecuación simplificada es: $x^2+y^2+2x-12y-60=0$

Sustituimos: $(-2)^2+(-8)^2+2(-2)-12(-8)-60=100 \neq 0$

(−2, −8) No pertenece a la circunferencia.

057 Decide si las siguientes ecuaciones corresponden a circunferencias y, en caso afirmativo, calcula su centro y su radio.

a) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$
b) $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 21 = 0$
c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 18 = 0$
d) $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 20 = 0$
e) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y - 71 = 0$
f) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$

a) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0 \rightarrow (x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$
La ecuación corresponde a una circunferencia de centro $C(-3, 2)$ y radio 5.

b) $x^2 + y^2 - 2x + 10y + 21 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 5$
La ecuación corresponde a una circunferencia de centro $C(1, -5)$ y radio $\sqrt{5}$.

c) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 18 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = -5$
No es una circunferencia.

d) $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 20 = 0 \rightarrow (x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 0$
No es una circunferencia.

e) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 12y - 71 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - x + 3y - \frac{71}{4} = 0$

$$\rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$

La ecuación corresponde a una circunferencia de centro $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ y radio $\frac{9}{2}$.

f) $4x^2 + 4y^2 - 4x + 6y - 7 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - x + \frac{3}{2}y - \frac{7}{4} = 0$

$$\rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{41}{16}$$

La ecuación corresponde a una circunferencia de centro $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{41}}{4}$.

058 Determina la ecuación de la circunferencia de centro (3, −4) y que es tangente a la recta.

$$3x + 4y - 18 = 0$$

$$d(P, r) = \frac{|3 \cdot 3 + 4(-4) - 18|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$$

La ecuación de la circunferencia es: $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$

059 Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (2, 9), (4, 7) y (−10, −7).

Decide si los siguientes puntos están o no en la circunferencia. Si no es así, decide si son puntos interiores o exteriores a la circunferencia sin representarla gráficamente.

a) (−4, −9)
b) (−5, 10)
c) (5, −5)

Sea la ecuación de la circunferencia de la forma: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} 4 + 81 + 2A + 9B + C = 0 \\ 16 + 49 + 4A + 7B + C = 0 \\ 100 + 49 - 10A - 7B + C = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2A + 9B + C = -85 \\ 4A + 7B + C = -65 \\ 10A + 7B - C = 149 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2A + 9B + C = -85 \\ A - B = 10 \\ 7A + 4B = 16 \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} 2A + 9B + C = -85 \\ A - B = 10 \\ 7A = 56 \end{array}\right\} \begin{array}{l} A = 8 \\ B = -2 \\ C = -83 \end{array} \rightarrow x^2 + y^2 + 8x - 2y - 83 = 0$$

a) $(-4)^2 + (-9)^2 + 8(-4) - 2(-9) - 83 = 0 \rightarrow (-4, -9)$ pertenece a la circunferencia.

b) $(-5)^2 + 10^2 + 8(-5) - 2 \cdot 10 - 83 = -18 \neq 0 \rightarrow (-5, 10)$ no pertenece a la circunferencia.

$x^2 + y^2 + 8x - 2y - 83 = 0 \rightarrow (x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 100 \rightarrow$ Centro: $(-4, 1)$ y radio: 10

$\sqrt{(-5+4)^2 + (10-1)^2} = \sqrt{82} < 10 \rightarrow$ El punto $(-5, 10)$ es interior.

c) $5^2 + (-5)^2 + 8 \cdot 5 - 2(-5) - 83 = 17 \neq 0 \rightarrow (5, -5)$ no pertenece a la circunferencia.

$\sqrt{(5+4)^2 + (-5-1)^2} = \sqrt{117} > 10 \rightarrow$ El punto $(5, -5)$ es exterior.

060 ●●○ **Determina el punto de la circunferencia de centro (2, 8) y radio 5 que esté más próximo a cada uno de estos puntos.**

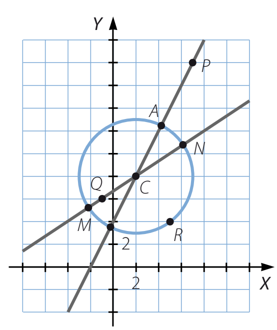
a) $P(7, 18)$

b) $Q(-1, 6)$

c) $R(5, 4)$

La ecuación de la circunferencia es:

$(x-2)^2 + (y-8)^2 = 25 \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 = 0$



a) La recta que pasa por P y el centro de la circunferencia es: $2x - y + 4 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 &= 0 \\ y &= 2x + 4 \end{aligned}\right\} \rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$$

Las coordenadas del punto más próximo son: $A\left(2 + \sqrt{5}, 8 + 2\sqrt{5}\right)$

b) La recta que pasa por Q y el centro de la circunferencia es: $2x - 3y + 20 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x - 16y + 43 &= 0 \\ y &= \frac{2x + 20}{3} \end{aligned}\right\} \rightarrow 13x^2 - 52x - 173 = 0 \rightarrow x = \frac{26 \pm 15\sqrt{13}}{13}$$

Las coordenadas del punto más próximo son: $M\left(\dfrac{26 - 15\sqrt{13}}{13}, 24 - 10\sqrt{13}\right)$

c) $5^2 + 4^2 - 4 \cdot 5 - 16 \cdot 4 + 43 = 0 \rightarrow R$ pertenece a la circunferencia y coincide con el punto pedido.

061 Halla la ecuación de la circunferencia de centro (−4, 2) que es tangente a la circunferencia.

$$x^2 + y^2 - 16x + 6y + 72 = 0$$

$x^2 + y^2 - 16x + 6y + 72 = 0 \rightarrow (x-8)^2 + (y+3)^2 = 1$

La circunferencia tiene centro $C_1(8, -3)$ y radio $r_1 = 1$.

$\sqrt{(8+4)^2 + (-3-2)^2} = 13 \rightarrow r_2 = 12$

Entonces la circunferencia tangente es:
$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 144 \rightarrow x^2 + y^2 + 8x - 4y - 124 = 0$

062 Obtén la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la circunferencia de radio 5 y centro (−8, 2) en el punto (−4, −1).

La recta normal pasa por el punto y por el centro de la circunferencia.

Su ecuación es: $3x + 4y + 16 = 0$

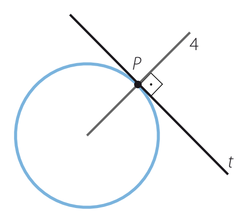
La recta tangente pasa por el punto y es perpendicular a la normal.

Su ecuación es: $4x - 3y + 13 = 0$

063 Escribe la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

en el punto $P(-1, 4)$.



$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$
$\rightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 = 25 \rightarrow C(3, 1)$

La recta normal pasa por el punto y por el centro de la circunferencia.

Su ecuación es: $3x + 4y - 13 = 0$

La recta tangente pasa por el punto y es perpendicular a la normal.

Su ecuación es: $4x - 3y + 16 = 0$

064 Obtén la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (7, −4) y (4, −1) y cuyo centro se sitúa en la recta $2x + y - 1 = 0$.

Como el centro equidista de los puntos, se encuentra en la mediatriz del segmento que forman.

$$\sqrt{(x-7)^2 + (y+4)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y+1)^2} \rightarrow x^2 - 14x + 49 + y^2 + 8y + 16 =$$
$$= x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 \rightarrow x - y - 8 = 0$$

El centro es el punto de intersección de la mediatriz y la recta dada.

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - 1 = 0 \\ x - y - 8 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow C(3, -5)$$

$r = \sqrt{(3-7)^2 + (-5+4)^2} = \sqrt{17}$

La ecuación de la circunferencia es:

$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 17 \rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 10y + 17 = 0$

065 ●○○ **Halla los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 28 = 0$ con las rectas.**

a) $r: x + 9y - 16 = 0$ b) $s: x + y + 2 = 0$ c) $t: 4x - 5y - 23 = 0$

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x + 6y - 28 = 0 \\ x + 9y - 16 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0$

Los puntos de intersección son: (7, 1) y (−2, 2)

b) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x + 6y - 28 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0$

Los puntos de intersección son: (6, −8) y (−3, 1)

c) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 4x + 6y - 28 = 0 \\ 4x - 5y - 23 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 4x - 21 = 0$

Los puntos de intersección son: (7, 1) y (−3, −7)

066 ●○○ **Decide qué posiciones relativas tienen estas rectas con la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 16 = 0$.**

a) $r: -x + 2y + 11 = 0$ c) $t: 2x - 3y + 9 = 0$
b) $s: 3x - 2y - 7 = 0$ d) $u: 3x + 5y = -2$

a) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 10x - 4y + 16 = 0 \\ -x + 2y + 11 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 5y^2 + 20y + 27 = 0$

$\Delta = -140 < 0 \rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones; por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

b) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 10x - 4y + 16 = 0 \\ 3x - 2y - 7 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 13x^2 - 106x + 169 = 0$

$\Delta = 2.448 > 0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones; por tanto, la recta y la circunferencia son secantes.

c) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 10x - 4y + 16 = 0 \\ 2x - 3y + 9 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y^2 - 10y + 25 = 0$

$\Delta = 0 \rightarrow$ La ecuación tiene una solución; por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

d) $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 10x - 4y + 16 = 0 \\ 3x + 5y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 17x^2 + 89x + 222 = 0$

$\Delta = -7.175 < 0 \rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones; por tanto, la recta es exterior a la circunferencia.

067 ●●○ **Obtén el valor del coeficiente C en la circunferencia $x^2 + y^2 + 10x + 2y + C = 0$ para que sea tangente a la recta $2x + 3y = 0$.**

$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 + 10x + 2y + C = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 13x^2 + 78x + 9C = 0$

Si la recta es tangente, entonces la intersección con la circunferencia es un solo punto, luego la ecuación de segundo grado debe tener una única solución.

$6.084 - 468C = 0 \rightarrow C = 13$

068 ¿Cuál debe ser el radio de la circunferencia de centro (9, −2) para que sea tangente a la recta $y = -3x + 5$? Halla la ecuación de la circunferencia.

$$\left.\begin{aligned}(x-9)^2+(y+2)^2&=r^2\\ y&=-3x+5\end{aligned}\right\}\rightarrow 10x^2-60x+130-r^2=0$$

Si la recta es tangente, entonces la intersección con la circunferencia es un solo punto, luego la ecuación de segundo grado debe tener una única solución.

$3.600 - 40(130 - r^2) = 0 \rightarrow 40r^2 - 1.600 = 0 \rightarrow r = 2\sqrt{10}$

La ecuación de la circunferencia es:

$(x-9)^2 + (y+2)^2 = 40 \rightarrow x^2 + y^2 - 18x + 4y + 45 = 0$

069 Calcula el valor de B de modo que la recta $3x + By - 6 = 0$ sea tangente a la circunferencia.

$$x^2 + y^2 + 10x + 2y + 1 = 0$$

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2+10x+2y+1&=0\\ x&=\frac{6-By}{3}\end{aligned}\right\}\rightarrow (B^2+9)y^2+(18-42B)y+225=0$$

Si la recta es tangente, entonces la intersección con la circunferencia es un solo punto, luego la ecuación de segundo grado debe tener una única solución.

$$(18-42B)^2 - 900(B^2+9) = 0 \rightarrow 4B^2 - 7B - 36 = 0 \rightarrow \begin{cases} B = 4 \\ B = -\dfrac{9}{4}\end{cases}$$

070 Determina la ecuación de la recta tangente a la circunferencia, de radio 3 y centro en (5, −2), y que es paralela a la recta $2x + y - 11 = 0$.

Las rectas paralelas a la recta dada son de la forma: $2x + y + k = 0$

$$\left.\begin{aligned}(x-5)^2+(y+2)^2&=9\\ 2x+y+k&=0\end{aligned}\right\}\rightarrow \left.\begin{aligned}x^2+y^2-10x+4y+20&=0\\ y&=-2x-k\end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow 5x^2+(4k-18)x+k^2-4k+20=0$$

Si la recta es tangente, entonces la intersección con la circunferencia es un solo punto, luego la ecuación de segundo grado debe tener una única solución.

$(4k-18)^2 - 20(k^2 - 4k + 20) = 0 \rightarrow k^2 + 16k + 19 = 0 \rightarrow k = -8 \pm 3\sqrt{5}$

Las dos rectas que cumplen las condiciones son: $\begin{cases} 2x + y - 8 + 3\sqrt{5} = 0 \\ 2x + y - 8 - 3\sqrt{5} = 0\end{cases}$

071 Encuentra la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 + 10x = 0$ y que es perpendicular a la recta $-4x + y + 8 = 0$.

Las rectas perpendiculares a la recta dada son de la forma: $x + 4y + k = 0$

$$\left.\begin{aligned}x^2+y^2+10x&=0\\ x&=-4y-k\end{aligned}\right\}\rightarrow 17y^2+(8k-40)y+k^2-10k=0$$

Si la recta es tangente, entonces la intersección con la circunferencia es un solo punto, luego la ecuación de segundo grado debe tener una única solución.

$(8k-40)^2 - 68(k^2 - 10k) = 0 \rightarrow k^2 - 10k - 400 = 0 \rightarrow k = 5 \pm 5\sqrt{17}$

Las dos rectas que cumplen las condiciones son: $\begin{cases} x + 4y + 5 + 5\sqrt{17} = 0 \\ x + 4y + 5 - 5\sqrt{17} = 0\end{cases}$

072 ●○○ **Obtén la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0$ y que pasa por (11, 2). Determina los dos extremos del diámetro.**

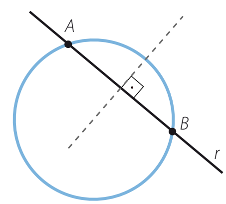
$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 = 0 \rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 29 \rightarrow C(1, -2)$

La ecuación del diámetro es: $\dfrac{x-11}{10} = \dfrac{y-2}{4} \rightarrow 2x - 5y - 12 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2x + 4y - 24 &= 0 \\ 2x - 5y - 12 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow x^2 - 2x - 24 = 0$$

Los extremos del diámetro son los puntos de intersección: (6, 0) y (−4, −4)

073 ●●○ **Halla la longitud de la cuerda que determina la recta $r: x + y + 1 = 0$ al cortar a la circunferencia $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 11 = 0$. Demuestra que la mediatriz de esa cuerda pasa por el centro de la circunferencia.**



$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 4x + 12y + 11 &= 0 \\ x + y + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow x^2 - 3x = 0$$

Los puntos de intersección son: $A(0, -1)$ y $B(3, -4)$

La longitud de la cuerda es: $d(A, B) = \sqrt{(3-0)^2 + (-4+1)^2} = 3\sqrt{2}$ unidades

El punto medio de la cuerda es: $M\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{2}\right)$

Como $\overrightarrow{AB} = (3, -3)$, un vector normal es (1, 1). Así, la ecuación de la mediatriz es:

$y + \dfrac{5}{2} = x - \dfrac{3}{2} \rightarrow x - y - 4 = 0$

$x^2 + y^2 + 4x + 12y + 11 = 0 \rightarrow (x+2)^2 + (y+6)^2 = 29 \rightarrow C(-2, -6)$

Como $-2 + 6 - 4 = 0 \rightarrow$ La mediatriz pasa por C.

074 ●●○ **Las rectas $2x - 3y + 5 = 0$ y $3x + 2y + 1 = 0$ son, respectivamente, la recta tangente y la recta normal a una circunferencia de radio 4 en un punto. Determina el punto y la ecuación de la circunferencia.**

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + 5 &= 0 \\ 3x + 2y + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow (-1, 1) \text{ es el punto de tangencia.}$$

El conjunto de puntos que se encuentran a $\sqrt{13}$ unidades del punto A es:

$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 13 \rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 = 0$

Como la normal a la circunferencia pedida pasa por el centro de la misma:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 11 &= 0 \\ 3x + 2y + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

Los puntos de intersección son: (1, −2) y (−3, 4)

Luego las dos circunferencias que cumplen las condiciones son:

$$\left.\begin{aligned} (x-1)^2 + (y+2)^2 = 13 &\rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0 \\ (x+3)^2 + (y-4)^2 = 13 &\rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 8y + 12 = 0 \end{aligned}\right\}$$

075 Halla la intersección de la circunferencia, de centro (0, 0) y radio 5, con otra circunferencia cuyo centro es (2, 0) y su radio mide 4.

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2=25\\ (x-2)^2+y^2=16\end{aligned}\right\} \to 25-x^2=16-(x-2)^2 \to 4x=13 \to x=\frac{13}{4}$$

$$\frac{169}{16}+y^2=25 \to y^2=\frac{231}{16} \to y=\pm\frac{\sqrt{231}}{4}$$

Los puntos de intersección son: $\left(\frac{13}{4}, \frac{\sqrt{231}}{4}\right)$ y $\left(\frac{13}{4}, -\frac{\sqrt{231}}{4}\right)$

076 Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos de intersección de las circunferencias.

$$C_1: x^2+y^2-2x-y-5=0 \qquad C_2: x^2+y^2-5=0$$

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2-2x-y-5=0\\ x^2+y^2-5=0\end{aligned}\right\} \to 2x+y+5=5 \to 2x+y=0$$

077 Halla la distancia del centro de la circunferencia $x^2+y^2-2x+4y-24=0$ a cada una de estas rectas, y úsalo para decidir la posición relativa de cada recta con la circunferencia.

a) $r: 2x+y-7=0$

b) $s: 5x+2y-30=0$

c) $t: -x+2y+20=0$

d) $u: x-2=0$

$$x^2+y^2-2x+4y-24=0 \to (x-1)^2+(y+2)^2=29 \to C(1,-2)$$

a) $\frac{|2\cdot 1+(-2)-7|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}<\sqrt{29} \to$ La recta es secante a la circunferencia.

b) $\frac{|5\cdot 1+2(-2)-30|}{\sqrt{5^2+2^2}}=\sqrt{29}=r \to$ La recta es tangente a la circunferencia.

c) $\frac{|-1+2(-2)+20|}{\sqrt{(-1)^2+2^2}}=3\sqrt{5}>\sqrt{29} \to$ La recta es exterior a la circunferencia.

d) $\frac{|1-2|}{\sqrt{1^2}}=1<\sqrt{29} \to$ La recta es secante a la circunferencia.

078 Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (5, 4) y (−2, 3) y que tiene un radio de 5 unidades.

La circunferencia de ecuación $(x-a)^2+(y-b)^2=5^2$ pasa por (5, 4) y (−2, 3):

$(5-a)^2+(4-b)^2=5^2 \to a^2+b^2-10a-8b=-16$

$(-2-a)^2+(3-b)^2=5^2 \to a^2+b^2+4a-6b=12$

Restando las dos ecuaciones: $14a+2b=28 \to b=14-7a$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$a^2+(7(2-a))^2-10a-8\cdot 7(2-a)=-16 \to a^2-3a+2=0 \to \begin{cases} a=2 \to b=0\\ a=1 \to b=7\end{cases}$$

Existen dos circunferencias que cumplen las condiciones del problema:

$(x-2)^2+y^2=5^2 \to (x-1)^2+(y-7)^2=5^2$

079 Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (−3, 7) y (11, 3) y con un radio de 2 unidades. Explica lo que sucede.

La circunferencia de ecuación $(x-a)^2+(y-b)^2=2^2$ pasa por (−3, 7) y (11, 3):

$(-3-a)^2+(7-b)^2=2^2 \rightarrow a^2+b^2+6a-14b=-54$

$(11-a)^2+(3-b)^2=2^2 \rightarrow a^2+b^2-22a-6b=-126$

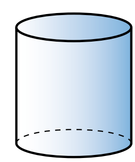
Restando las dos ecuaciones: $28a-8b=72 \rightarrow b=\dfrac{7a-18}{2}$

Sustituimos en la primera ecuación:

$$a^2+\left(\frac{7a-18}{2}\right)^2+6a-14\cdot\frac{7a-18}{2}=-54 \rightarrow 53a^2-424a+1.044=0$$

$\Delta=-41.552 \rightarrow$ No existe ninguna circunferencia que cumpla estas condiciones a la vez.

080 Halla el volumen de un cilindro cuya base tiene por ecuación $x^2+y^2+6x+10y+9=0$ y cuya altura mide 2 unidades.



$x^2+y^2+6x+10y+9=0 \rightarrow (x+3)^2+(y+5)^2=25 \rightarrow r=5$

El volumen del cilindro es: $V=\pi\cdot r^2\cdot h=50\pi=157{,}08$

081 Obtén las ecuaciones del lugar geométrico de los puntos que equidistan de (1, 4) y de la recta $3x+4y+1=0$. ¿Será una parábola? ¿Se puede escribir su ecuación? ¿Por qué?

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}=\frac{|3x+4y+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2-2x+1+y^2-8y+16}=\frac{|3x+4y+1|}{5}$$

$$\rightarrow x^2-2x+1+y^2-8y+16=\frac{9x^2+16y^2+1+6x+8y+24xy}{25}$$

$$\rightarrow 25x^2-50x+25+25y^2-200y+400=9x^2+16y^2+1+6x+8y+24xy$$

$$\rightarrow 16x^2+9y^2-24xy-56x-208y+424=0$$

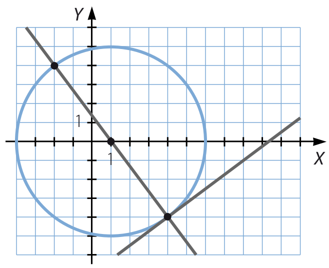
Se trata de una parábola, pero no se puede escribir su ecuación reducida, porque el vértice y el foco no se encuentran situados en uno de los ejes de coordenadas.

082 Halla el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan, a la vez, por los puntos (4, 1) y (−2, 5). ¿De qué figura se trata?

Los centros de las circunferencias se encuentran a la misma distancia de ambos puntos; por tanto, forman la mediatriz del segmento que determinan.

$$\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-5)^2} \rightarrow x^2-8x+16+y^2-2y+1=$$
$$=x^2+4x+4+y^2-10y+25 \rightarrow 3x-2y+3=0$$

083 **Obtén la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $3x - 4y - 28 = 0$, sabiendo que su radio mide 5 y que pasa por el punto $(-2, 4)$.**



La recta normal en el punto de tangencia de la recta $3x - 4y - 28 = 0$ que pasa por el punto $(-2, 4)$ es: $4x + 3y - 4 = 0$

Las dos rectas se cortan en otro punto de la circunferencia:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 4y - 28 = 0 \\ 4x + 3y - 4 = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 12x - 16y - 112 = 0 \\ -12x - 9y + 12 = 0 \end{array}\right\} \to (4, -4)$$

Entonces el punto medio del segmento AB es $C(1, 0)$, y el radio de la circunferencia es:

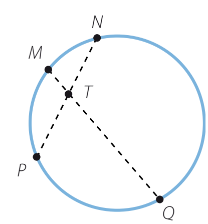
$$r = \sqrt{(-2-1)^2 + (4-0)^2} = 5$$

La ecuación de la circunferencia es: $(x - 1)^2 + y^2 = 25 \to x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$

084 **Si dibujas cuatro puntos sobre una circunferencia y los unes, según se observa en la figura, resulta que:**

$$\overline{TM} \cdot \overline{TQ} = \overline{TN} \cdot \overline{TP}$$

Compruébalo tomando los puntos $M(5, 1)$, $N(4, 2)$, $P(-3, -5)$ y $Q(-2, 2)$ y demostrando que están sobre la misma circunferencia. Halla su ecuación. Después, calcula el punto T y prueba que se verifica la igualdad inicial.



Sea la ecuación de la circunferencia de la forma: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} 25 + 1 + 5A + B + C = 0 \\ 16 + 4 + 4A + 2B + C = 0 \\ 9 + 25 - 3A - 5B + C = 0 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 5A + B + C = -26 \\ 4A + 2B + C = -20 \\ 3A + 5B - C = 34 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} 5A + B + C = -26 \\ A - B \quad = -6 \\ 4A + 3B \quad = 4 \end{array}\right\}$$

$$\to \left.\begin{array}{r} 5A + B + C = -26 \\ A - B \quad = -6 \\ 7A \quad = -14 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{l} A = -2 \\ B = 4 \\ C = -20 \end{array}\right\} \to x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$$

Obtenemos la ecuación de la circunferencia que pasa por M, N y P.

Como $(-2)^2 + 2^2 - 2(-2) + 4 \cdot 2 - 20 = 0$, Q pertenece también a la circunferencia.

La recta que pasa por M y Q tiene por ecuación: $\dfrac{x-5}{-7} = \dfrac{y-1}{1} \to x + 7y - 12 = 0$

La recta que pasa por N y P tiene por ecuación: $\dfrac{x-4}{-7} = \dfrac{y-2}{-7} \to x - y - 2 = 0$

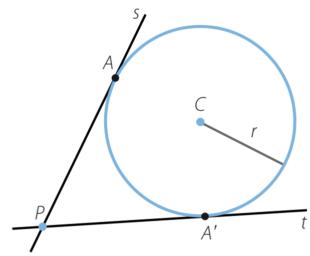
$$\left.\begin{array}{r} x + 7y - 12 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{array}\right\} \to T\left(\frac{13}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$\overline{TM} \cdot \overline{TQ} = \sqrt{\left(5 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(1 - \frac{5}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(-2 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{16}} \cdot \sqrt{\frac{450}{16}} = \frac{75}{2}$$

$$\overline{TN} \cdot \overline{TP} = \sqrt{\left(4 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(2 - \frac{5}{4}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(-3 - \frac{13}{4}\right)^2 + \left(-5 - \frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{18}{16}} \cdot \sqrt{\frac{1.250}{16}} = \frac{75}{2}$$

085 ●●○

En esta figura hemos trazado las dos rectas tangentes s y t a una circunferencia, de centro C y radio r, trazadas desde un punto P exterior a ella.



Supongamos que $C(-1, 3)$, el radio mide 5 unidades y el punto $P(-9, -3)$.

Las rectas que pasan por P tienen la forma:

$y = -3 + m(x + 9) \rightarrow mx - y + 9m - 3 = 0$

Imponemos que la distancia de C a esa recta sea igual al radio, 5.

$$\left|\frac{(-1)m - 3 + 9m - 3}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = 5$$

Elevando al cuadrado obtenemos la ecuación:

$$(8m - 6)^2 = \left(5\sqrt{m^2 + 1}\right)^2$$

que tiene dos soluciones: 0,12 y 2,34; por lo que las ecuaciones de las rectas son:

$$y = 0{,}12x - 1{,}92 \qquad y = 2{,}34x + 18{,}07$$

Considerando todo lo anterior, calcula las dos rectas tangentes a la circunferencia dada que pasan por:

a) El punto (0, 14).

b) El punto (12, 0).

c) Explica lo que sucede al hallar las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por el punto (2, 6).

a) Las rectas que pasan por (0, 14) son de la forma: $mx - y + 14 = 0$

$$\left|\frac{m(-1) - 3 + 14}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}\right| = 5 \rightarrow \left|\frac{-m + 11}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = 5 \rightarrow m^2 - 22m + 121 = 25(m^2 + 1)$$

$$\rightarrow 12m^2 + 11m - 48 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = -2{,}51 \\ m = 1{,}59 \end{cases}$$

Las rectas tangentes son: $\begin{cases} -2{,}51x - y + 14 = 0 \\ 1{,}59x - y + 14 = 0 \end{cases}$

b) Las rectas que pasan por (12, 0) son de la forma: $mx - y - 12m = 0$

$$\left|\frac{m(-1) - 3 - 12m}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}}\right| = 5 \rightarrow \left|\frac{-13m - 3}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = 5 \rightarrow 169m^2 + 78m + 9 = 25(m^2 + 1)$$

$$\rightarrow 72m^2 + 39m - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0{,}15 \\ m = -0{,}7 \end{cases}$$

Las rectas tangentes son: $\begin{cases} 0{,}15x - y - 1{,}8 = 0 \\ -0{,}7x - y + 8{,}4 = 0 \end{cases}$

c) $\sqrt{(2 + 1)^2 + (6 - 3)^2} = 3\sqrt{2} < 5 \rightarrow$ El punto es interior a la circunferencia, no pueden trazarse las tangentes.

086 ●●○ **Dadas las rectas r: $3x + 4y + 7 = 0$ y s: $12x - 5y + 7 = 0$, ¿se puede trazar una circunferencia de centro (4, 4) que sea tangente a ambas rectas? ¿Y con centro en el punto (10, 2)? Escribe la ecuación de dicha circunferencia en el caso de que la respuesta haya sido afirmativa.**

Circunferencia de centro (4, 4):

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{3\cdot 4 + 4\cdot 4 + 7}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 7 \\ \left|\dfrac{12\cdot 4 - 5\cdot 4 + 7}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}\right| = \dfrac{35}{13} \end{array}\right\} \rightarrow \text{No se puede trazar la circunferencia, ya que el centro no se encuentra a la misma distancia de las dos rectas.}$$

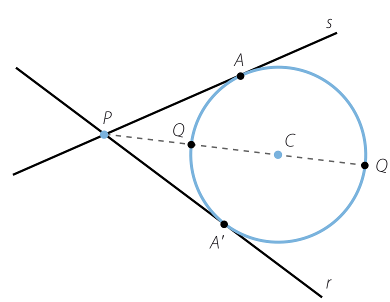
Circunferencia de centro (10, 2):

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{3\cdot 10 + 4\cdot 2 + 7}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 9 \\ \left|\dfrac{12\cdot 10 - 5\cdot 2 + 7}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}\right| = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \text{El centro está a la misma distancia de las dos rectas.}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 81 \rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 8y - 49 = 0$

087 ●●○ **Dadas las rectas r: $3x + 4y - 10 = 0$, s: $5x - 12y + 2 = 0$ y la circunferencia $x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0$.**



a) Comprueba que las dos rectas son tangentes a la circunferencia.

b) Halla el punto P de intersección de ambas rectas, el punto C, que es centro de la circunferencia, y los puntos A y A', en los que las rectas son tangentes a la circunferencia.

c) Si llamamos d a la distancia que separa P de C, la distancia de P a Q es $d - r$, y la distancia de P a Q' es $d + r$. Demuestra que $\overline{PQ} \cdot \overline{PQ'} = \left(\overline{PA}\right)^2$.

a) $$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \\ 3x + 4y - 10 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 25x^2 - 380x + 1.444 = 0$$

$\Delta = 0 \rightarrow$ La ecuación tiene una solución; por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \\ 5x - 12y + 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 169x^2 - 2.860x + 12.100 = 0$$

$\Delta = 0 \rightarrow$ La ecuación tiene una solución; por tanto, la recta es tangente a la circunferencia.

b) $\left.\begin{array}{r}3x + 4y - 10 = 0\\ 5x - 12y + 2 = 0\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r}9x + 12y - 30 = 0\\ 5x - 12y + 2 = 0\end{array}\right\} \rightarrow P(2, 1)$

$x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \rightarrow (x - 10)^2 + y^2 = 16 \rightarrow C(10, 0)$

$25x^2 - 380x + 1.444 = 0 \rightarrow x = \frac{38}{5} \rightarrow A\left(\frac{38}{5}, -\frac{16}{5}\right)$

$169x^2 - 2.860x + 12.100 = 0 \rightarrow x = \frac{110}{13} \rightarrow A'\left(\frac{110}{13}, \frac{48}{13}\right)$

c) $x^2 + y^2 - 20x + 84 = 0 \rightarrow (x - 10)^2 + y^2 = 16 \rightarrow r = 4$

$d = \sqrt{(10 - 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{65}$

$\overline{PQ} \cdot \overline{PQ}' = \left(\sqrt{65} - 4\right) \cdot \left(\sqrt{65} + 4\right) = 65 - 16 = 49$

$\overline{PA}^2 = \left(\frac{38}{5} - 2\right)^2 + \left(-\frac{16}{5} - 1\right)^2 = \frac{784}{25} + \frac{441}{25} = 49$

088 Halla la ecuación de una elipse cuyo centro es (2, 4), tiene un foco en (5, 4) y su excentricidad es $\frac{3}{5}$.

$\left.\begin{array}{l}C(2, 4)\\ F(5, 4)\end{array}\right\} \rightarrow c = 3$ $\qquad e = \frac{3}{5} \rightarrow a = 5$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 4$ $\qquad$ La ecuación es: $\frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y - 4)^2}{16} = 1$

089 Escribe, en forma general, la ecuación de la elipse $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$. Halla también sus focos y su excentricidad.

$4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0 \rightarrow 4x^2 - 8x + 4 + 9y^2 + 36y + 36 = 36$

$\rightarrow 4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) = 36 \rightarrow \frac{(x - 1)^2}{9} + \frac{(y + 2)^2}{4} = 1$

El centro de la elipse es $C(1, -2)$.

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{5}$

Por tanto, los focos son: $F\left(1 + \sqrt{5}, -2\right)$ y $F'\left(1 - \sqrt{6}, -2\right)$

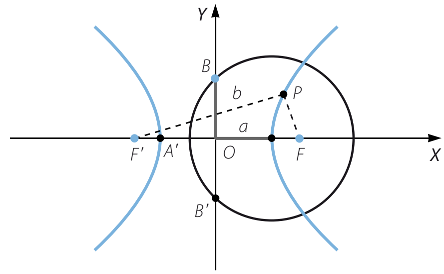
La excentricidad de la elipse es: $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

090 Una hipérbola de $\frac{5}{4}$ de excentricidad tiene su centro en (2, 3) y un foco en (7, 3). Calcula su ecuación.

$\left.\begin{array}{l}C(2, 3)\\ F(7, 3)\end{array}\right\} \rightarrow c = 5$ $\qquad e = \frac{5}{4} \rightarrow a = 4$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b = 3$ $\qquad$ La ecuación es: $\frac{(x - 2)^2}{16} - \frac{(y - 3)^2}{9} = 1$

091 Una hipérbola en la que se cumple que $a = b$ decimos que es equilátera. Supón que tiene su centro en (0, 0) y que el eje focal es horizontal.
Calcula su ecuación y halla las coordenadas de los focos en función de a. Determina las ecuaciones de sus asíntotas.



La ecuación de la hipérbola equilátera es de la forma: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \rightarrow x^2 - y^2 = a^2$

Como $a = b$ y $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{2}a \rightarrow F\left(\sqrt{2}a, 0\right) \quad F'\left(-\sqrt{2}a, 0\right)$

Al ser $a = b$, las ecuaciones de las asíntotas son: $y = \pm x$

092 Comprueba que la hipérbola, cuyos focos son $\left(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ y $\left(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\right)$ y su constante es $8\sqrt{2}$, es una hipérbola equilátera. Comprueba que (8, 2) está situado en esa hipérbola. Obtén su ecuación.

$$2c = \sqrt{\left(-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(-4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right)^2} = 16$$

$$\left.\begin{aligned} c &= 8 \\ a &= 4\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \rightarrow b = 4\sqrt{2}$$

Al ser $a = b$, la hipérbola es equilátera.

$$\sqrt{\left(x-4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-4\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(x+4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y+4\sqrt{2}\right)^2} = 8\sqrt{2}$$

$$\rightarrow \sqrt{\left(x-4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y-4\sqrt{2}\right)^2} = 8\sqrt{2} + \sqrt{\left(x+4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y+4\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow x^2 - 8\sqrt{2}x + 32 + y^2 - 8\sqrt{2}y + 32 = 128 + x^2 + 8\sqrt{2}x + 32 + y^2 + $$
$$+ 8\sqrt{2}y + 32 + 16\sqrt{2}\sqrt{\left(x+4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y+4\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow -16\sqrt{2}x - 16\sqrt{2}y - 128 = 16\sqrt{2}\sqrt{\left(x+4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y+4\sqrt{2}\right)^2}$$

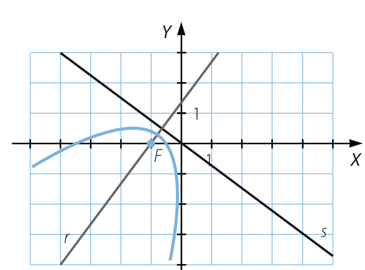
$$\rightarrow x + y + 4\sqrt{2} = -\sqrt{\left(x+4\sqrt{2}\right)^2 + \left(y+4\sqrt{2}\right)^2}$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 2xy + 8\sqrt{2}x + 8\sqrt{2}y + 32 = x^2 + 8\sqrt{2}x + 32 + y^2 + 8\sqrt{2}y + 32$$

$\rightarrow 2xy = 32 \rightarrow xy = 16$ es la ecuación de la hipérbola.

$8 \cdot 2 = 16 \rightarrow (8, 2)$ es un punto de la hipérbola.

093 Como la parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta llamada directriz y un punto denominado foco, emplea la definición para calcular la ecuación de una parábola cuya directriz sea la recta r: $3x + 4y = 0$ y cuyo foco sea $F(-1, 0)$.



$$\sqrt{(x+1)^2+y^2} = \frac{|3x+4y|}{\sqrt{3^2+4^2}} \rightarrow \sqrt{x^2+2x+1+y^2} = \frac{|3x+4y|}{5}$$

$$\rightarrow x^2+2x+1+y^2 = \frac{9x^2+16y^2+24xy}{25}$$

$$\rightarrow 25x^2+50x+25+25y^2 = 9x^2+16y^2+24xy$$

$$\rightarrow 16x^2+9y^2-24xy+50x+25=0$$

095

094 Halla los focos, vértices y directrices de las siguientes parábolas.

a) $y=x^2+2x+1$

b) $4y=-x^2+8x-6$

c) $y=4x^2-8x+12$

d) $y=6x^2+9x-10$

(Recuerda que, en una parábola del tipo $y=ax^2+bx+c$*, la directriz es horizontal y el vértice es un punto de abscisa* $-\frac{b}{2a}$*).*

a) $y=(x+1)^2$

El vértice de la parábola es: $V(-1, 0)$

$2p=1 \rightarrow p=\frac{1}{2} \rightarrow F\left(-1, \frac{1}{4}\right)$ Directriz: $y=-\frac{1}{4}$

b) $4y-10=-(x^2-8x+16) \rightarrow y-\frac{5}{2}=-\frac{1}{4}(x-4)^2$

El vértice de la parábola es: $V\left(4, \frac{5}{2}\right)$

$2p=-\frac{1}{4} \rightarrow p=-\frac{1}{8} \rightarrow F\left(4, \frac{39}{16}\right)$ Directriz: $y=\frac{41}{16}$

c) $y-8=4(x^2-2x+1) \rightarrow y-8=4(x-1)^2$

El vértice de la parábola es: $V(1, 8)$

$2p=4 \rightarrow p=2 \rightarrow F(1, 9)$ Directriz: $y=7$

d) $y+\frac{107}{8}=6\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right) \rightarrow y+\frac{107}{8}=6\left(x+\frac{3}{4}\right)^2$

El vértice de la parábola es: $V\left(-\frac{3}{4}, -\frac{107}{8}\right)$

$2p=6 \rightarrow p=3 \rightarrow F\left(-\frac{3}{4}, -\frac{95}{8}\right)$ Directriz: $y=-\frac{119}{8}$

095 Calcula los puntos de intersección de la parábola $y=\frac{3}{16}x^2$ y la circunferencia $x^2+y^2=25$.

$$\left.\begin{array}{r} 3x^2-16y=0 \\ x^2+y^2=25 \end{array}\right\} \rightarrow x^2=25-y^2$$

$$3y^2+16y-75=0 \rightarrow \begin{cases} y=3 \\ y=-\dfrac{25}{3} \end{cases}$$

Los puntos de intersección son: (4, 3) y (−4, 3)

096 **Determina las posiciones relativas de la parábola $y^2 = 9x$ con las rectas.**

a) $r: 3x + y - 6 = 0$ b) $s: 2x + y + 6 = 0$ c) $t: 3x - 2y + 3 = 0$

En el caso de que las rectas corten a la parábola, halla los puntos de corte.

a) $\left.\begin{array}{r} y^2 = 9x \\ 3x + y - 6 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y^2 + 3y - 18 = 0$

$\Delta = 81 > 0 \rightarrow$ La ecuación tiene dos soluciones; por tanto, la recta corta a la parábola en dos puntos.

Los puntos de intersección son: (1, 3) y (4, −6)

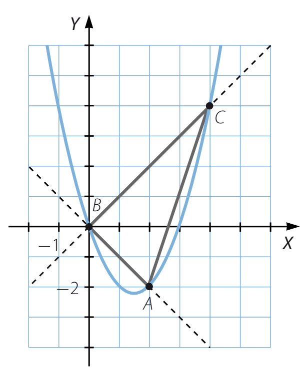
b) $\left.\begin{array}{r} y^2 = 9x \\ 2x + y + 6 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 2y^2 + 9y + 54 = 0$

$\Delta = -351 < 0 \rightarrow$ La ecuación no tiene soluciones; por tanto, la recta no corta a la parábola.

c) $\left.\begin{array}{r} y^2 = 9x \\ 3x - 2y + 3 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow y^2 - 6y + 9 = 0$

$\Delta = 0 \rightarrow$ La ecuación solo tiene una solución; por tanto, la recta corta a la parábola en un punto, siendo tangente en el punto (1, 3).

097 **Las bisectrices de los cuatro cuadrantes cortan a la parábola $y = x^2 - 3x$ en tres puntos. Halla el área del triángulo que forman.**



Las bisectrices de los cuatro cuadrantes tienen como ecuaciones: $\begin{cases} y = x \\ y = -x \end{cases}$

$\left.\begin{array}{r} y = x \\ y = x^2 - 3x \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 4x = 0$

Los puntos de intersección son: (0, 0) y (4, 4)

$\left.\begin{array}{l} y = -x \\ y = x^2 - 3x \end{array}\right\} \rightarrow x^2 - 2x = 0$

Los puntos de intersección son: (0, 0) y (2, −2)

Como el ángulo en el vértice O es recto, el área del triángulo es:

$$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{2} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{32}}{2} = 8$$

098 La cónica de ecuación: $9x^2 + 16y^2 + 24xy + 8x - 44y + 24 = 0$ es una parábola cuyo eje es la recta: $r: 8x - 6y + 2 = 0$. Determina su foco.

Sea $F(a, b)$ el foco de la parábola.

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \frac{|8x - 6y + 2|}{\sqrt{8^2 + (-6)^2}}$$

$$\sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2} = \frac{|8x - 6y + 2|}{10}$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = \frac{64x^2 + 36y^2 - 96xy + 32x - 24y + 4}{100}$$

$$100x^2 - 200ax + 100a^2 + 100y^2 - 200by + 100b^2 = 64x^2 + 36y^2 - 96xy + 32x - 24y + 4$$

$$9x^2 + 16y^2 + 24xy - (50a + 8)x - (50b - 6)y + 25a^2 + 25b^2 - 1 = 0$$

$$9x^2 + 16y^2 + 24xy + 8x - 44y + 24 = 0 \rightarrow \left\{\begin{array}{r} 8 = -(50a + 8) \\ -44 = -(50b - 6) \\ 24 = 25a^2 + 25b^2 - 1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 1 \end{array}\right.$$

El foco es el punto $F(0, 1)$.

099 Encuentra los puntos de corte de las parábolas $y^2 = 9x$ y $x^2 = \frac{1}{3}y$.

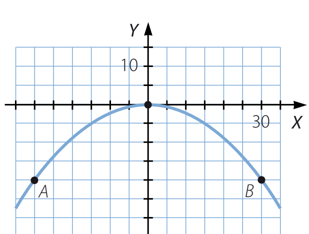
$$\left.\begin{array}{r} y^2 = 9x \\ 3x^2 = y \end{array}\right\} \rightarrow 9x^4 - 9x = 0 \rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

Los puntos de corte son: (0, 0) y (1, 3)

100 El famoso hombre bala Adal L. White hizo una demostración en una ciudad. Se introdujo en un cañón y fue lanzado al aire, siguiendo una trayectoria de un arco de parábola. Alcanzó una altura máxima de 20 metros y cayó ileso a una distancia de 60 metros del cañón.

Determina la ecuación de la parábola que describe su trayectoria.

(Puedes suponer que el punto más elevado es el origen de coordenadas)



Si se considera el origen de coordenadas como el punto más elevado, los puntos *A* y *B* serían el punto de lanzamiento y de aterrizaje, respectivamente.

La ecuación de la parábola es de la forma: $y = -2px^2$

Como $(30, -20)$ es un punto de la parábola: $-20 = -2p \cdot 900 \rightarrow p = \frac{1}{90}$

Por tanto, la ecuación de la parábola que describe la trayectoria es: $y = -\frac{1}{45}x^2$

101 **Determina el valor de k que hace que la recta $2x + y + k = 0$ sea tangente a la parábola $y^2 = 6x$.**

$$\left.\begin{array}{r} y^2 = 6x \\ 2x + y + k = 0 \end{array}\right\} \rightarrow (-2x - k)^2 = 6x \rightarrow 4x^2 + (4k - 6)x + k^2 = 0$$

La recta es tangente a la parábola si solo la corta en un punto; por tanto, la ecuación debe tener una única solución.

$$\Delta = (4k - 6)^2 - 16k^2 = 0 \rightarrow -48k + 36 = 0 \rightarrow k = \frac{3}{4}$$

102 **Encuentra la ecuación de una parábola de directriz horizontal que pase por los puntos (4, 7), (−8, 7) y (10, 25).**

Si la directriz es horizontal, la ecuación de la parábola es de la forma: $y = ax^2 + bx + c$

Entonces:

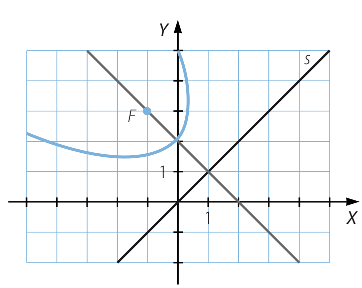
$$\left.\begin{array}{r} 7 = 16a + 4b + c \\ 7 = 64a - 8b + c \\ 25 = 100a + 10b + c \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 16a + 4b + c = 7 \\ 4a - b = 0 \\ 14a + b = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 16a + 4b + c = 49 \\ 4a - b = 0 \\ 6a = 1 \end{array}\right\}$$

$$a = \frac{1}{6} \qquad b = \frac{2}{3} \qquad c = \frac{5}{3}$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es: $6y = x^2 + 4x + 10$

103 **El foco de esta parábola es $F(-1, 3)$ y su directriz es la bisectriz del primer cuadrante. Completa su ecuación.**

$$x^2 + y^2 + 2xy + 4x + \boxed{}$$



$$\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 3)^2} = \frac{|x - y|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9} = \frac{|x - y|}{\sqrt{2}}$$

$$\rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{2}$$

$$\rightarrow 2x^2 + 4x + 2 + 2y^2 - 12y + 18 = x^2 + y^2 - 2xy$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 2xy + 4x - 12y + 20 = 0$$

104 ●●● **Decide qué tipo de cónicas son las siguientes, halla sus elementos y haz una representación gráfica aproximada.**

a) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$

b) $x^2 - 4y^2 + 16y - 32 = 0$

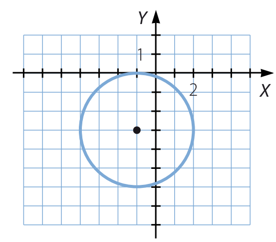
c) $16x^2 + 9y^2 - 32x + 54y - 47 = 0$

d) $x^2 + 6x - 4y + 17 = 0$

a) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$

$(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 9$

La cónica es una circunferencia de centro $C(-1, -3)$ y radio 3.



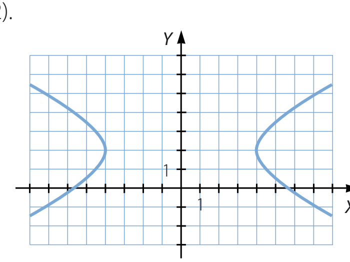
b) $x^2 - 4y^2 + 16y - 32 = 0 \rightarrow x^2 - 4(y - 2)^2 = 16 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$

La cónica es una hipérbola de centro $C(0, 2)$.

Como $a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow \begin{cases} A(4, 2) \\ A'(-4, 2) \end{cases}$

Si $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{20}$

$\rightarrow \begin{cases} F\left(\sqrt{20}, 2\right) \\ F'\left(-\sqrt{20}, 2\right) \end{cases}$



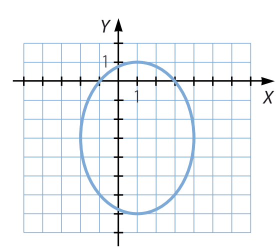
c) $16x^2 + 9y^2 - 32x + 54y - 47 = 0 \rightarrow 16(x - 1)^2 + 9(y + 3)^2 = 144$

$\rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1 \rightarrow$ La cónica es una elipse de centro $C(1, -3)$

Como $a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \rightarrow \begin{cases} A(1, 1) \\ A'(1, -7) \end{cases}$

Si $b^2 = 9 \rightarrow b = 3 \rightarrow \begin{cases} B(-2, -3) \\ B'(4, -3) \end{cases}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{7} \rightarrow \begin{cases} F\left(1, -3 + \sqrt{7}\right) \\ F'\left(1, -3 - \sqrt{7}\right) \end{cases}$



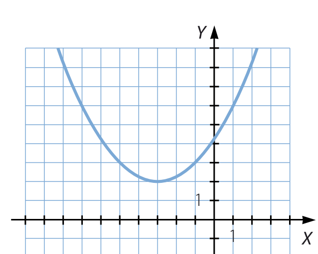
d) $x^2 + 6x - 4y + 17 = 0 \rightarrow (x + 3)^2 = 4(y - 2)$

$\rightarrow y - 2 = \dfrac{1}{4}(x + 3)^2$

La cónica es una parábola de vértice $V(-3, 2)$.

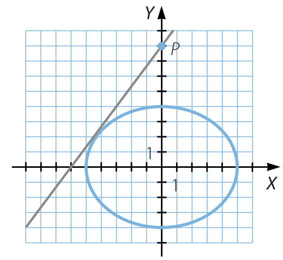
Como $2p = \dfrac{1}{4} \rightarrow p = \dfrac{1}{8} \rightarrow F\left(-3, \dfrac{17}{8}\right)$

La directriz es la recta $y = \dfrac{15}{8}$.



105 Calcula la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ en el punto $P(0, 8)$.

(Las rectas que pasan por (0, 8) tienen como ecuación $y = mx + 8$*)*



$$y = mx + 8$$

$$\left.\begin{array}{r} 16x^2 + 25y^2 = 400 \\ y = mx + 8 \end{array}\right\} \to (16 + 25m^2)x^2 + 400mx + 1.200 = 0$$

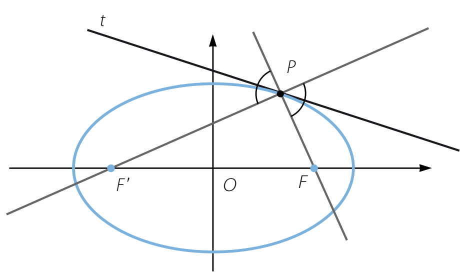
La recta es tangente a la elipse si la ecuación tiene solo una solución, es decir, si el discriminante de la ecuación es igual a cero.

$$\Delta = 160.000m^2 - 4.800(16 + 25m^2) = 40.000m^2 - 76.800 = 0 \to m = \pm\frac{4\sqrt{3}}{5}$$

Hay dos rectas tangentes a la elipse que pasan por el punto (0, 8):

$$\begin{cases} 4\sqrt{3}x - 5y + 40 = 0 \\ 4\sqrt{3}x + 5y - 40 = 0 \end{cases}$$

106 En la figura se observa una propiedad de la recta tangente a una elipse en un punto P. Vemos que es la bisectriz del ángulo formado por la recta P con un foco y la recta que une P con el otro foco.



Usa esta propiedad para calcular la ecuación de la recta tangente en el punto $P\left(3, \frac{16}{5}\right)$ de la elipse de ecuación $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

$$\left.\begin{array}{l} a = 5 \\ b = 4 \end{array}\right\} \to c = 3$$

Los focos son los puntos: $F(0, 3)$ y $F'(0, -3)$

La recta que pasa por el punto y el foco F es: $x - 15y + 45 = 0$

La recta que pasa por el punto y el foco F' es: $31x - 15y - 45 = 0$

Los puntos de la bisectriz equidistan de ambas rectas:

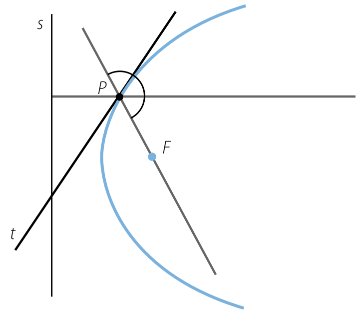
$$\frac{|x-15y+45|}{\sqrt{1^2+(-15)^2}} = \frac{|31x-15y-45|}{\sqrt{31^2+(-15)^2}} \to \begin{cases} \sqrt{593}\,(x-15y+45) = \sqrt{113}\,(31x-15y-45) \\ \sqrt{593}\,(x-15y+45) = -\sqrt{113}\,(31x-15y-45) \end{cases}$$

Simplificando: $\begin{cases} 305{,}18x + 205{,}82y - 1.574{,}17 = 0 \\ 353{,}88x - 524{,}72y + 617{,}46 = 0 \end{cases}$

Como la recta tangente en un punto del primer cuadrante tiene pendiente negativa, la recta tangente pedida es: $305{,}18x + 205{,}82y - 1574{,}17 = 0$

107 ●●● **Observa la figura. Hemos dibujado una parábola y en ella situamos un punto *P*. Vemos que la recta tangente a la parábola en ese punto es la bisectriz del ángulo que forman la recta que une *P* con el foco y la recta perpendicular a la directriz que pasa por *P*.**

Usando esa información, calcula la recta tangente a la parábola $y^2 = 18x$ en el punto (2, 6).



$2p = 18 \rightarrow p = 9 \rightarrow F(9, 0)$

La directriz es la recta: $x + 9 = 0$

La recta que pasa por el punto y el foco es: $6x + 7y - 54 = 0$

La recta perpendicular a la directriz que pasa por el punto es: $y - 6 = 0$

Los puntos de la bisectriz equidistan de ambas rectas:

$$\frac{|6x + 7y - 54|}{\sqrt{6^2 + 7^2}} = \frac{|y - 6|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}$$

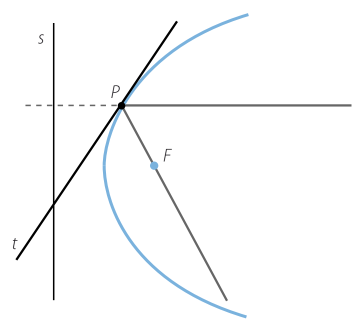
$$\rightarrow \begin{cases} 6x + 7y - 54 = \sqrt{85}(y - 6) \rightarrow 6x - 2{,}21y + 1{,}31 = 0 \\ 6x + 7y - 54 = -\sqrt{85}(y - 6) \rightarrow 6x + 16{,}21y - 109{,}31 = 0 \end{cases}$$

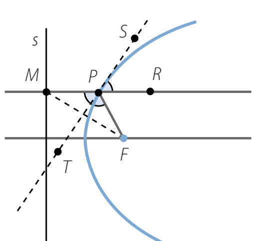
Como la recta tangente en un punto del primer cuadrante tiene pendiente positiva, la recta tangente pedida es: $6x - 2{,}21y + 1{,}31 = 0$

108 ●●● **Si una señal incide sobre una antena parabólica en dirección perpendicular a su directriz, esta se refleja como si chocara contra la recta tangente en ese punto.**

Demuestra que el rayo reflejado pasa siempre por el foco de la parábola.

Esta propiedad es la que confiere su utilidad a las antenas parabólicas, puesto que concentran la señal en un solo punto, el foco.





Se considera un punto *F*, una recta *s* y un punto *M* que pertenezca a ella.

Si se traza la perpendicular a *d* que pasa por *M*, esta recta corta a la mediatriz del segmento *MF* en un punto *P*, que pertenece a la parábola de foco *F* y directriz *s* por ser $\overline{MP} = \overline{PF}$. Como la recta es perpendicular, la medida del segmento *MP* coincide con la distancia del punto *P* a la recta *s*.

Esta mediatriz es la tangente a la parábola de foco *F* y directriz *s*. Además, los ángulos $\widehat{RPS}$ y $\widehat{FPT}$ son iguales, por ser los ángulos que forman el rayo que incide y el rayo que se refleja. Y por ser opuestos por el vértice, los ángulos $\widehat{MPT}$ y $\widehat{TPF}$ también son iguales.

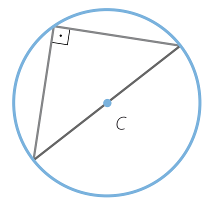
Por tanto, un rayo que incide perpendicularmente a la directriz se refleja pasando por el foco *F*.

109 Un espejo hiperbólico es tal que la distancia focal mide 26 mm y el eje real 24 mm. Calcula las coordenadas de los vértices y los focos.

$2c = 26 \rightarrow c = 13 \rightarrow F(-13, 0) \quad F'(13, 0)$

$2a = 24 \rightarrow a = 12 \rightarrow A(-12, 0) \quad A'(12, 0)$

110 Un triángulo inscrito en una circunferencia, cuyo lado mayor coincida con un diámetro, es un triángulo rectángulo.



a) Utiliza esta propiedad para calcular el lugar geométrico de los puntos cuya suma de los cuadrados de las distancias a $P(3, -3)$ y $Q(-5, 3)$ es 100.

b) Comprueba tus resultados, teniendo en cuenta que conociendo los dos extremos del diámetro puedes calcular el centro y el radio de la circunferencia.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico.

$(x-3)^2 + (y+3)^2 + (x+5)^2 + (y-3)^2 = 100$

$\rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 + x^2 + 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 = 100$

$\rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0 \rightarrow (x+1)^2 + y^2 = 25$

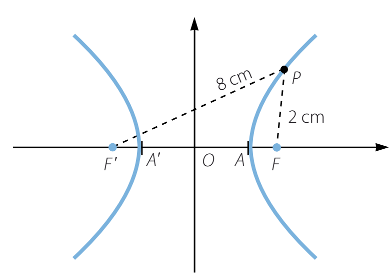
Es una circunferencia de centro $(-1, 0)$ y radio 5.

El centro de la circunferencia es el punto medio del segmento: $(-1, 0)$

Y el radio de la circunferencia es la mitad de distancia entre los puntos:

$\sqrt{(-5-3)^2 + (3+3)^2} = 10$

111 Desde un punto de una hipérbola, los focos están a 2 cm y 8 cm, y el eje imaginario mide 6 cm. Calcula.



a) ¿Cuál es la distancia entre sus vértices?

b) ¿Y la distancia focal?

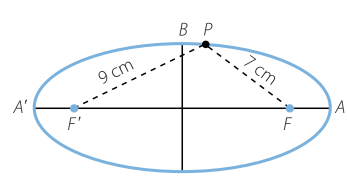
a) $2a = d(P, F) - d(P, F') = 8 - 2 = 6$

b) $2b = 6 \rightarrow b = 3$ cm

Como $c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ cm $\rightarrow 2c = 6\sqrt{2}$ cm

112 Hemos medido la distancia desde un punto de una elipse a sus focos y es de 9 cm y 7 cm, respectivamente. Si la excentricidad es 0,8; ¿cuál es la longitud de sus ejes?



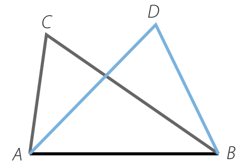
$2a = d(P, F) + d(P, F') = 9 + 7 = 16$ cm

$\left.\begin{array}{l} a = 8 \\ e = 0{,}8 \end{array}\right\} \rightarrow c = 6{,}4$

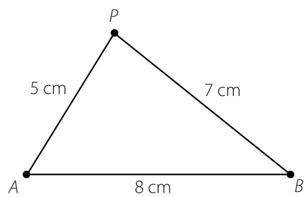
Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 4{,}8$ cm $\rightarrow 2b = 9{,}6$ cm

113 Los dos triángulos de la figura tienen la misma base, AB, que mide 8 cm, y sus perímetros miden 20 cm.

Dibuja otro triángulo con estas propiedades y halla un método para dibujarlos.



Respuesta abierta.



Si P es el tercer vértice de un triángulo en las condiciones del problema, entonces: $d(P, A) + d(P, B) = 12$

Por tanto, para dibujar todos los triángulos hay que trazar la elipse de focos A y B con constante $2a = 12$.

PARA FINALIZAR...

114 Dados los puntos $A(2, 1)$ y $B(6, 4)$, determina el lugar geométrico de los puntos P tales que el área del triángulo $\widehat{ABP}$ sea 10 de unidades cuadradas.

$d(A, B) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

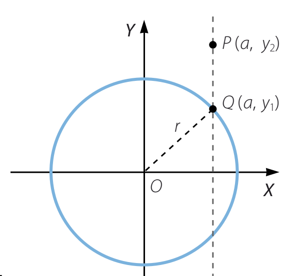
Si el área del triángulo mide 10, entonces la altura debe medir 4.

Sea r es la recta determinada por A y por B: $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{3} \rightarrow 3x - 4y - 2 = 0$

$$d(P, r) = 4 \rightarrow \frac{|3x - 4y - 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 4 \rightarrow \begin{cases} 3x - 4y - 2 = 20 \\ -3x + 4y + 2 = 20 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por dos rectas paralelas: $\begin{cases} 3x - 4y - 22 = 0 \\ 3x - 4y + 18 = 0 \end{cases}$

115 Considera un punto Q de una circunferencia con centro en el origen y radio r, y otro punto P con la misma abscisa que Q. Halla el lugar geométrico de los puntos P, sabiendo que la razón de las ordenadas de P y Q es k.



Sea $C(a, b)$ el centro de una circunferencia tangente a la recta r: $x = a$ que pasa por el punto $B(b, 0)$.

$$d(C, r) = d(C, B) \rightarrow \frac{|x - a|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \sqrt{(x-b)^2 + (y-0)^2}$$

$$\rightarrow (x-a)^2 = (x-b)^2 + y^2 \rightarrow y^2 = 2(b-a)x$$

El lugar geométrico es la parábola de foco B y directriz r.

116 Igual que una recta puede expresarse con ecuaciones paramétricas, también puede hacerse con las cónicas.

Comprueba que las ecuaciones:

a) $\begin{cases} x = a + r\cos\alpha \\ y = b + r\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$ son de una circunferencia.

b) $\begin{cases} x = a\cos\alpha \\ y = b\,\text{sen}\,\alpha \end{cases}$ son de una elipse.

a) $\left.\begin{matrix} x = a + r\cos\alpha \\ y = b + r\,\text{sen}\,\alpha \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} x - a = r\cos\alpha \\ y - b = r\,\text{sen}\,\alpha \end{matrix}\right\}$

$\to (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\cos^2\alpha + r^2\,\text{sen}^2\,\alpha = r^2$

Se trata de una circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio r.

b) $\left.\begin{matrix} x = a\cos\alpha \\ y = b\,\text{sen}\,\alpha \end{matrix}\right\} \to \left.\begin{matrix} \dfrac{x}{a} = \cos\alpha \\ \dfrac{y}{b} = \text{sen}\,\alpha \end{matrix}\right\} \to \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = 1$

Las ecuaciones corresponden a la elipse de centro $C(0, 0)$ y constante $2a$.

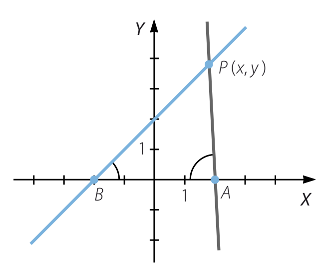
117 Describe el lugar geométrico de los puntos que verifican la ecuación $x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0$.

$x^2 - y^2 - 4x + 6y - 5 = 0 \to (x^2 - 4x + 4) - (y^2 - 6y + 9) - 5 = 4 - 9$

$\to (x-2)^2 - (y-3)^2 = 0 \to \begin{cases} x - 2 = y - 3 \\ x - 2 = -y + 3 \end{cases} \to \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases}$

El lugar geométrico está formado por dos rectas perpendiculares.

118 Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$, tales que el producto de las pendientes de las rectas que los unen con los puntos $A(2, 0)$ y $B(-2, 0)$ es igual a k.



Identifica el lugar geométrico si:

a) $k = -1$
b) $k = 0$
c) $k = -4$
d) $k = 4$

$\overrightarrow{AP} = (x-2, y) \to m_1 = \dfrac{y}{x-2}$

$\overrightarrow{BP} = (x+2, y) \to m_2 = \dfrac{y}{x+2}$

$\dfrac{y}{x-2} \cdot \dfrac{y}{x+2} = k \to y^2 = k(x^2 - 4)$

a) Si $k = -1 \to y^2 = -x^2 + 4 \to x^2 + y^2 = 4$

El lugar geométrico es una circunferencia centrada en el origen de coordenadas, de radio 2.

b) Si $k = 0 \rightarrow y^2 = 0 \rightarrow y = 0$

El lugar geométrico es una recta, el eje de abscisas.

c) Si $k = -4 \rightarrow y^2 = -4x^2 + 16 \rightarrow 4x^2 + y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$

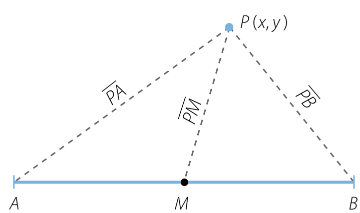
El lugar geométrico es una elipse centrada en el origen de coordenadas.

d) Si $k = 4 \rightarrow y^2 = 4x^2 - 16 \rightarrow 4x^2 - y^2 = 16 \rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$

El lugar geométrico es una hipérbola centrada en el origen de coordenadas.

119 **Consideramos un segmento de extremos *A* y *B*, y su punto medio *M*. Determina el lugar geométrico de los puntos *P*, tales que las distancias entre este punto y *M*, *A* y *B* cumplan la siguiente condición.**

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PM}}$$



Si $\overline{AB} = 2d$ y $M = (0, 0)$, se puede considerar que $A = (-d, 0)$ y $B = (d, 0)$.

Sea $P(x, y)$ un punto del lugar geométrico.

$\overline{PM} = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\overline{PA} = \sqrt{(x + d)^2 + y^2}$

$\overline{PB} = \sqrt{(x - d)^2 + y^2}$

$\frac{\overline{PM}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PM}} \rightarrow \left(\overline{PM}\right)^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB} \rightarrow x^2 + y^2 = \sqrt{(x + d)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x - d)^2 + y^2}$

$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 - d^2)^2 + (x + d)^2y^2 + (x - d)^2y^2 + y^4$

$x^4 + 2x^2y^2 = x^4 - 2d^2x^2 + d^4 + x^2y^2 + 2dxy^2 + d^2y^2 + x^2y^2 - 2dxy^2 + d^2y^2$

$2d^2x^2 - 2d^2y^2 = d^4 \rightarrow \frac{x^2}{\frac{d^2}{2}} - \frac{y^2}{\frac{d^2}{2}} = 1$

Por ser iguales los ejes, el lugar geométrico es una hipérbola equilátera.