Logarítmos

038 Calcula, mediante la definición, estos logaritmos.

a) $\log_2 8$ c) $\log 1.000$ e) $\ln e^{33}$ g) $\log_4 16$
b) $\log_3 81$ d) $\log 0{,}0001$ f) $\ln e^{-4}$ h) $\log_4 0{,}25$

a) $\log_2 8 = 3$
b) $\log_3 81 = 4$
c) $\log 1.000 = 3$
d) $\log 0{,}0001 = -4$
e) $\ln e^{33} = 33$
f) $\ln e^{-4} = -4$
g) $\log_4 16 = 2$
h) $\log_4 0{,}25 = -1$

039 Halla, mediante la definición, los siguientes logaritmos.

a) $\log_3 243$ c) $\log 1.000.000$ e) $\ln e^2$ g) $\log_7 343$
b) $\log_9 81$ d) $\log 0{,}00001$ f) $\ln e^{-14}$ h) $\log_4 0{,}0625$

a) $\log_3 243 = 5$
b) $\log_9 81 = 2$
c) $\log 1.000.000 = 6$
d) $\log 0{,}00001 = -5$
e) $\ln e^2 = 2$
f) $\ln e^{-14} = -14$
g) $\log_7 343 = 3$
h) $\log_4 0{,}0625 = -2$

040 Calcula los logaritmos y deja indicado el resultado.

a) $\log_4 32$ c) $\log_3 100$ e) $\log_{32} 4$
b) $\log_2 32$ d) $\log_5 32$ f) $\log_2 304$

a) $\log_4 32 = \dfrac{\log_2 32}{\log_2 4} = \dfrac{5}{2}$

b) $\log_2 32 = 5$

c) $\log_3 100 = \dfrac{\log 100}{\log 3} = 4{,}1918\ldots$

d) $\log_5 32 = \dfrac{\log 32}{\log 5} = 2{,}1533\ldots$

e) $\log_{32} 4 = \dfrac{\log_2 4}{\log_2 32} = \dfrac{2}{5}$

f) $\log_2 304 = \dfrac{\log 304}{\log 2} = 8{,}2479\ldots$

041 Sabiendo que $\log 2 = 0{,}3010$; $\log 3 = 0{,}4771$ y $\log 7 = 0{,}8451$; determina los logaritmos decimales de los 10 primeros números naturales.
Con estos datos, ¿sabrías calcular $\log 3{,}5$? ¿Y $\log 1{,}5$?

$\log 4 = \log (2 \cdot 2) = \log 2 + \log 2 = 2 \cdot 0{,}3010 = 0{,}6020$

$\log 5 = \log\left(\dfrac{10}{2}\right) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}3010 = 0{,}6990$

$\log 6 = \log (3 \cdot 2) = \log 3 + \log 2 = 0{,}4771 + 0{,}3010 = 0{,}7781$

$\log 8 = \log (4 \cdot 2) = \log 4 + \log 2 = 0{,}6020 + 0{,}3010 = 0{,}9030$

$\log 9 = \log (3 \cdot 3) = \log 3 + \log 3 = 0{,}4771 + 0{,}4771 = 0{,}9542$

$\log 10 = 1$

$\log 3{,}5 = \log\left(\dfrac{7}{2}\right) = \log 7 - \log 2 = 0{,}8451 - 0{,}3010 = 0{,}5441$

$\log 1{,}5 = \log\left(\dfrac{3}{2}\right) = \log 3 - \log 2 = 0{,}4771 - 0{,}3010 = 0{,}1761$

042 **Halla, sin ayuda de la calculadora, $\log_2 5$ y $\log_5 2$. Comprueba que su producto es 1.**

En el ejercicio anterior, se ha visto que $\log 2 = 0{,}3010$.

Si se utilizan cambios de base, resulta:

$$\log_2 10 = \frac{\log 10}{\log 2} = \frac{1}{0{,}3010} = 3{,}32$$

$$\log_2 10 = \log_2 (2 \cdot 5) = \log_2 2 + \log_2 5 \rightarrow \log_2 5 = 2{,}32$$

$$\log_5 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 5} = \frac{1}{\log_2 5} = 0{,}43$$

Como los dos números son inversos, su producto es 1.

También se puede comprobar de este modo:

$$\log_2 5 \cdot \log_5 2 = \frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{\log 2}{\log 5} = 1$$

043 **Halla el valor de x en las siguientes igualdades.**

a) $\log_x 256 = -8$

b) $\log_3 x = \frac{2}{3}$

c) $\log_5 \sqrt[6]{625} = x$

d) $\log_x 3 = 2$

a) $\frac{1}{2}$ b) $2{,}0801\ldots$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\sqrt{3}$

044 **Calcula cuánto vale $\log_a b \cdot \log_b a$.**

$$\log_a b \cdot \log_b a = \frac{\log a}{\log b} \cdot \frac{\log b}{\log a} = 1$$

119 **Calcula, mediante la definición, los logaritmos.**

a) $\log_3 243$

b) $\log_9 81$

c) $\log 1.000.000$

d) $\log 0{,}00001$

e) $\ln e^2$

f) $\ln e^{-14}$

g) $\log_7 343$

h) $\log_4 0{,}0625$

a) $\log_3 243 = 5$

b) $\log_9 81 = 2$

c) $\log 1.000.000 = 6$

d) $\log 0{,}00001 = -5$

e) $\ln e^2 = 2$

f) $\ln e^{-14} = -14$

g) $\log_7 343 = 3$

h) $\log_4 0{,}0625 = -2$

120 **Sabiendo que $\log_3 2 = 0{,}63$; halla $\log_3 24$ mediante las propiedades de los logaritmos.**

$$\log_3 24 = \log_3 (2^3 \cdot 3) = \log_3 2^3 + \log_3 3 = 3 \log_3 2 + \log_3 3 = 3 \cdot 0{,}63 + 1 =$$
$$= 1{,}89 + 1 = 2{,}89$$

121 **Calcula $\log_4 128$, utilizando las propiedades de los logaritmos, e intenta dar un resultado exacto.**

$\log_4 128$ $\quad 4^x = 128$ $\quad 2^{2x} = 128$ $\quad 2^{2x} = 2^7$ $\quad x = \frac{7}{2}$

.

122 Halla el resultado de las expresiones, mediante las propiedades de los logaritmos.

a) $2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49$

b) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125$

c) $\log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64$

a) $2\log_4 16 + \log_2 32 - 3\log_7 49 = 2\cdot 2 + 5 - 3\cdot 2 = 3$

b) $\log_2 8 + \log_3 27 + \log_5 125 = 3 + 3 + 3 = 9$

c) $\log_5 625 - \log_9 81 + \log_8 64 = 4 - 2 + 2 = 4$

123 Desarrolla las siguientes expresiones.

a) $\log_3 \dfrac{a^2\cdot b^5\cdot c}{d^2}$

b) $\log_2 \dfrac{a^3\cdot \sqrt[5]{b^6}}{\sqrt[3]{c^7}}$

c) $\log_{10} \dfrac{x\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[5]{y^2\cdot z^3}}$

d) $\ln \dfrac{e^3\cdot\sqrt[4]{a^6}}{1.000}$

a) $$\log_3 \frac{a^2\cdot b^5\cdot c}{d^2} = \log_3 (a^2\cdot b^5\cdot c) - \log_3 d^2 =$$
$$= \log_3 a^2 + \log_3 b^5 + \log_3 c - \log_3 d^2 =$$
$$= 2\log_3 a + 5\log_3 b + \log_3 c - 2\log_3 d$$

b) $$\log_2 \frac{a^3\cdot\sqrt[5]{b^6}}{\sqrt[3]{c^7}} = \log_2\left(a^3\cdot\sqrt[5]{b^6}\right) - \log_2\sqrt[3]{c^7} =$$
$$= \log_2 a^3 + \log_2 b^{\frac{6}{5}} - \log_2 c^{\frac{7}{3}} =$$
$$= 3\log_2 a + \frac{6}{5}\log_2 b + \frac{7}{3}\log_2 c$$

c) $$\log_{10}\frac{x\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[5]{y^2\cdot z^3}} = \log_{10}\left(x\cdot\sqrt{x}\right) - \log_{10}\sqrt[5]{y^2\cdot z^3} =$$
$$= \log_{10}\left(x\cdot x^{\frac{1}{2}}\right) - \log_{10}\left(y^{\frac{2}{5}}\cdot z^{\frac{3}{5}}\right) =$$
$$= \log_{10} x + \log_{10} x^{\frac{1}{2}} - \log_{10} y^{\frac{2}{5}} - \log_{10} z^{\frac{3}{5}} =$$
$$= \log_{10} x + \frac{1}{2}\log_{10} x - \frac{2}{5}\log_{10} y - \frac{3}{5}\log_{10} z$$

d) $$\ln\frac{e^3\cdot\sqrt[4]{a^6}}{1.000} = \ln\left(e^3\cdot a^{\frac{6}{4}}\right) - \ln 1.000 =$$
$$= \ln e^3 + \ln a^{\frac{3}{2}} - \ln 10^3 =$$
$$= 3\ln e + \frac{3}{2}\ln a - 3\ln 10$$

124 Si log e = 0,4343; ¿cuánto vale ln 10? ¿Y ln 0,1?

$$\ln 10 = \frac{\log 10}{\log e} = \frac{1}{0{,}4343} = 2{,}3025 \qquad \ln 0{,}1 = \frac{\log 0{,}1}{\log e} = \frac{-1}{0{,}4343} = -2{,}3025$$

125 Halla el valor de los logaritmos decimales, teniendo en cuenta que log 2 = 0,3010.

a) log 1.250 c) log 5 e) log 1,6
b) log 0,125 d) log 0,04 f) log 0,2

a) $\log 1.250 = \log \frac{10.000}{8} = \log 10.000 - \log 2^3 = 4 - 3 \cdot 0{,}3010 = 3{,}097$

b) $\log 0{,}125 = \log \frac{1}{8} = \log 1 - \log 2^3 = 0 - 3 \cdot 0{,}3010 = 0{,}903$

c) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{,}3010 = 0{,}6990$

d) $\log 0{,}04 = \log \frac{2^2}{100} = 2 \log 2 - 2 \log 10 = 2 \cdot 0{,}3010 - 2 = -1{,}398$

e) $\log 1{,}6 = \log \frac{2^4}{10} = 4 \log 2 - \log 10 = 4 \cdot 0{,}3010 - 1 = 0{,}204$

f) $\log 0{,}2 = \log \frac{2}{10} = \log 2 - \log 10 = 0{,}3010 - 1 = -0{,}699$

126 Calcula el valor de x.

a) $\log_3 x = 5$ c) $\log_2 x = -1$ e) $\log_3 (x-2) = 5$ g) $\log_2 (2-x) = -1$
b) $\log_5 x = 3$ d) $\log_{\frac{2}{3}} x = 4$ f) $\log_5 (x+2) = 3$ h) $\log_{23} (3+x) = 4$

a) $\log_3 x = 5 \rightarrow 3^5 = x \rightarrow x = 243$
b) $\log_5 x = 3 \rightarrow 5^3 = x \rightarrow x = 125$
c) $\log_2 x = -1 \rightarrow 2^{-1} = x \rightarrow x = 0{,}5$
d) $\log_{\frac{2}{3}} x = 4 \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^4 = x \rightarrow x = \frac{16}{81}$
e) $\log_3 (x-2) = 5 \rightarrow 3^5 = x - 2 \rightarrow x = 243 + 2 = 245$
f) $\log_5 (x+2) = 3 \rightarrow 5^3 = x + 2 \rightarrow x = 125 - 2 = 123$
g) $\log_2 (2-x) = -1 \rightarrow 2^{-1} = 2 - x \rightarrow x = -0{,}5 + 2 = 1{,}5$
h) $\log_{23} (3+x) = 4 \rightarrow 23^4 = 3 + x \rightarrow x = 279.841 - 3 = 279.838$

127 Halla cuánto vale x.

a) $\log_x 3 = -1$ b) $\log_x 5 = 2$ c) $\log_x 3 = -2$ d) $\log_x 2 = 5$

a) $\log_x 3 = -1 \rightarrow x^{-1} = 3 \rightarrow x = \frac{1}{3}$
b) $\log_x 5 = 2 \rightarrow x^2 = 5 \rightarrow x = \sqrt{5}$
c) $\log_x 3 = -2 \rightarrow x^{-2} = 3 \rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \rightarrow x = \sqrt{\frac{1}{3}}$
d) $\log_x 2 = 5 \rightarrow x^5 = 2 \rightarrow x = \sqrt[5]{2}$

128 Calcula el valor de x.

a) $\log_3 9^x = 2$
b) $\log 2^x = \frac{3}{2}$
c) $\ln 3^x = -1$
d) $\log_2 4^{x+4} = -2$
e) $\log_3 9^{x+3} = 3$
f) $\log 2^{x/2} = \frac{3}{2}$
g) $\ln 3^{x+6} = 3$
h) $\log_3 27^{3x+4} = -2$

a) $\log_3 9^x = 2 \rightarrow x \log_3 9 = 2 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1$

b) $\log 2^x = \frac{3}{2} \rightarrow x \log 2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2 \log 2} \rightarrow x = 4{,}9829$

c) $\ln 3^x = -1 \rightarrow x \ln 3 = -1 \rightarrow x = \frac{-1}{\ln 3} \rightarrow x = -0{,}9102$

d) $\log_2 4^{x+4} = -2 \rightarrow 2^{-2} = 4^{x+4} \rightarrow 2^{-2} = 2^{2x+8} \rightarrow -2 = 2x + 8 \rightarrow x = -5$

e) $\log_3 9^{x+3} = 3 \rightarrow 3^3 = 9^{x+3} \rightarrow 3^3 = 3^{3x+9} \rightarrow 3 = 3x + 9 \rightarrow x = -2$

f) $\log 2^{\frac{x}{2}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{x}{2} \log 2 = \frac{3}{2} \rightarrow x = \frac{3}{\log 2} \rightarrow x = 9{,}9658$

g) $\ln 3^{x+6} = 3 \rightarrow (x+6) \ln 3 = 3 \rightarrow x = \frac{3}{\ln 3} - 6 \rightarrow x = -3{,}2693$

h) $\log_3 27^{3x+4} = -2 \rightarrow (3x+4) \log_3 27 = -2 \rightarrow 3x + 4 = \frac{-2}{3}$

$\rightarrow 3x = \frac{-2-12}{3} \rightarrow x = \frac{-14}{9}$

129 Determina el valor de x.

a) $8^x = 1.024$
b) $3^{x^2} = 27$
c) $3^{x^2-6} = 27$
d) $10^{x-1} = 10^3$
e) $8^{x-2} = 1.024$
f) $(3^x)^2 = 27$
g) $3^{x^2} + 18 = 27$
h) $2^{x^2-2x+1} = 1$

a) $8^x = 1.024 \rightarrow 2^{3x} = 2^{10} \rightarrow x = \frac{10}{3}$

b) $3^{x^2} = 27 \rightarrow 3^{x^2} = 3^3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

c) $3^{x^2-6} = 27 \rightarrow 3^{x^2-6} = 3^3 \rightarrow x^2 - 6 = 3 \rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$

d) $10^{x-1} = 10^3 \rightarrow x - 1 = 3 \rightarrow x = 4$

e) $8^{x-2} = 1.024 \rightarrow 2^{3(x-2)} = 2^{10} \rightarrow 3x - 6 = 10 \rightarrow x = \frac{16}{3}$

f) $(3^x)^2 = 27 \rightarrow 3^{2x} \rightarrow 3^3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2}$

g) $3^{x^2} + 18 = 27 \rightarrow 3^{x^2} = 9 \rightarrow 3^{x^2} = 3^2 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \sqrt{2}$

h) $2^{x^2-2x+1} = 1 \rightarrow 2^{x^2-2x+1} = 2^0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1$