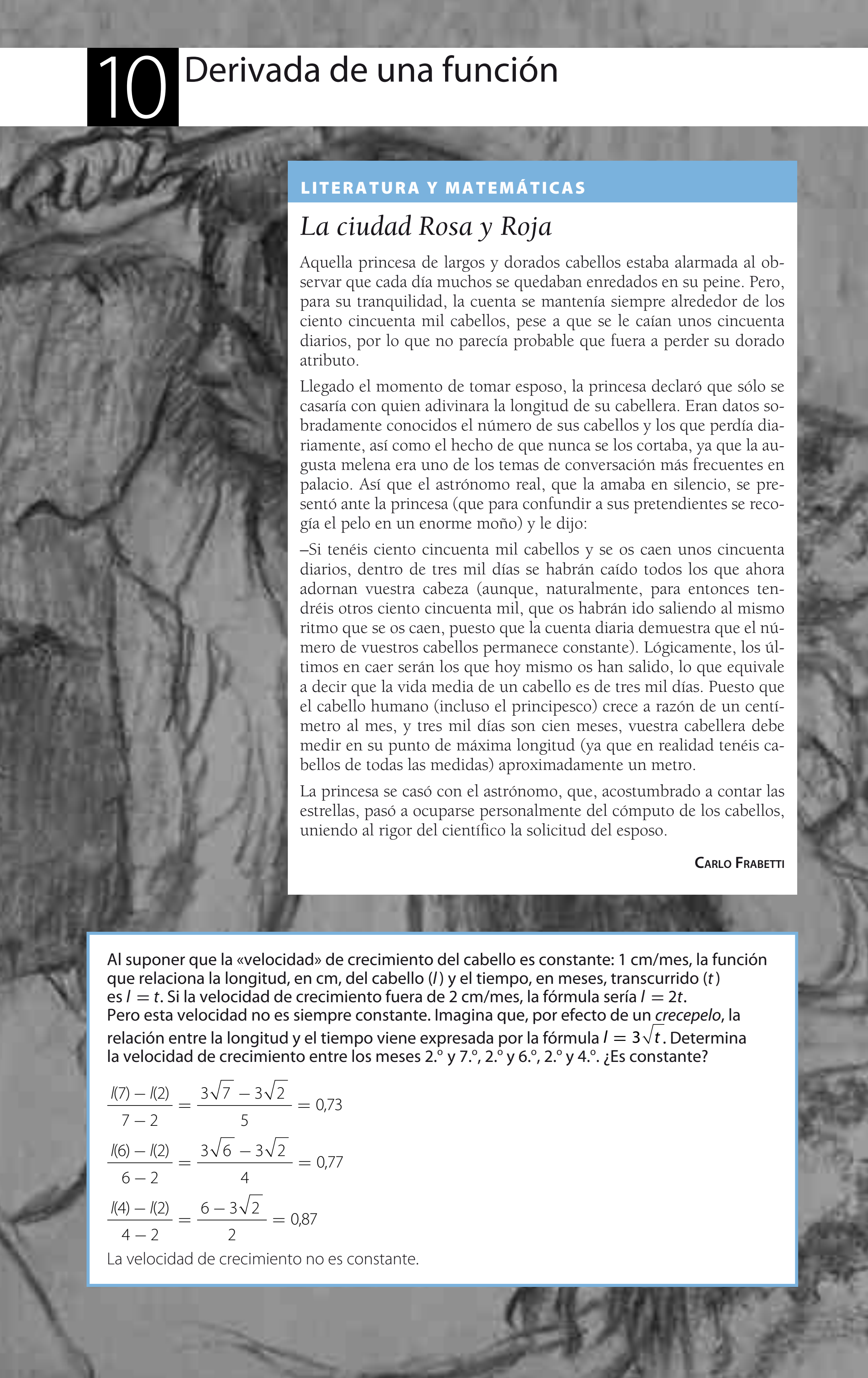


10 Derivada de una función

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

La ciudad Rosa y Roja

Aquella princesa de largos y dorados cabellos estaba alarmada al observar que cada día muchos se quedaban enredados en su peine. Pero, para su tranquilidad, la cuenta se mantenía siempre alrededor de los ciento cincuenta mil cabellos, pese a que se le caían unos cincuenta diarios, por lo que no parecía probable que fuera a perder su dorado atributo.

Llegado el momento de tomar esposo, la princesa declaró que sólo se casaría con quien adivinara la longitud de su cabellera. Eran datos sobradamente conocidos el número de sus cabellos y los que perdía diariamente, así como el hecho de que nunca se los cortaba, ya que la augusta melena era uno de los temas de conversación más frecuentes en palacio. Así que el astrónomo real, que la amaba en silencio, se presentó ante la princesa (que para confundir a sus pretendientes se recogía el pelo en un enorme moño) y le dijo:

–Si tenéis ciento cincuenta mil cabellos y se os caen unos cincuenta diarios, dentro de tres mil días se habrán caído todos los que ahora adornan vuestra cabeza (aunque, naturalmente, para entonces tendréis otros ciento cincuenta mil, que os habrán ido saliendo al mismo ritmo que se os caen, puesto que la cuenta diaria demuestra que el número de vuestros cabellos permanece constante). Lógicamente, los últimos en caer serán los que hoy mismo os han salido, lo que equivale a decir que la vida media de un cabello es de tres mil días. Puesto que el cabello humano (incluso el principesco) crece a razón de un centímetro al mes, y tres mil días son cien meses, vuestra cabellera debe medir en su punto de máxima longitud (ya que en realidad tenéis cabellos de todas las medidas) aproximadamente un metro.

La princesa se casó con el astrónomo, que, acostumbrado a contar las estrellas, pasó a ocuparse personalmente del cómputo de los cabellos, uniendo al rigor del científico la solicitud del esposo.

CARLO FRABETTI

Al suponer que la «velocidad» de crecimiento del cabello es constante: 1 cm/mes, la función que relaciona la longitud, en cm, del cabello (l) y el tiempo, en meses, transcurrido (t) es $l = t$. Si la velocidad de crecimiento fuera de 2 cm/mes, la fórmula sería $l = 2t$.
Pero esta velocidad no es siempre constante. Imagina que, por efecto de un *crecepelo*, la relación entre la longitud y el tiempo viene expresada por la fórmula $l = 3\sqrt{t}$. Determina la velocidad de crecimiento entre los meses 2.º y 7.º, 2.º y 6.º, 2.º y 4.º. ¿Es constante?

$$\frac{l(7) - l(2)}{7 - 2} = \frac{3\sqrt{7} - 3\sqrt{2}}{5} = 0{,}73$$

$$\frac{l(6) - l(2)}{6 - 2} = \frac{3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{4} = 0{,}77$$

$$\frac{l(4) - l(2)}{4 - 2} = \frac{6 - 3\sqrt{2}}{2} = 0{,}87$$

La velocidad de crecimiento no es constante.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 Determina cuáles de estos vectores son paralelos y cuáles son perpendiculares a $\vec{v} = (-2, 1)$.

a) $\vec{v}_1 = (-6, 3)$

b) $\vec{v}_2 = (-2, -4)$

c) $\vec{v}_3 = (8, -4)$

a) $\vec{v}_1 = 3\vec{v} \rightarrow$ Los vectores son paralelos.

b) $\vec{v} \cdot \vec{v}_2 = 0 \rightarrow$ Los vectores son perpendiculares.

c) $\vec{v}_3 = -4\vec{v} \rightarrow$ Los vectores son paralelos.

002 El ángulo que forma una recta con el eje de abscisas, ¿puede medir más de 180°? ¿Por qué?

No, porque si la inclinación de la recta sobrepasa la inclinación del eje, la semirrecta que queda por encima del mismo determina el ángulo menor de 180° que hay que considerar para calcular la pendiente.

003 Calcula la ecuación punto-pendiente de una recta que pasa por el punto $A(-3, 6)$ y que tiene como vector director $\vec{v} = (2, -4)$.

$y - 6 = -2(x + 3)$

004 Estudia la continuidad de estas funciones.

a) $f(x) = -\dfrac{5}{x-1}$

b) $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

c) $h(x) = \ln \dfrac{1}{x}$

a) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) $g(x)$ es continua en $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

c) $h(x)$ es continua en $(0, +\infty)$.

005 Dadas las funciones $f(x) = (2x - 1)^2$ y $g(x) = \sqrt{x-2}$, calcula $(g \circ f)(2)$ y $(f \circ g)(2)$.

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[(2x-1)^2] = \sqrt{(2x-1)^2 - 2} = \sqrt{4x^2 - 4x - 1} \rightarrow (g \circ f)(2) = \sqrt{7}$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\sqrt{x-2}\right) = \left(2\sqrt{x-2} - 1\right)^2 \rightarrow (f \circ g)(2) = 1$

006 Si la función $f(x)$ crece en el intervalo $(-10, -2)$ y decrece en el intervalo $(-2, 22)$, ¿qué ocurre en el punto $x = -2$?

En $x = -2$ la función presenta un máximo.

Derivada de una función

ACTIVIDADES

001 Halla la tasa de variación media de las funciones $f(x) = x^2 + x$ y $g(x) = x^3 + x$ en los siguientes intervalos.

a) [0, 1] b) [2, 3]

a) $T.V.M.\ ([0, 1]) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2 - 0}{1} = 2$

$T.V.M.\ ([0, 1]) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = \frac{2 - 0}{1} = 2$

b) $T.V.M.\ ([2, 3]) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{12 - 6}{1} = 6$

$T.V.M.\ ([2, 3]) = \frac{g(3) - g(2)}{3 - 2} = \frac{30 - 10}{1} = 20$

002 La cotización de una acción sigue durante una semana la función $f(x) = 0{,}02x^2 + 1$, donde x es el día de la semana (0 = lunes, 1 = martes, …). Halla la tasa de variación media de esa cotización de lunes a viernes.

$T.V.M.\ ([0, 4]) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{1{,}32 - 1}{4} = 0{,}08$

003 Calcula la derivada de estas funciones en $x = 1$.

a) $f(x) = 4x + 2$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

a) $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(1 + h) + 2 - 6}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h - 4}{h} = 4$

b) $f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(1 + h)^2} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - (1 + h)^2}{h(1 + h)^2} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1 - 1 - 2h - h^2}{h(1 + h)^2} = \lim_{h \to 0} \frac{-2 - h}{(1 + h)^2} = -2$

004 Halla la derivada de las funciones en los puntos $x = 0$ y $x = 1$.

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = \sqrt{x}$

a) $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3}{h} = \lim_{h \to 0} h^2 = 0$

$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^3 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} (3 + 3h + h^2) = 3$

b) $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} \to$ No existe.

$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + h - 1}{h(\sqrt{1 + h} + 1)} =$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{1 + h} + 1} = \frac{1}{2}$

005 **Halla la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 2$ en $x = 2$.**

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 + 2 - 6}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} (4 + h) = 4$$

La pendiente de la recta tangente es 4.

006 **¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3$ en $x = -1$?**

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^3 + 1}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1 + 3h - 3h^2 + h^3 + 1}{h} = \lim_{h\to 0} (3 - 3h + h^2) = 3$$

La pendiente de la recta tangente es 3.

007 **Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 2x^2$ en el punto $P(-1, 2)$. ¿Cuál es la ecuación de la recta normal?**

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(-1+h)^2 - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2 - 4h + 2h^2 - 2}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} (-4 + 2h) = -4$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = -4(x + 1) \rightarrow y = -4x - 2$

La ecuación de la recta normal es: $y - 2 = \frac{1}{4}(x + 1) \rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$

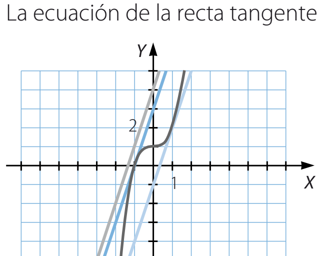
008 **Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = x^3 + 1$ en los puntos $x = 1$ y $x = -1$. Comprueba que son paralelas a la recta $y = 3x + 4$.**

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3 + 1 - 2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 1}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} (3 + 3h + h^2) = 3$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = 3(x - 1) \rightarrow y = 3x - 1$

$$f'(-1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-1+h)^3 + 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1 + 3h - 3h^2 + h^3 + 1}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} (3 - 3h + h^2) = 3$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = 3(x + 1) \rightarrow y = 3x + 3$



009 Halla la función derivada de $f(x) = 4x + 2$, aplicando la definición de derivada de una función en un punto. A partir del resultado que has obtenido, calcula la derivada de $f(x)$ en estos puntos.

a) $x = 2$ b) $x = -7$

Comprueba que obtienes el mismo resultado que si utilizas la definición de derivada en un punto.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h) + 2 - (4x+2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4x + 4h - 4x}{h} = 4$$

a) $f'(2) = 4$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(2+h) + 2 - 10}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{8 + 4h - 8}{h} = 4$$

b) $f'(7) = 4$

$$f'(7) = \lim_{h\to 0} \frac{f(7+h) - f(7)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4(7+h) + 2 - 30}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{28 + 4h - 28}{h} = 4$$

010 ¿Cuál es la función derivada de estas funciones?

a) $f(x) = \sqrt{x}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

a) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

b) $$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - (x+h)^2}{h(x+h)^2x^2} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - x^2 - 2hx - h^2}{h(x+h)^2x^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-2x - h}{(x+h)^2x^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

011 Utiliza la definición para calcular la función derivada de la función $f(x) = 2x^3 + x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^3 + (x+h)^2 - (2x^3 + x^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x^3 + 6hx^2 + 6h^2x + 2h^3 + x^2 + 2hx + h^2 - 2x^3 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6hx^2 + 6h^2x + 2h^3 + 2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (6x^2 + 6hx + 2h^2 + 2x + h) =$$

$$= 6x^2 + 2x$$

012 Calcula la derivada de estas funciones, y comprueba que se cumple que el resultado es igual a la suma de las derivadas de las funciones que las forman.

a) $f(x) = 7x + 2x^2$ b) $f(x) = x^{-2} + 3x$

a) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{7(x+h) + 2(x+h)^2 - (7x + 2x^2)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{7x + 7h + 2x^2 + 4hx + 2h^2 - 7x - 2x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{7h + 4hx + 2h^2}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} (7 + 4x + 2h) = 7 + 4x$

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{7(x+h) - 7x}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{7x + 7h - 7x}{h} +$

$+ \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4hx + 2h^2 - 2x^2}{h} = 7 + \lim_{h\to 0} (4x + 2h) = 7 + 4x$

b) $g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{-2} + 3(x+h) - (x^{-2} + 3x)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} + 3x + 3h - \frac{1}{x^2} - 3x}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 3hx^4 + 6h^2x^3 + 3h^2x^2 - x^2 - 2hx - h^2}{h(x+h)^2x^2} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^4 + 6hx^3 + 3hx^2 - 2x - h}{(x+h)^2x^2} = \frac{3x^4 - 2x}{x^4} = \frac{3x^3 - 2}{x^3}$

$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^{-2} - x^{-2}}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h) - 3x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}}{h} +$

$+ \lim_{h\to 0} \frac{3x + 3h - 3x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 - x^2 - 2hx - h^2}{h(x+h)^2x^2} + 3 =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{-2x - h}{h(x+h)^2x^2} + 3 = \frac{-2x}{x^4} + 3 = \frac{3x^3 - 2}{x^3}$

013 **Halla la derivada de las siguientes funciones, utilizando la definición de derivada del producto de un número por una función.**

a) $f(x) = 8x^3$ **b)** $f(x) = 4\sqrt{x}$ **c)** $f(x) = -5x^2$

a) $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3hx + h^2) = 3x^2$

$f'(x) = 8 \cdot 3x^2 = 24x^2$

b) $\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$

c) $\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$

$f'(x) = -5 \cdot 2x = -10x$

Derivada de una función

014 **Calcula el producto de las funciones $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = x + 1$, y después halla su derivada. Comprueba que el resultado es el mismo que si aplicamos la fórmula de la derivada del producto de funciones.**

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) = (x^2 - 4)(x + 1) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

$$p'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 + (x+h)^2 - 4(x+h) - 4 - (x^3 + x^2 - 4x - 4)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 + x^2 + 2hx + h^2 - 4x - 4h - 4 - x^3 - x^2 + 4x + 4}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3 + 2hx + h^2 - 4h}{h} = \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 + 2x + h - 4) =$$

$$= 3x^2 + 2x - 4$$

Aplicando la fórmula: $p'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) =$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - 4 - (x^2 - 4)}{h} \cdot (x+1) + (x^2 - 4) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) + 1 - (x+1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} \cdot (x+1) + (x^2 - 4) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} (2x + h) \cdot (x+1) + (x^2 - 4) \cdot 1 = 2x(x+1) + x^2 - 4 = 3x^2 + 2x - 4$$

015 **Halla las derivadas de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = -x + 5$. ¿Cuál es la derivada del cociente $\frac{f(x)}{g(x)}$? ¿Y la derivada del cociente $\frac{g(x)}{f(x)}$?**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$$

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h) + 5 - (-x + 5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-x - h + x}{h} = -1$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{2x \cdot (-x + 5) - (x^2 + 1)(-1)}{(-x + 5)^2} = \frac{-x^2 + 10x + 1}{(-x + 5)^2}$$

$$\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right]' = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{(-1)(x^2 + 1) - (-x + 5) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 - 10x - 1}{(x^2 + 1)^2}$$

016 **Calcula la derivada de esta función, indicando los pasos que sigues para hallarla.**

$$f(x) = x^2 + 2x$$

Se aplica la derivada de la suma de funciones, la derivada de la función potencial ($n = 2$), la derivada del producto de un número por una función y la derivada de la función identidad: $f'(x) = 2x^{2-1} + 2 \cdot 1 = 2x + 2$

017 **Halla la derivada de la siguiente función: $f(x) = \frac{x - 3}{2x^5}$**

Se aplica la derivada del cociente de funciones. Para derivar la función del numerador se usa la derivada de la suma de funciones, la derivada de la función identidad y la derivada de la función constante. Para obtener la derivada del denominador se aplica la derivada del producto de un número por una función y la derivada de la función potencial ($n = 5$):

$$f'(x) = \frac{1 \cdot 2x^5 - (x - 3) \cdot 2 \cdot 5x^4}{(2x^5)^2} = \frac{-8x^5 + 30x^4}{4x^{10}} = \frac{-4x + 15}{2x^6}$$

018 Halla la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 5\,sen\,x + 3\,cos\,x$ b) $f(x) = (5x^2 \cdot sen\,x) + (x \cdot cos\,x)$

a) $f'(x) = 5 \cdot cos\,x + 3 \cdot (-sen\,x) = 5\,cos\,x - 3\,sen\,x$

b) $f'(x) = (5 \cdot 2x \cdot sen\,x + 5x^2 \cdot cos\,x) + (1 \cdot cos\,x + x \cdot (-sen\,x)) =$
$= 10x\,sen\,x + 5x^2\,cos\,x + cos\,x - x\,sen\,x$

019 Obtén la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = e^x \cdot tg\,x$ b) $f(x) = 3x^2 - arc\,sen\,x$

a) $f'(x) = e^x \cdot tg\,x + e^x \cdot (1 + tg^2\,x) = e^x\,(1 + tg\,x + tg^2\,x)$

b) $f'(x) = 6x - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

020 Halla la derivada de estas funciones aplicando la regla de la cadena.

a) $f(x) = \ln\,(cos\,x)$ c) $f(x) = (x^4 + 2)^9$

b) $f(x) = cos\,(\ln x)$ d) $f(x) = x\sqrt{2x^3+1}$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{cos\;x} \cdot (-sen\;x) = -tg\;x$

b) $f'(x) = -sen\;(\ln\;x) \cdot \dfrac{1}{x}$

c) $f'(x) = 9(x^4 + 2)^8 \cdot 4x^3 = 36x^3(x^4 + 2)^8$

d) $f'(x) = 1 \cdot \sqrt{2x^3+1} + x \cdot \dfrac{1}{2}(2x^3+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 6x^2 =$
$= \sqrt{2x^3+1} + \dfrac{3x^3}{\sqrt{2x^3+1}} = \dfrac{5x^3+1}{\sqrt{2x^3+1}}$

021 Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = sen\,\sqrt{x^2+3x}$ c) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

b) $f(x) = 3\,sen\,x^2 + 2\,sen^2\,x$ d) $f(x) = e^{(\sqrt{x}+1)^2}$

a) $f'(x) = cos\,\sqrt{x^2+3x} \cdot \dfrac{1}{2}(x^2+3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+3) = \dfrac{(2x+3)\,cos\,\sqrt{x^2+3x}}{2\sqrt{x^2+3x}}$

b) $f'(x) = 3 \cdot cos\;x^2 \cdot 2x + 2 \cdot 2 \cdot sen\;x \cdot cos\;x = 6x \cdot cos\;x^2 + 4 \cdot sen\;x\;cos\;x$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{1+x}{1-x}} \cdot \dfrac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{1-x^2}$

$f'(x) = e^{(\sqrt{x}+1)^2} \cdot 2(\sqrt{x}+1) \cdot \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = e^{(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

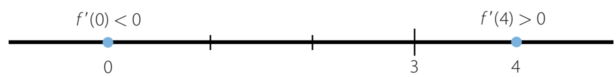
022 Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

b) $f(x) = 8x + x^2$

a) $f'(x) = 2x - 6$

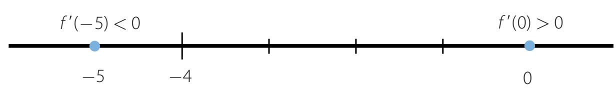
$2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$



La función es decreciente en $(-\infty, 3)$ y es creciente en $(3, +\infty)$.

b) $f'(x) = 8 + 2x$

$8 + 2x = 0 \rightarrow x = -4$



La función es decreciente en $(-\infty, -4)$ y es creciente en $(-4, +\infty)$.

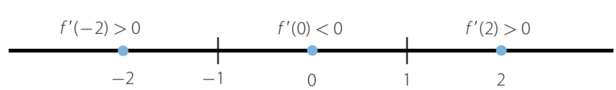
023 Determina los intervalos de crecimiento y los máximos y mínimos de estas funciones.

a) $f(x) = x^3 - 3x$

b) $f(x) = 2 - x$

a) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$



La función es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y es decreciente en $(-1, 1)$.

Presenta un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$.

b) $f'(x) = -1 < 0$

La función es decreciente en $\mathbb{R}$. No tiene máximos ni mínimos.

024 Calcula los máximos y mínimos de estas funciones.

a) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$

b) $f(x) = \dfrac{8}{x^2 + 2}$

c) $f(x) = x^3 - 12x$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 + 1}$

a) $f'(x) = 4x^3 - 8x$

$4x^3 - 8x = 0 \rightarrow 4x(x^2 - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

$f''(x) = 12x^2 - 8$

$f''\left(-\sqrt{2}\right) = 16 > 0 \rightarrow$ En $x = -\sqrt{2}$ tiene un mínimo.

$f''(0) = -8 < 0 \rightarrow$ En $x = 0$ tiene un máximo.

$f''\left(\sqrt{2}\right) = 16 > 0 \rightarrow$ En $x = \sqrt{2}$ tiene un mínimo.

b) $f'(x) = \dfrac{-16x}{(x^2 + 2)^2}$

$\dfrac{-16x}{(x^2 + 2)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) = \dfrac{-16(x^2 + 2)^2 + 16x \cdot 2(x^2 + 2) \cdot 2x}{(x^2 + 2)^4} = \dfrac{48x^2 - 32}{(x^2 + 2)^3}$

$f''(0) = -4 < 0 \rightarrow$ En $x = 0$ tiene un máximo.

c) $f'(x) = 3x^2 - 12$

$3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = \pm 2$

$f''(x) = 6x$

$f''(-2) = -12 < 0 \rightarrow$ En $x = -2$ tiene un máximo.

$f''(2) = 12 > 0 \rightarrow$ En $x = 2$ tiene un mínimo.

d) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot (x^3 + 1) - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^2} = \dfrac{-x^4 + 2x}{(x^3 + 1)^2}$

$\dfrac{-x^4 + 2x}{(x^3 + 1)^2} = 0 \rightarrow -x^4 + 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{2} \end{cases}$

$f''(x) = \dfrac{(-4x^3 + 2)(x^3 + 1)^2 - (-x^4 + 2x) \cdot 2(x^3 + 1) \cdot 3x^2}{(x^3 + 1)^4} = \dfrac{2x^6 - 14x^3 + 2}{(x^3 + 1)^3}$

$f''(0) = 2 > 0 \rightarrow$ En $x = 0$ tiene un mínimo.

$f''\left(\sqrt[3]{2}\right) = -\dfrac{2}{3} < 0 \rightarrow$ En $x = \sqrt[3]{2}$ tiene un máximo.

025 **Si la función $f(x) = x^3 + ax + b$ tiene un mínimo en el punto (1, 5), determina los valores de a y b. ¿Tiene algún otro máximo o mínimo esta función?**

$f'(x) = 3x^2 + a$

Si la función tiene un mínimo en $x = 1$: $f'(1) = 0 \rightarrow 3 + a = 0 \rightarrow a = -3$

Como el punto (1, 5) pertenece a la gráfica de la función $f(x)$, se verifica que: $f(1) = 5$

Al ser $f(x) = x^3 - 3x + b$, se tiene que: $1 - 3 + b = 5 \rightarrow b = 7$

Por tanto, la expresión de la función es: $f(x) = x^3 - 3x + 7$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

$f''(x) = 6x$

$f''(-1) = -6 < 0 \rightarrow$ En $x = -1$ tiene un máximo.

026 **Halla los máximos y mínimos de $f(x) = sen^2 x$ en $[0, 2\pi]$.**

$f'(x) = 2\ sen\ x\ cos\ x$

$$2\ sen\ x\ cos\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} sen\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \\ cos\ x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} \\ x = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$f''(x) = 2(cos^2\ x - sen^2\ x)$

$f''(0) = 2 > 0 \rightarrow$ En $x = 0$ tiene un mínimo.

$f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2 < 0 \rightarrow$ En $x = \dfrac{\pi}{2}$ tiene un máximo.

$f''(\pi) = 2 > 0 \rightarrow$ En $x = \pi$ tiene un mínimo.

$f''\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -2 < 0 \rightarrow$ En $x = \dfrac{3\pi}{2}$ tiene un máximo.

027 **Representa estas funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-x}$

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{2}{x^2+3}$

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty \rightarrow x = 0$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0 \rightarrow y = 0$ es una asíntota horizontal.

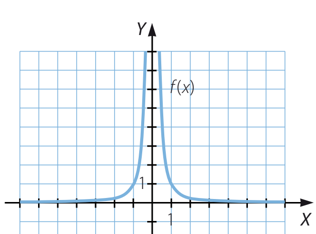
No hay puntos de corte con los ejes.

$f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$

Si $x > 0 \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(0, +\infty)$.

Si $x < 0 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



b) Dom $f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2+1}{x^2-x} \to \dfrac{1}{0}$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2+1}{x^2-x} \to \dfrac{2}{0}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x^2-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x^2-x} = -\infty \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2+1}{x^2-x} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2+1}{x^2-x} = +\infty \end{array}\right\}$$

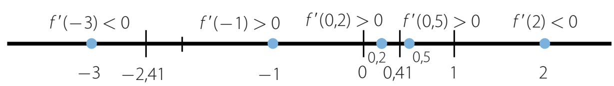
$x = 0$ es una asíntota vertical. $\qquad$ $x = 1$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2-x} = 1 \to y = 1$ es una asíntota horizontal.

No hay puntos de corte con los ejes.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2-x) - (x^2+1) \cdot (2x-1)}{(x^2-x)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2-x)^2}$$

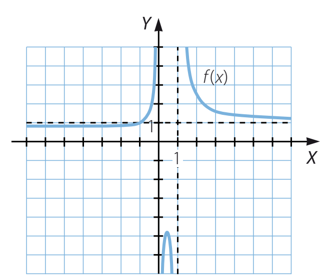
$$\frac{-x^2-2x+1}{(x^2-x)^2} = 0 \to -x^2-2x+1 = 0 \to x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{-2} = -1 \pm \sqrt{2}$$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty; -2{,}41) \cup (0{,}41; 1) \cup (1, +\infty)$ y es creciente en $(-2{,}41; 0) \cup (0; 0{,}41)$

Mínimo: $(-2{,}41; 0{,}82)$

Máximo: $(0{,}41; -4{,}82)$

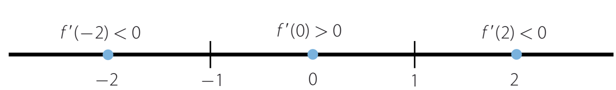


c) Dom $f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+x+1} = 0 \to y = 0$ es una asíntota horizontal.

Punto de corte: $(0, 0)$

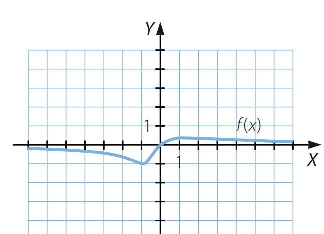
$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+x+1) - x \cdot (2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2} = 0 \to 1-x^2 = 0 \to x = \pm 1$$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y es creciente en $(-1, 1)$.

Mínimo: $(-1, -1)$

Máximo: $(1; 0{,}33)$



d) Dom $f = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x^2 + 3} = 0 \rightarrow y = 0$ es una asíntota horizontal.

No hay puntos de corte con los ejes.

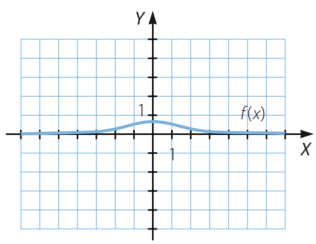
$f'(x) = -\dfrac{4x}{(x^2 + 3)^2}$

$-\dfrac{4x}{(x^2 + 3)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

Si $x > 0 \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(0, +\infty)$.

Si $x < 0 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0)$.

Máximo: (0; 0,66)



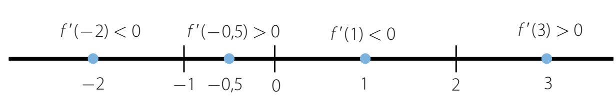
028 Representa las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{3}{4}x^4 - x^3 - 3x^2 + 6$ b) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^3 - 3x^2 - 6x$

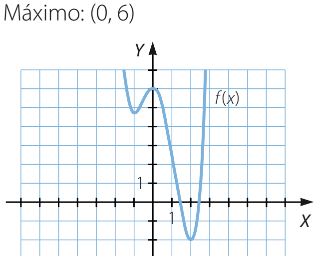
$3x^3 - 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow 3x(x^2 - x - 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 2)$ y es creciente en $(-1, 0) \cup (2, +\infty)$.

Mínimos: (−1; 4,75) y (2, −2)

Máximo: (0, 6)



b) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x - 1} \to \frac{1}{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{e^x - 1} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty \end{array}\right\} \to x = 0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^x - 1} = 0 \to y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

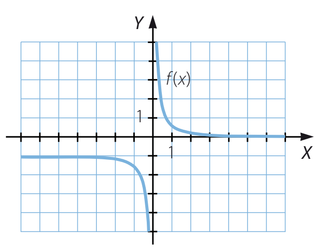
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1 \to y = -1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

No hay puntos de corte con los ejes.

$$f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$f'(x) < 0 \to f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

No hay máximos ni mínimos.



029 **Halla dos números naturales positivos cuya suma sea 60 y sabiendo que la suma de uno más el cuadrado del otro es la mayor posible.**

$x + y = 60 \to y = 60 - x$

$f(x) = 60 - x + x^2$

$f'(x) = -1 + 2x$

$$-1 + 2x = 0 \to x = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -2 < 0 \to \text{En } x = \frac{1}{2} \text{ tiene un máximo.}$$

Los números son: $\dfrac{1}{2}$ y $\dfrac{119}{2}$

030 **El área de un rectángulo es de 100 cm². Si queremos que tenga el menor perímetro posible, ¿cuáles son sus dimensiones?**

$$x \cdot y = 100 \rightarrow y = \frac{100}{x}$$

$$f(x) = 2x + 2 \cdot \frac{100}{x} = 2x + \frac{200}{x}$$

$$f'(x) = 2 - \frac{200}{x^2}$$

$$2 - \frac{200}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^2 - 200 = 0 \rightarrow x = \pm 10$$

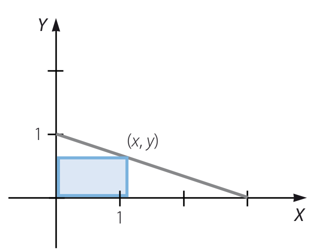
$$f''(x) = \frac{400}{x^3}$$

$f''(10) > 0 \rightarrow$ En $x = 10$ tiene un mínimo.

Como el valor de x corresponde a la medida de un lado, no puede ser $x = -10$. Por tanto, las dimensiones del rectángulo son: $x = y = 10$ cm. Se trata de un cuadrado de 10 cm de lado.

031 **Una pieza con forma de triángulo rectángulo tiene un cateto cuya longitud es 1 m y el otro cateto mide 3 m. Determina el rectángulo de lados paralelos a los catetos y cuya área sea la mayor posible que se puede obtener de ella.**

Si el triángulo se apoya sobre los ejes de coordenadas, los vértices coinciden con los puntos (0, 0), (3, 0) y (0, 1).



Entonces el rectángulo de lados paralelos a los catetos tiene un vértice sobre la recta que contiene a la hipotenusa:

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y}{-1} \rightarrow x + 3y = 3$$

$$x = 3 - 3y$$

$$f(y) = (3 - 3y)y = 3y - 3y^2$$

$$f'(y) = 3 - 6y$$

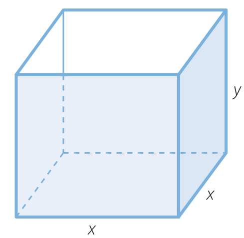
$$3 - 6y = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$f''(y) = -6 < 0 \rightarrow$ En $y = \frac{1}{2}$ tiene un máximo.

$$x = 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Así, los lados del rectángulo miden $\frac{1}{2}$ m y $\frac{3}{2}$ m.

032 **Se han construido cajas de cartón, de base cuadrada y sin tapa, cuya capacidad es de 1 m^3. Si queremos mantener el volumen, pero modificar la base, ¿cuáles serán sus dimensiones para minimizar el gasto de cartón empleado?**



$$x^2y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{x^2}$$

$$f(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{4}{x}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{4}{x^2}$$

$$2x - \frac{4}{x^2} = 0 \rightarrow x^3 - 2 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

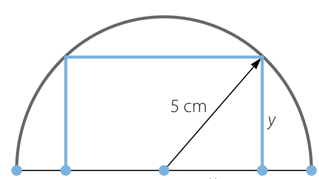
$$f''(x) = 2 + \frac{8}{x^3}$$

$$f''\left(\sqrt[3]{2}\right) > 0 \rightarrow \text{En } x = \sqrt[3]{2} \text{ tiene un mínimo.}$$

$$y = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

La arista de la base mide $\sqrt[3]{2}$ m y la altura del ortoedro es $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ m.

033 **Sabemos que el rectángulo de mayor área que puede inscribirse en una circunferencia es el cuadrado. ¿Sucederá lo mismo si consideramos una semicircunferencia? Para comprobarlo, halla las dimensiones de un rectángulo de área máxima, inscrito en una semicircunferencia de 5 cm de radio, sabiendo que su base está situada sobre el diámetro.**



$$x^2 + y^2 = 5^2 \rightarrow y = \sqrt{25 - x^2}$$

$$f(x) = x\sqrt{25 - x^2}$$

$$f'(x) = \sqrt{25 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} =$$

$$= \frac{25 - 2x^2}{\sqrt{25 - x^2}}$$

$$\frac{25 - 2x^2}{\sqrt{25 - x^2}} = 0 \rightarrow 25 - 2x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{25}{2}} = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$f''(x) = \frac{-4x\sqrt{25 - x^2} - (25 - 2x^2)\dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}}}{25 - x^2} = \frac{2x^3 - 75x}{(25 - x^2)\sqrt{25 - x^2}}$$

$$f''\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right) < 0 \rightarrow \text{En } x = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ tiene un máximo.}$$

Como el valor de x corresponde a la medida de un lado, no puede ser $x = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

$$y = \sqrt{25 - \frac{25}{2}} = \sqrt{\frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Se trata de un cuadrado cuyo lado mide $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm; por tanto, también se verifica en la semicircunferencia.

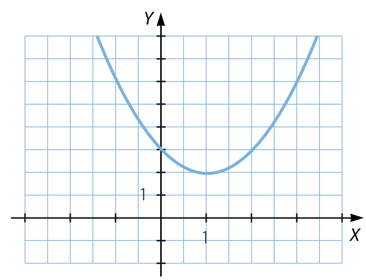
034 Determina la tasa de variación media de la función $y = x^2 - 2x + 6$ en el intervalo [1, 3].

$$T.V.M.\ ([1,\ 3]) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 5}{2} = 2$$

035 ¿Cuál es la tasa de variación media de la función $f(x) = \frac{12}{x}$ en el intervalo [1, 4]?

$$T.V.M.\ ([1,\ 4]) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{3 - 12}{3} = -3$$

036 Calcula la tasa de variación media en los intervalos indicados para la siguiente función.



a) [1, 2]

b) [1, 3]

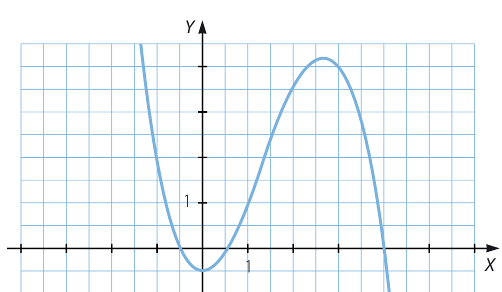
c) [2, 3]

a) $T.V.M.\ ([1,\ 2]) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{3 - 2}{1} = 1$

b) $T.V.M.\ ([1,\ 3]) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{6 - 2}{2} = 2$

c) $T.V.M.\ ([2,\ 3]) = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{6 - 3}{1} = 3$

037 Determina la tasa de variación media de esta función en cada uno de los intervalos.



a) [−1, 1] b) [1, 3] c) [−1, 3]

a) $T.V.M.\ ([-1,\ 1]) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1 - 2}{2} = -\frac{1}{2}$

b) $T.V.M.\ ([1,\ 3]) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{4 - 1}{2} = \frac{3}{2}$

c) $T.V.M.\ ([-1,\ 3]) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{4 - 2}{4} = \frac{1}{2}$

038 Halla la tasa de variación media de la función $y = 2x^2 - x$ en el intervalo $[2, 2 + h]$. Utiliza el resultado para determinar la tasa de variación media de la función en los siguientes intervalos.

a) [2, 3] b) [2, 5] c) [2, 8]

$$T.V.M.\ ([2,\ 2+h]) = \frac{f(2+h) - f(2)}{2+h-2} = \frac{2(2+h)^2 - (2+h) - 6}{h} =$$
$$= \frac{8 + 8h + 2h^2 - 2 - h - 6}{h} = 7 + 2h$$

a) $T.V.M.\ ([2, 3]) = 7 + 2 \cdot 1 = 9$

b) $T.V.M.\ ([2, 5]) = 7 + 2 \cdot 3 = 13$

c) $T.V.M.([2, 8]) = 7 + 2 \cdot 6 = 19$

039 Calcula el valor de a de modo que la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x + ax - 5$ en el intervalo [0, 2] sea 1.

$$T.V.M.\ ([0,\ 2]) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{4 + 2a - 5 - (-5)}{2} = \frac{4 + 2a}{2} = 2 + a = 1 \rightarrow a = -1$$

040 Encuentra dos funciones polinómicas de segundo grado que pasen por los puntos (0, 4) y (3, 10). Comprueba que la tasa de variación media en el intervalo [0, 3] es la misma para las dos funciones.

Respuesta abierta.

La función es de la forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Como la gráfica pasa por el punto (0, 4), se verifica que: $c = 4$

Al pasar también por el punto (3, 10), se cumple que: $9a + 3b + 4 = 10 \rightarrow 3a + b = 2$

Sean $f(x) = x^2 - x + 4$ y $g(x) = 2x^2 - 4x + 4$ las funciones pedidas.

$$T.V.M.\ ([0,\ 3]) = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{10 - 4}{3} = 2$$

$$T.V.M.\ ([0,\ 3]) = \frac{g(3) - g(0)}{3 - 0} = \frac{10 - 4}{3} = 2$$

041 ¿Por qué la tasa de variación media de la función $y = 2x - 3$ en cualquier intervalo es siempre 2?

Porque la gráfica de la función es una recta de pendiente 2, y esta indica su variación en cualquier intervalo.

042 El espacio recorrido por un objeto, en metros, se expresa con la fórmula: $e = 4t^2 + 2t + 1$

a) ¿Qué espacio ha recorrido a los 4 segundos? ¿Y a los 7 segundos?

b) ¿Cuál es la velocidad media que ha mantenido entre los 4 y 7 segundos?

a) A los 4 segundos: $e = 73$ m A los 7 segundos: $e = 211$ m

b) $T.V.M.\ ([4,\ 7]) = \dfrac{211 - 73}{7 - 4} = 46$ m/s

043 Aplica la definición de derivada en un punto para calcular las derivadas de las funciones en los puntos que se indican.

a) $y = 3x - 1$ en $x = 2$

b) $y = x^2 + x$ en $x = 3$

c) $y = \dfrac{4x+3}{2}$ en $x = -1$

d) $y = \dfrac{6}{x}$ en $x = 1$

e) $y = (x-1)^2$ en $x = -2$

a) $f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{3(2+h)-1-5}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{6+3h-6}{h} = 3$

b) $f'(3) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2+3+h-12}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{9+6h+h^2+h-9}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (7+h) = 7$

c) $f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{4(-1+h)+3}{2}+\dfrac{1}{2}}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-4+4h+3+1}{2h} = 2$

d) $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{6}{1+h}-6}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{6-6-6h}{h(1+h)} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-6}{1+h} = -6$

e) $f'(-2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-2+h-1)^2-9}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{9-6h+h^2-9}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (-6+h) = -6$

044 Calcula, utilizando la definición de derivada en un punto, $f'(2)$ y $f'(0)$ para la siguiente función: $f(x) = 2x^2 - x + 3$

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(2+h)^2-(2+h)+3-9}{h} =$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{8+8h+2h^2-2-h-6}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (7+2h) = 7$

$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h^2-h+3-3}{h} = \lim\limits_{h\to 0} (2h-1) = -1$

045 Si $f(x) = \frac{x+6}{3}$, determina a partir de la definición de derivada en un punto las siguientes derivadas.

a) $f'(-3)$ b) $f'(2)$

a) $f'(-3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-3+h+6}{3} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h+3-3}{3h} = \frac{1}{3}$

b) $f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2+h+6}{3} - \frac{8}{3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h+8-8}{3h} = \frac{1}{3}$

046 Obtén la pendiente de la recta tangente a la función $y = 3x^2 + 2x$ en el punto de abscisa $x = 5$.

$f'(x) = 6x + 2 \rightarrow f'(5) = 32$

La pendiente de la recta tangente es 32.

047 Halla la derivada de la función $y = -t^2 + 2t$ en el punto $t = 8$.

$f'(t) = -2t + 2 \rightarrow f'(8) = -14$

048 El espacio, en metros, que recorre un móvil en función del tiempo, en segundos, viene descrito por la expresión.

$$e = \frac{2}{3}t^2 + t$$

Calcula la velocidad instantánea del móvil a los 3 segundos.

$f'(t) = \frac{4}{3}t + 1 \rightarrow f'(3) = 5$

La velocidad instantánea del móvil a los 3 segundos es de 5 m/s.

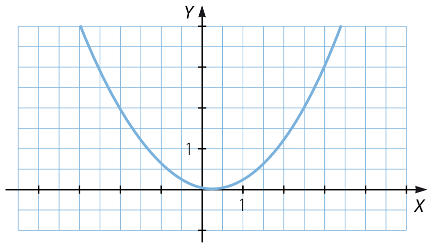
049 Determina la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 3x^2$ en el punto de abscisa 1.

$f(1) = 3$

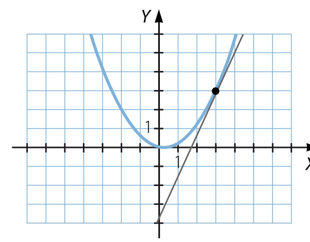
$f'(x) = 6x \rightarrow f'(1) = 6$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 3 = 6(x - 1) \rightarrow y = 6x - 3$

050 Demuestra gráficamente que la derivada de esta función en el punto de abscisa 3 tiene un valor comprendido entre 2 y 3.



La derivada de la función en el punto $x = 3$ es la pendiente de la recta tangente, y observando el dibujo de la misma se obtiene que, por cada unidad en horizontal, el avance vertical está comprendido entre 2 y 3 unidades.



051 A partir de la definición, calcula las funciones derivadas de las funciones que se indican.

a) $y = 2x + 3$

b) $y = \dfrac{2x - 1}{4}$

c) $y = x^3$

d) $y = 2x^2 - 3x$

e) $y = \dfrac{12}{x}$

f) $y = (3x^2 + 2)^2$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(x+h) + 3 - (2x+3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2x + 2h - 2x}{h} = 2$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{2(x+h) - 1}{4} - \dfrac{2x - 1}{4}}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2x + 2h - 1 - 2x + 1}{4h} = \dfrac{1}{2}$

c) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2) = 3x^2$

d) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(x+h)^2 - 3(x+h) - (2x^2 - 3x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2x^2 + 4hx + 2h^2 - 3x - 3h - 2x^2 + 3x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (4x + 2h - 3) = 4x - 3$

e) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\dfrac{12}{x+h} - \dfrac{12}{x}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{12x - 12x - 12h}{hx(x+h)} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-12}{x(x+h)} = -\dfrac{12}{x^2}$

f) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(3(x+h)^2+2)^2-(3x^2+2)^2}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{9(x+h)^4+12(x+h)^2+4-9x^4-12x^2-4}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{9x^4+36hx^3+54h^2x^2+36h^3x+9h^4+12x^2+24hx+12h^2-9x^4-12x^2}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} (36x^3+54hx^2+36h^2x+9h^3+24x+12h) = 36x^3+24x$

052 Obtén, aplicando la definición, la función derivada de $f(x) = x^2 - 2x + 4$, y calcula la derivada en estos puntos.

a) $f'(1)$ b) $f'(-3)$ c) $f'(2)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-2(x+h)+4-(x^2-2x+4)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2-2x-2h+4-x^2+2x-4}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h-2) = 2x-2$$

a) $f'(1) = 0$ b) $f'(-3) = -8$ c) $f'(2) = 2$

053 A partir de la definición, encuentra la función derivada de $f(x) = x^2 + 2x + 2$, y calcula $f'(0)$, $f'(-1)$ y $f'(3)$. Decide el tipo de crecimiento de la función en los puntos de abscisa 0, −1 y 3.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+2(x+h)+2-(x^2+2x+2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2+2x+2h+2-x^2-2x-2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h+2) = 2x+2$$

$f'(0) = 2 > 0 \rightarrow$ La función es creciente en $x = 0$.

$f'(-1) = 0 \rightarrow$ No se puede decir si la función tiene un mínimo o un máximo en $x = -1$.

$f'(3) = 8 > 0 \rightarrow$ La función es creciente en $x = 3$.

054 La función derivada de $y = \ln x$ es $y' = \dfrac{1}{x}$. Utiliza el resultado para determinar la ecuación de la recta tangente a esa curva en el punto de abscisa 1.

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1$

055 Obtén las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x + \sqrt{x}$ en el punto de abscisa 4.

$$y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - 6 = \frac{5}{4}(x-4) \rightarrow y = \frac{5}{4}x + 1$$

La ecuación de la recta normal es:

$$y - 6 = -\frac{4}{5}(x-4) \rightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{46}{5}$$

056 ¿Es horizontal la recta tangente a la función $y = x^3 + x^2$ en el origen de coordenadas? Si es cierto, ¿cuál será la ecuación de la recta normal?

$y' = 3x^2 + 2x$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = 0(x - 0) \rightarrow y = 0$

Esta recta es horizontal; por tanto, la recta normal es: $x = 0$

057 ¿Es cierto que la curva $y = x^2\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right)$ tiene una tangente horizontal en el punto (1, 0)?

$$y' = 2x\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right) + x^2 \cdot \frac{1}{3} = x^2 - x$$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = 0(x - 1) \rightarrow y = 0$

Es una recta horizontal.

058 ¿Se verifica que la recta tangente a la curva $y = (x^2 - x)(2x + 1)$, en el punto de abscisa -1, es paralela a la recta $14x - 2y - 3 = 0$?

$y' = (2x - 1)(2x + 1) + (x^2 - x) \cdot 2 = 6x^2 - 2x - 1$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = 7(x + 1) \rightarrow y = 7x + 7$

$$14x - 2y - 3 = 0 \rightarrow y = 7x - \frac{3}{2}$$

Como las pendientes de las rectas son iguales, se verifica que son paralelas.

059 Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función $y = \cos x$ en el punto de abscisa π.

$y' = -\operatorname{sen} x$

La ecuación de la recta tangente es: $y + 1 = 0(x - \pi) \rightarrow y = -1$

Esta recta es horizontal; por tanto, la recta normal es: $x = \pi$

060 ¿Cuánto tiene que valer a para que la función $f(x) = x \ln x - ax$ tenga, en el punto de abscisa e, una recta tangente paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

La bisectriz del primer cuadrante es: $y = x$

Esta recta y la recta tangente son paralelas si sus pendientes son iguales.

La pendiente de la recta tangente a la función, en $x = e$, es:

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - a = \ln x + 1 - a \rightarrow f'(e) = 2 - a$$

Entonces, tenemos que: $2 - a = 1 \rightarrow a = 1$

061 Halla la recta tangente y la recta normal a las funciones en los puntos indicados.

a) $y = 2^{3x-8}$ en $x = 3$ b) $y = x^2 \ln(x + 3)$ en $x = -2$ c) $y = (3x - 5)^6$ en $x = 2$

a) $y' = 2^{3x-8} \cdot 3$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = 6(x - 3) \rightarrow y = 6x - 16$

La ecuación de la recta normal es: $y - 2 = -\frac{1}{6}(x - 3) \rightarrow y = -\frac{1}{6}x + \frac{5}{2}$

b) $y' = 2x \ln(x+3) + x^2 \cdot \frac{1}{x+3}$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = 4(x+2) \rightarrow y = 4x + 8$

La ecuación de la recta normal es: $y - 0 = -\frac{1}{4}(x+2) \rightarrow y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

c) $y' = 6(3x-5)^5 \cdot 3 = 18(3x-5)^5$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 1 = 18(x-2) \rightarrow y = 18x - 35$

La ecuación de la recta normal es: $y - 1 = -\frac{1}{18}(x-2) \rightarrow y = -\frac{1}{18}x + \frac{10}{9}$

062 ●●○ **Determina la recta tangente y la recta normal a las funciones en los puntos indicados.**

a) $y = \sqrt{2x+6}$ **en** $x = 5$

b) $y = sen\,(2x + \pi)$ **en** $x = 0$

c) $y = tg\,\frac{\pi - x}{2}$ **en** $x = \pi$

a) $y' = \frac{1}{2}(2x+6)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+6}}$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 4 = \frac{1}{4}(x-5) \rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$

La ecuación de la recta normal es: $y - 4 = -4(x-5) \rightarrow y = -4x + 16$

b) $y' = cos\,(2x+\pi) \cdot 2$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = -2(x-0) \rightarrow y = -2x$

La ecuación de la recta normal es: $y - 0 = \frac{1}{2}(x-0) \rightarrow y = \frac{1}{2}x$

c) $y' = \left(1 + tg^2\,\frac{\pi - x}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$

La ecuación de la recta tangente es: $y - 0 = -\frac{1}{2}(x - \pi) \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$

La ecuación de la recta normal es: $y - 0 = 2(x - \pi) \rightarrow y = 2x - 2\pi$

063 ●●○ **Obtén las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 4$, que son paralelas a la recta de ecuación $6x - 2y + 1 = 0$.**

$6x - 2y + 1 = 0 \rightarrow y = 3x + \frac{1}{2}$

Esta recta y las rectas tangentes son paralelas si sus pendientes son iguales.

$y' = 3x^2 + 6x + 3$

$3x^2 + 6x + 3 = 3 \rightarrow x^2 + 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Si $x = 0$, la ecuación de la recta tangente es: $y - 4 = 3(x - 0) \rightarrow y = 3x + 4$

Si $x = -2$, la ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = 3(x + 2) \rightarrow y = 3x + 8$

064 Halla los puntos en los que la función $y = x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ tiene rectas tangentes de pendiente -2. Determina también la ecuación de dichas rectas tangentes.

$$y' = 3x^2 + 8x + 2$$

$$3x^2 + 8x + 2 = -2 \rightarrow 3x^2 + 8x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ x = -2 \end{cases}$$

Si $x = -\dfrac{2}{3}$, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - \frac{31}{27} = -2\left(x + \frac{2}{3}\right) \rightarrow y = -2x - \frac{5}{27}$$

Si $x = -2$, la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 5 = -2(x + 2) \rightarrow y = -2x + 1$$

065 Aplica las reglas de derivación a la función $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ para calcular:

a) La función derivada.

b) La derivada en los puntos de abscisa -1, 0 y 3.

c) La ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de abscisa 3.

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

b) $f'(-1) = 11$
$f'(0) = 2$
$f'(3) = 11$

c) $y - 1 = 11(x - 3) \rightarrow y = 11x - 32$

066 Emplea las reglas de derivación para calcular la función derivada de:

$$f(x) = (2x + 3)(x - 2)$$

A partir del resultado obtenido, determina:

a) $f'(2)$ $\quad f'\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ $\quad f'(-2)$ $\quad f'\left(\dfrac{1}{3}\right)$

b) La ecuación de la recta tangente en el punto $x = -2$.

c) La ecuación de la recta tangente en el punto $x = 2$.

$$f'(x) = 2(x - 2) + (2x + 3) \cdot 1 = 4x - 1$$

a) $f'(2) = 7$

$f'\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -7$

$f'(-2) = -9$

$f'\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$

b) $y - 4 = -9(x + 2) \rightarrow y = -9x - 26$

c) $y - 0 = 1(x - 2) \rightarrow y = x - 2$

067 Aplica las reglas de derivación para calcular la función derivada de las siguientes funciones.

a) $y = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$

b) $y = \log_3 x$

c) $y = 2^x$

d) $y = \sqrt{6x^5}$

a) $y' = 3x^2 - 4x + 5$

b) $y' = \dfrac{1}{x \ln 3}$

c) $y' = 2^x \cdot \ln 2$

d) $y' = \dfrac{1}{2}(6x^5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 30x^4 = \dfrac{15x^4}{\sqrt{6x^5}} = \dfrac{15x^2}{\sqrt{6x}}$

068 Utiliza las reglas de derivación para hallar la función derivada de estas funciones.

a) $y = \sqrt[5]{x}$

b) $y = 4^{2x}$

c) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 8}{2}$

d) $y = \dfrac{1}{x^4}$

e) $y = \dfrac{2x + 5}{7}$

f) $y = (6x)^4$

a) $y' = \dfrac{1}{5} \cdot x^{-\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

b) $y' = 4^{2x} \cdot \ln 4 \cdot 2$

c) $y' = \dfrac{2x - 3}{2}$

d) $y' = \dfrac{-4x^3}{(x^4)^2} = -\dfrac{4}{x^5}$

e) $y' = \dfrac{2}{7}$

f) $y' = 4(6x)^3 \cdot 6 = 24(6x)^3$

069 Halla la derivada de estas operaciones de funciones.

a) $y = (x - 2)(x^2 + 3x)$

b) $y = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$

c) $y = x^2 \log x - 1$

d) $y = \dfrac{8}{2x - 1}$

e) $y = \ln x + e^x$

f) $y = \sqrt[3]{x}\sqrt{x}$

g) $y = x^2 \cdot 2^x$

h) $y = \dfrac{3x + 4}{2x - 1}$

a) $y' = 1 \cdot (x^2 + 3x) + (x - 2)(2x + 3) = 3x^2 + 2x - 6$

b) $y' = \dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

c) $y' = 2x \log x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x \ln 10} = 2x \log x + \dfrac{x}{\ln 10}$

d) $y' = \dfrac{-8 \cdot 2}{(2x - 1)^2} = -\dfrac{16}{(2x - 1)^2}$

e) $y' = \dfrac{1}{x} + e^x$

f) $y' = \left(\dfrac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}\right) \cdot \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2x + 3x}{6\sqrt[6]{x^7}} = \dfrac{5}{6\sqrt[6]{x}}$

g) $y' = 2x \cdot 2^x + x^2 \cdot 2^x \cdot \ln 2$

h) $y' = \dfrac{3(2x - 1) - (3x + 4) \cdot 2}{(2x - 1)^2} = -\dfrac{11}{(2x - 1)^2}$

070 Calcula la derivada de las siguientes operaciones de funciones.

a) $y = \dfrac{\ln x + 4}{e^x}$

b) $y = \dfrac{x - 8}{\sqrt{x}}$

c) $y = (x^2 + 2)\log_2 x$

d) $y = \dfrac{\ln x}{e^x} + 4$

e) $y = 5e^x - 3^x$

f) $y = \dfrac{x^4}{x - 1}$

a) $y' = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot e^x - (\ln x + 4)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{1 - x(\ln x + 4)}{xe^x}$

b) $y' = \dfrac{1 \cdot \sqrt{x} - (x - 8)\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x})^2} = \dfrac{\sqrt{x} - \frac{x - 8}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{x + 8}{2x\sqrt{x}}$

c) $y' = 2x \cdot \log_2 x + (x^2 + 2) \cdot \dfrac{1}{x \ln 2} = 2x \log_2 x + \dfrac{x^2 + 2}{x \ln 2}$

d) $y' = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot e^x - \ln x \cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{1 - x \ln x}{xe^x}$

e) $y' = 5e^x - 3^x \cdot \ln 3$

f) $y' = \dfrac{4x^3(x - 1) - x^4 \cdot 1}{(x - 1)^2} = \dfrac{3x^4 - 4x^3}{(x - 1)^2}$

071 Deriva las siguientes funciones trigonométricas.

a) $y = sen\, x \cos x$

b) $y = \dfrac{\cos x}{x^2}$

c) $y = sec\, x\, cosec\, x$

d) $y = x\, tg\, x$

e) $y = x \arccos x$

f) $y = \dfrac{1}{tg\, x}$

a) $y' = \cos^2 x - sen^2\, x$

b) $y' = \dfrac{-sen\, x \cdot x^2 - \cos x \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{-x\, sen\, x - 2\cos x}{x^3}$

c) $y' = \dfrac{sen\, x}{\cos^2 x} \cdot cosec\, x + sec\, x \cdot \left(-\dfrac{\cos x}{sen^2\, x}\right) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{1}{sen^2\, x}$

d) $y' = 1 \cdot tg\, x + x \cdot (1 + tg^2\, x) = x + tg\, x + x\, tg^2\, x$

e) $y' = 1 \cdot \arccos x + x \cdot \left(-\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right) = \arccos x - \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$

f) $y' = -\dfrac{1 + tg^2\, x}{tg^2\, x}$

072 Calcula la derivada de las siguientes operaciones donde intervienen funciones trigonométricas.

a) $y = 2x + arc\ sen\ x + arc\ cos\ x$

b) $y = (1 + x^2)\ arc\ tg\ x$

c) $y = \ln x \cdot tg\ x$

d) $y = e^x\ sen\ x$

e) $y = \dfrac{cos\ x}{2 - x}$

a) $y' = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = 2$

b) $y' = 2x \cdot arc\ tg\ x + (1 + x^2) \cdot \dfrac{1}{1 + x^2} = 1 + 2x\ arc\ tg\ x$

c) $y' = \dfrac{1}{x} \cdot tg\ x + \ln x \cdot (1 + tg^2\ x)$

d) $y' = e^x \cdot sen\ x + e^x \cdot cos\ x = e^x(sen\ x + cos\ x)$

e) $y' = \dfrac{-sen\ x(2 - x) - cos\ x \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \dfrac{(x - 2)\ sen\ x + cos\ x}{(2 - x)^2}$

073 Determina las derivadas que se indican.

a) $f(x) = \ln x$ $\quad f''(x)$ y $f'''(x)$

b) $f(x) = x^5$ $\quad f'(x)$ y $f''(x)$

c) $f(x) = x^5 - 3x^4$ $\quad f'''(x)$ y $f^{IV}(x)$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{x} \rightarrow f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \rightarrow f'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

b) $f'(x) = 5x^4 \rightarrow f''(x) = 20x^3$

c) $f'(x) = 5x^4 - 12x^3 \rightarrow f''(x) = 20x^3 - 36x^2 \rightarrow f'''(x) = 60x^2 - 72x$
$\rightarrow f^{IV}(x) = 120x - 72$

074 Calcula las seis primeras derivadas de las funciones $y = sen\ x$ e $y = cos\ x$.

$y = sen\ x \rightarrow y' = cos\ x \rightarrow y'' = -sen\ x \rightarrow y''' = -cos\ x \rightarrow y^{IV} = sen\ x$
$\rightarrow y^{V} = cos\ x \rightarrow y^{VI} = -sen\ x$

$y = cos\ x \rightarrow y' = -sen\ x \rightarrow y'' = -cos\ x \rightarrow y''' = sen\ x \rightarrow y^{IV} = cos\ x$
$\rightarrow y^{V} = -sen\ x \rightarrow y^{VI} = -cos\ x$

075 Halla el valor de k para que la función $f(x) = \dfrac{kx - 5}{2x + 3}$ cumpla que $f'(-1) = 19$.

$f'(x) = \dfrac{k \cdot (2x + 3) - (kx - 5) \cdot 2}{(2x + 3)^2} = \dfrac{3k + 10}{(2x + 3)^2}$

$f'(-1) = 3k + 10 = 19 \rightarrow k = 3$

076 ●●○ Escribe las funciones que componen las siguientes funciones y halla la derivada en cada caso.

a) $y = \log_3 (2x + 1)$
b) $y = (3x^2 - 3x + 1)^4$
c) $y = sen\ \sqrt{x}$
d) $y = arc\ tg\ e^x$
e) $y = 2^{3x-4}$
f) $y = \sqrt[4]{x^2 - 1}$
g) $y = cos \ln x$
h) $y = 3^{cos\ x}$

a) $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = 2x + 1$

$$y' = \frac{1}{(2x+1)\ln 3} \cdot 2 = \frac{2}{(2x+1)\ln 3}$$

b) $f(x) = x^4$ y $g(x) = 3x^2 - 3x + 1$

$$y' = 4(3x^2 - 3x + 1)^3(6x - 3)$$

c) $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = \sqrt{x}$

$$y' = cos\ \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{cos\ \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

d) $f(x) = arc\ tg\ x$ y $g(x) = e^x$

$$y' = \frac{1}{1 + (e^x)^2} \cdot e^x = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$$

e) $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3x - 4$

$$y' = 2^{3x-4} \cdot \ln 2 \cdot 3$$

f) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ y $g(x) = x^2 - 1$

$$y' = \frac{1}{4}(x^2 - 1)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2x = \frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2-1)^3}}$$

g) $f(x) = cos\ x$ y $g(x) = \ln x$

$$y' = -sen \ln x \cdot \frac{1}{x} = -\frac{sen \ln x}{x}$$

h) $f(x) = 3^x$ y $g(x) = cos\ x$

$$y' = 3^{cos\ x} \cdot \ln 3 \cdot (-sen\ x)$$

077 ●○○ Calcula la función derivada de estas funciones, aplicando la regla de la cadena.

a) $y = \ln (x^2 - 5x)$
b) $y = 2^{3x-5}$
c) $y = \sqrt{x^2 + x}$
d) $y = \sqrt{\log_3 x}$

a) $$y' = \frac{1}{x^2 - 5x} \cdot (2x - 5) = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x}$$

b) $$y' = 2^{3x-5} \cdot \ln 2 \cdot 3$$

c) $$y' = \frac{1}{2}(x^2 + x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x + 1) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

d) $$y' = \frac{1}{2}(\log_3 x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x \ln 3} = \frac{1}{2\sqrt{\log_3 x}} \cdot \frac{1}{x \ln 3}$$

078 ●●○ Aplica la regla de la cadena para determinar la función derivada de estas funciones.

a) $y = \ln tg\, x$
b) $y = cos\,\sqrt{x}$
c) $y = \log_2 x^2$
d) $y = sen\,(cos\, x)$
e) $y = arc\, tg\, x^2$
f) $y = tg\, \ln x$
g) $y = cos\,\sqrt{x}$
h) $y = \log_2^2 x$
i) $y = cos\,(sen\, x)$
j) $y = arc\, tg^2\, x$

a) $y' = \dfrac{1}{tg\ x} \cdot (1 + tg^2\ x)$

b) $y' = \dfrac{1}{2}(cos\ x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-sen\ x) = -\dfrac{sen\ x}{2\sqrt{cos\ x}}$

c) $y' = \dfrac{1}{x^2 \cdot \ln 2} \cdot 2x = \dfrac{2}{x \ln 2}$

d) $y' = cos\ (cos\ x) \cdot (-sen\ x)$

e) $y' = \dfrac{1}{1 + (x^2)^2} \cdot 2x = \dfrac{2x}{1 + x^4}$

f) $y' = (1 + tg^2\ \ln\ x) \cdot \dfrac{1}{x}$

g) $y' = \left(-sen\ \sqrt{x}\right) \cdot \dfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = -\dfrac{sen\ \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

h) $y' = 2 \log_2\ x \cdot \dfrac{1}{x \cdot \ln 2}$

i) $y' = -sen\ (sen\ x) \cdot cos\ x$

j) $y' = 2\ arc\ tg\ x \cdot \dfrac{1}{1 + x^2}$

079 ●●● Halla los coeficientes y exponentes desconocidos para que se verifique que las funciones y sus derivadas se corresponden.

a) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 6$ $\quad f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$

b) $g(x) = a \ln x + bx$ $\quad g'(x) = \dfrac{3}{x} - 5$

c) $h(x) = \dfrac{a^x}{x^b}$ $\quad h'(x) = a^x\left(\dfrac{\ln 2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$

d) $i(x) = \dfrac{x}{\sqrt[b]{x}}$ $\quad i'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[b]{x}}$

a) $a = 2, b = -3$
b) $a = 3, b = -5$
c) $a = 2, b = 1$
d) $b = 3$

080 Deriva las siguientes funciones.

a) $y = x^2 \cdot 2^{x^2}$

b) $y = 5^{x \ln x}$

c) $y = e^{\frac{\ln x}{x}}$

d) $y = \dfrac{e^{\ln x}}{x}$

e) $y = \ln (xe^x)$

f) $y = \ln x \cdot e^x$

a) $y' = 2x \cdot 2^{x^2} + x^2 \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2 \cdot 2x = 2^{x^2+1}(x + x^3 \ln 2)$

b) $y' = 5^{x \ln x} \cdot \ln 5 \cdot \left(\ln x + x \cdot \dfrac{1}{x}\right) = 5^{x \ln x} \cdot \ln 5 \cdot (\ln x + 1)$

c) $y' = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

d) $y' = \dfrac{e^{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \cdot x - e^{\ln x} \cdot 1}{x^2} = 0$

e) $y' = \dfrac{1}{xe^x} \cdot (e^x + xe^x) = \dfrac{x+1}{x}$

f) $y' = \dfrac{1}{x} \cdot e^x + \ln x \cdot e^x$

081 Halla la derivada de estas funciones.

a) $y = (2x + 1)^3 \cdot 3^x$

b) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 3}{x^3}}$

c) $y = \dfrac{x^2 - 3}{\sqrt{x^3}}$

d) $y = \dfrac{2x - 3}{e^x}$

e) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3}}{x^3}$

f) $y = x^2 - \dfrac{3}{\sqrt{x^3}}$

a) $y' = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 \cdot 3^x + (2x + 1)^3 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = [6 + (2x + 1) \ln 3] \cdot (2x + 1)^2 \cdot 3^x$

b) $y' = \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{x^2 - 3}{x^3}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \dfrac{2x \cdot x^3 - (x^2 - 3) \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{-x^2 + 9}{2x^4} \cdot \sqrt{\dfrac{x^3}{x^2 - 3}}$

c) $y' = \dfrac{2x \cdot \sqrt{x^3} - (x^2 - 3) \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2}{x^3} = \dfrac{4x^3 - 3x(x^2 - 3)}{2x^2\sqrt{x^3}} = \dfrac{x^2 + 9}{2x^2\sqrt{x}}$

d) $y' = \dfrac{2 \cdot e^x - (2x - 3) \cdot e^x}{e^{2x}} = \dfrac{5 - 2x}{e^x}$

e) $y' = \dfrac{\frac{1}{2} \cdot (x^2 - 3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \cdot x^3 - \sqrt{x^2 - 3} \cdot 3x^2}{x^6} = \dfrac{x^2 - 3(x^2 - 3)}{x^4\sqrt{x^2 - 3}} = \dfrac{-2x^2 + 9}{x^4\sqrt{x^2 - 3}}$

f) $y' = 2x + \dfrac{3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 3x^2}{x^3} = 2x + \dfrac{9x^2}{2x^3\sqrt{x^3}} = 2x + \dfrac{9}{2x^2\sqrt{x}}$

082 Calcula la derivada de estas funciones trigonométricas.

a) $y = \cos \frac{1}{x}$

b) $y = \frac{\cos x}{x}$

c) $y = \frac{1}{\cos x}$

d) $y = \left(\cos \frac{1}{x}\right)x$

e) $y = \operatorname{sen} \frac{x}{\cos x}$

f) $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

g) $y = \frac{x}{\operatorname{sen} \cos x}$

h) $y = x \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x}$

a) $y' = -\operatorname{sen} \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2}$

b) $y' = \frac{-\operatorname{sen} x \cdot x - \cos x \cdot 1}{x^2} = \frac{-x \operatorname{sen} x - \cos x}{x^2}$

c) $y' = -\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

d) $y' = \left(-\operatorname{sen} \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) \cdot x + \cos \frac{1}{x} \cdot 1 = \operatorname{sen} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$

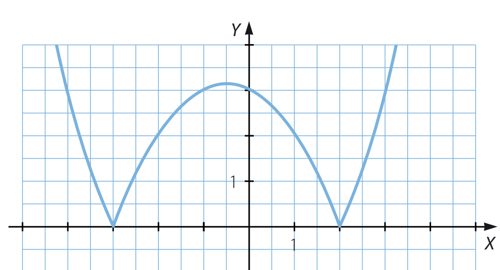
e) $y' = \cos \frac{x}{\cos x} \cdot \frac{\cos x + x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$

f) $y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

g) $y' = \frac{1 \cdot \operatorname{sen} (\cos x) - x \cos (\cos x)(-\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^2 (\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} (\cos x) + x \cos (\cos x) \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 (\cos x)}$

h) $y' = 1 \cdot \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} + \frac{x}{2(1+x)\sqrt{x}}$

083 Decide si la siguiente función es continua y derivable en todo su dominio. Si en algún punto no es continua o derivable, razónalo.

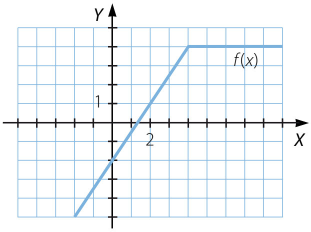


La función es continua en $\mathbb{R}$ y es derivable en $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$, porque en los puntos $x = -3$ y $x = 2$ la gráfica presenta «picos», es decir, en estos puntos no puede determinarse una tangente a la función, ya que las pendientes en los puntos que están a su izquierda y a su derecha tienen distinto signo.

Derivada de una función

084 Dibuja una función continua que no sea derivable en el punto de abscisa $x = 4$, que en el resto del dominio sea derivable y que su derivada se anule si x es mayor o igual que 4.

Respuesta abierta.



085 Estudia si las siguientes funciones son continuas y derivables en los puntos en los que la función cambia su expresión algebraica.

a) $f(x) = \begin{cases} 4x + 5 & \text{si } x < 2 \\ 4x^2 - \dfrac{3}{2}x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 6x & \text{si } x < -1 \\ 2x^2 + 8x + 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

a) $f(2) = 13$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (4x + 5) = 13 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(4x^2 - \dfrac{3}{2}x\right) = 13 \end{array}\right\} \to \exists \lim_{x \to 2} f(x) = 13$$

$f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) \to f(x)$ es continua en $x = 2$.

$$f'(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 2 \\ 8x - \dfrac{3}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4 \\ f'(2^+) = \dfrac{29}{2} \end{array}\right\} \to \text{La función no es derivable en } x = 2\text{, porque los valores no coinciden.}$$

b) $g(-1) = -5$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 + 6x) = -5 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (2x^2 + 8x + 1) = -5 \end{array}\right\} \to \exists \lim_{x \to -1} g(x) = -5$$

$g(-1) = \lim\limits_{x \to -1} g(x) \to g(x)$ es continua en $x = -1$.

$$g'(x) = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -1 \\ 4x + 8 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} g'(-1^-) = 4 \\ g'(-1^+) = 4 \end{array}\right\} \to \text{La función es derivable en } x = -1.$$

086 ¿Son continuas y derivables las funciones en todos los puntos de su dominio?

a) $y = |x^2 - 4|$

b) $y = |x^2 + 1|$

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si} \quad x \leq -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$

Si $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, la función es continua. Se estudian los puntos en los que la función cambia de expresión:

$f(-2) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} (x^2 - 4) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} (-x^2 + 4) = 0 \end{array}\right\} \to \exists \lim\limits_{x \to -2} f(x) = 0$$

$f(-2) = \lim\limits_{x \to -2} f(x)$

$f(x)$ es continua en $x = -2$.

$f(2) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-x^2 + 4) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 4) = 0 \end{array}\right\} \to \exists \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$$

$f(2) = \lim\limits_{x \to 2} f(x)$

$f(x)$ es continua en $x = 2$.

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x < -2 \\ -2x & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ 2x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$

Si $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, la función es derivable. Se estudian los puntos en los que la derivada cambia de expresión:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -4 \\ f'(-2^+) = 4 \end{array}\right\}$$

La función no es derivable en $x = -2$, porque los valores no coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -4 \\ f'(2^+) = 4 \end{array}\right\}$$

La función no es derivable en $x = 2$, porque los valores no coinciden.

b) $g(x) = |x^2 + 1| = x^2 + 1$

Por ser polinómica, la función es continua y derivable en $\mathbb{R}$.

087 ●●○

Estudia la continuidad y derivabilidad de las funciones.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x & \text{si } x < -2 \\ 3x^2 - 2x - 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$ b) $h(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 9 & \text{si } x < 3 \\ 2x^2 - 4x & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 2^{10-x} - 2 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

a) Si $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, la función es continua. Se estudia el punto en el que la función cambia de expresión:

$f(-2) = 14$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} (x^2 - 5x) = 14 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} (3x^2 - 2x - 2) = 14 \end{array}\right\} \to \exists \lim_{x \to -2} f(x) = 14$$

$f(-2) = \lim\limits_{x \to -2} f(x) \to f(x)$ es continua en $x = -2$.

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si} \quad x < -2 \\ 6x - 2 & \text{si} \quad x > -2 \end{cases}$$

Si $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$, la función es derivable. Se estudia el punto en el que la derivada cambia de expresión:

$$\left.\begin{array}{l} f'(-2^-) = -9 \\ f'(-2^+) = -14 \end{array}\right\} \to \text{La función no es derivable en } x = -2\text{, porque los valores no coinciden.}$$

b) Si $x \in \mathbb{R} - \{3, 5\}$, la función es continua. Se estudian los puntos en los que la función cambia de expresión:

$h(3) = 6$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 + 2x - 9) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (2x^2 - 4x) = 6 \end{array}\right\} \to \exists \lim_{x \to 3} h(x) = 6$$

$h(3) = \lim\limits_{x \to 3} h(x) \to h(x)$ es continua en $x = 3$.

$h(5) = 30$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} (2x^2 - 4x) = 30 \\ \lim\limits_{x \to 5^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 5^+} (2^{10-x} - 2) = 30 \end{array}\right\} \to \exists \lim_{x \to 5} h(x) = 30$$

$h(5) = \lim\limits_{x \to 5} h(x) \to h(x)$ es continua en $x = 5$.

Por tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$.

$$h'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} \quad x < 3 \\ 4x - 4 & \text{si} \quad 3 < x < 5 \\ -2^{10-x} \cdot \ln 2 & \text{si} \quad x > 5 \end{cases}$$

Si $x \in \mathbb{R} - \{3, 5\}$, la función es derivable. Se estudian los puntos en los que la derivada cambia de expresión:

$$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = 8 \\ f'(3^+) = 8 \end{array}\right\} \to \text{La función es derivable en } x = 3.$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(5^-) = 16 \\ f'(5^+) = -32 \ln 2 \end{array}\right\} \to \text{La función no es derivable en } x = 5\text{, porque los valores no coinciden.}$$

Luego la función es derivable en $x \in \mathbb{R} - \{5\}$.

088 Decide si estas funciones crecen o decrecen en los puntos que se indican.

a) $y = -2x^3 + 3x^2 - x + 1$
En $x = 1$

b) $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x}$
En $x = -2$

c) $y = 2^x + 3 \ln x - 8$
En $x = 4$

d) $y = 2x + 3\sqrt{x}$
En $x = 9$

a) $f'(x) = -6x^2 + 6x - 1$
$f'(1) = -1 < 0 \rightarrow$ La función es decreciente en $x = 1$.

b) $f'(x) = \dfrac{(4x-3)x - (2x^2 - 3x + 1)}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2}$
$f'(-2) = \dfrac{7}{4} > 0 \rightarrow$ La función es creciente en $x = -2$.

c) $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 + \dfrac{3}{x}$
$f'(4) = 16 \ln 2 + \dfrac{3}{4} > 0 \rightarrow$ La función es creciente en $x = 4$.

d) $f'(x) = 2 + \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$
$f'(9) = \dfrac{5}{2} > 0 \rightarrow$ La función es creciente en $x = 9$.

089 Determina los puntos de las gráficas de estas funciones cuya tangente es horizontal.

a) $y = 3x^2 - 15x + 13$

b) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 8$

c) $y = 2x^3 + 3x^2 + 6x - 12$

d) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

e) $y = \dfrac{x + 2}{x - 2}$

La tangente es horizontal si la pendiente es igual a cero.

a) $y' = 6x - 15$
$6x - 15 = 0 \rightarrow x = \dfrac{5}{2}$

b) $y' = 6x^2 + 6x - 36$
$6x^2 + 6x - 36 = 0 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$

c) $y' = 6x^2 + 6x + 6$

$6x^2 + 6x + 6 = 0 \rightarrow x^2 + x + 1 = 0$

La ecuación no tiene solución, por lo que no hay puntos que tengan tangente horizontal.

d) $y' = \dfrac{(2x+2)(x+1) - (x^2 + 2x + 2)}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

$\dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x^2 + 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

e) $y' = \dfrac{x - 2 - (x+2)}{(x-2)^2} = \dfrac{-4}{(x-2)^2}$

$\dfrac{-4}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow -4 = 0$

La ecuación no tiene solución, y no hay puntos que tengan tangente horizontal.

090 **¿En qué puntos de las gráficas de estas funciones es horizontal la tangente? Decide si son máximos o mínimos.**

a) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

b) $y = \dfrac{x^2}{2 - x}$

c) $y = \dfrac{x^2 + 9}{x}$

d) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 4}$

a) $f'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-1) - (x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

$\dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \rightarrow x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$

$f''(2) = 2 > 0 \rightarrow$ En $x = 2$ tiene un mínimo.

$f''(0) = -2 < 0 \rightarrow$ En $x = 0$ tiene un máximo.

b) $f'(x) = \dfrac{2x(2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \dfrac{4x - x^2}{(x-2)^2}$

$\dfrac{4x - x^2}{(x-2)^2} = 0 \rightarrow 4x - x^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$

$f''(x) = \dfrac{8}{(2-x)^3}$

$f''(0) = 1 > 0 \rightarrow$ En $x = -1$ tiene un mínimo.

$f''(4) = -1 < 0 \rightarrow$ En $x = 1$ tiene un máximo.

c) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - (x^2+9)}{x^2} = \dfrac{x^2-9}{x^2}$

$\dfrac{x^2-9}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$

$f''(x) = \dfrac{2x \cdot x^2 - (x^2-9)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{18}{x^3}$

$f''(-3) = -\dfrac{2}{3} < 0 \rightarrow$ En $x = -3$ tiene un máximo.

$f''(3) = \dfrac{2}{3} > 0 \rightarrow$ En $x = 3$ tiene un mínimo.

d) $f'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot (x^2+4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{x^4+12x^2}{(x^2+4)^2}$

$\dfrac{x^4+12x^2}{(x^2+4)^2} = 0 \rightarrow x^4 + 12x^2 = 0 \rightarrow x = 0$

$f''(x) = \dfrac{(4x^3+24x)(x^2+4)^2 - (x^4+12x^2)\cdot 2(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4} = \dfrac{96x - 8x^3}{(x^2+4)^3}$

$f''(0) = 0 \rightarrow$ En $x = 0$ no tiene un máximo ni un mínimo.

091 Sea la función $f(x) = 4x^3 + 15x^2 - 18x + 10$.

a) Determina los máximos y mínimos de la función.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Haz un esbozo de la gráfica de la función.

a) $f'(x) = 12x^2 + 30x - 18$

$12x^2 + 30x - 18 = 0 \rightarrow 2x^2 + 5x^2 - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -3 \end{cases}$

$f''(x) = 24x + 30$

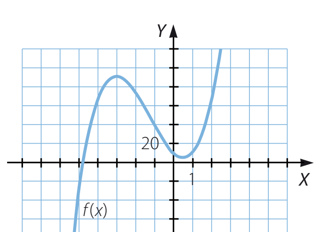
$f''\left(\dfrac{1}{2}\right) = 42 > 0 \rightarrow$ En $x = \dfrac{1}{2}$ tiene un mínimo.

$f''(-3) = -42 < 0 \rightarrow$ En $x = -3$ tiene un máximo.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

c)



092 Sea la función $f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$.

a) Encuentra los máximos y mínimos de la función.

b) Determina las ecuaciones de sus asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas.

c) Construye un esbozo de la gráfica de la función.

a) $f'(x) = \dfrac{3x^2 \cdot (1-x^2) - x^3(-2x)}{(1-x^2)^2} = \dfrac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2}$

$$\frac{3x^2 - x^4}{(1-x^2)^2} = 0 \rightarrow 3x^2 - x^4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

$$f''(x) = \frac{(6x - 4x^3)(1-x^2)^2 - (3x^2 - x^4) \cdot 2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{6x + 2x^3}{(1-x^2)^3}$$

$f''\left(-\sqrt{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} > 0 \rightarrow$ En $x = -\sqrt{3}$ tiene un mínimo.

$f''(0) = 0 \rightarrow$ En $x = 0$ no tiene un máximo ni un mínimo.

$f''(\sqrt{3}) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} < 0 \rightarrow$ En $x = \sqrt{3}$ tiene un máximo.

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = 1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \rightarrow$ No hay asíntota horizontal.

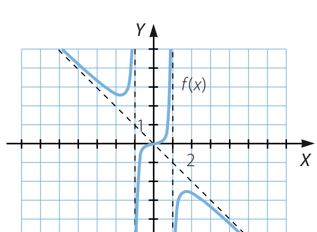
$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{x - x^3} = -1 \\ n = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^3}{1-x^2} + x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + x - x^3}{1-x^2} = 0 \end{array}\right\}$$

Asíntota oblicua: $y = -x$

Si $x = 1.000 \rightarrow f(x) - (-x) < 0 \rightarrow$ Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por debajo de la asíntota.

Si $x = -1.000 \rightarrow f(x) - (-x) > 0 \rightarrow$ Cuando x tiende a $-\infty$, la función está por encima de la asíntota.

c)



093 Halla los máximos y mínimos de la función: $f(x) = \dfrac{x}{x-4}$

Determina las ecuaciones de sus asíntotas y la posición de la curva respecto de ellas. Haz también un esbozo de la gráfica de la función.

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x-4)-x}{(x-4)^2} = \frac{-4}{(x-4)^2}$$

No hay máximos ni mínimos, $f'(x) < 0 \rightarrow$ La función es decreciente.

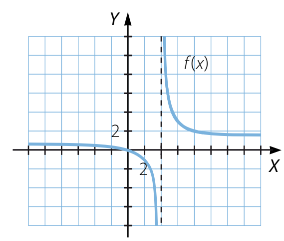
Dom $f = \mathbb{R} - \{4\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow x = 4 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es una asíntota horizontal.

Si $x = 1.000 \rightarrow f(x) > 1$
Cuando x tiende a $+\infty$, la función está por encima de la asíntota.

Si $x = -1.000 \rightarrow f(x) < 1$
Cuando x tiende a $-\infty$, la función está por debajo de la asíntota.



094 Obtén los vértices de las siguientes parábolas, teniendo en cuenta que la tangente es horizontal en ellos.

a) $y = 3x^2 - 6x + 1$

b) $y = 3x^2 + x + 9$

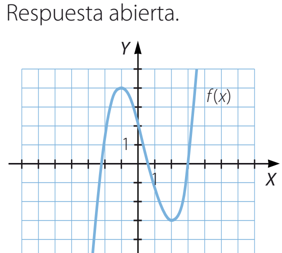
a) $y' = 6x - 6$
$6x - 6 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow V(1, -2)$

b) $y' = 6x + 1$
$$6x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{6} \rightarrow V\left(-\frac{1}{6}, \frac{107}{12}\right)$$

095 Representa una función continua y derivable cuya derivada se anule en los puntos $(-1, 4)$ y $(2, -3)$, y que cumplan estas condiciones.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Respuesta abierta.



096 Dada la función $y = x^3 + 6x^2 - 36x + 29$, resuelve.

a) Determina su dominio.

b) Halla sus asíntotas.

c) ¿Tiene puntos de corte con los ejes? ¿Cuáles son?

d) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) Halla los máximos y mínimos.

f) Representa la función.

a) Dom $f = \mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

La función no tiene asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

La función no tiene asíntota oblicua.

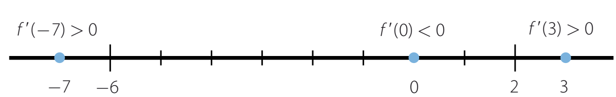
c) Si $x = 0 \to y = 29$

Si $y = 0 \to x^3 + 6x^2 - 36x + 29 = 0 \to (x-1)(x^2+7x-29) = 0$

$$\to \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{165}}{2} \end{cases}$$

d) $f'(x) = 3x^2 + 12x - 36$

$3x^2 + 12x - 36 = 0 \to x^2 + 4x - 12 = 0 \to \begin{cases} x = 2 \\ x = -6 \end{cases}$



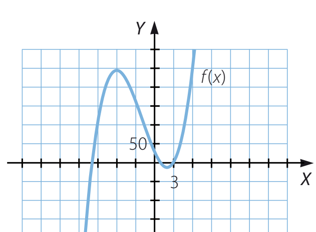
$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$.

$f(x)$ es decreciente en $(-6, 2)$.

e) Mínimo: $(2, -11)$

Máximo: $(-6, 245)$

f)



097 Estudia y representa las funciones polinómicas.

a) $y = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 10$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5$

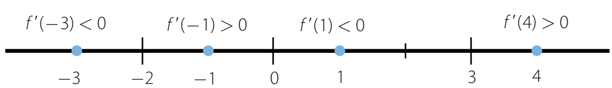
c) $y = 3x^4 - 4x^3 - 48x^2 + 144x + 212$

a) Dom $f = \mathbb{R}$

La función no tiene asíntotas.

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 72x$

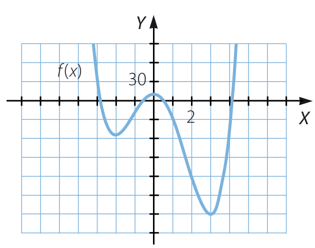
$$12x^3 - 12x^2 - 72x = 0 \rightarrow x(x^2 - x - 6) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$



$f(x)$ es creciente en $(-2, 0) \cup (3, +\infty)$ y es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (0, 3)$.

Mínimos: $(-2, -54)$ y $(3, -179)$

Máximo: $(0, 10)$



b) Dom $f = \mathbb{R}$

La función no tiene asíntotas.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$3x^2 - 12x + 12 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x - 2)^2 = 0 \rightarrow x = 2$

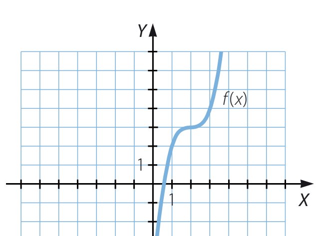
$f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$.

$f'(2) = 0 \rightarrow$ En $x = 2$ no tiene un máximo ni un mínimo.

$f''(x) = 6x - 12$.

$f''(x) > 0$ si $x > 2 \rightarrow f(x)$ es cóncava en $(2, +\infty)$.

$f''(x) < 0$ si $x < 2 \rightarrow f(x)$ es convexa en $(-\infty, 2)$.

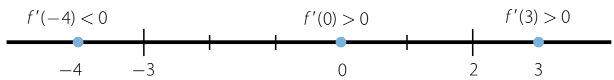


c) Dom $f = \mathbb{R}$

La función no tiene asíntotas.

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 96x + 144$

$12x^3 - 12x^2 - 96x + 144 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$



$f(x)$ es creciente en $(-3, 2) \cup (2, +\infty)$ y es decreciente en $(-\infty, -3)$.

Mínimo: $(-3, -301)$

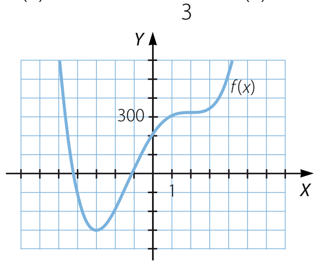
$f''(x) = 36x^2 - 24x - 96$

$36x^2 - 24x - 96 = 0 \rightarrow 3x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

$f''(x) > 0$ si $x > 2 \rightarrow f(x)$ es cóncava en $(2, +\infty)$.

$f''(x) < 0$ si $-\dfrac{4}{3} < x < 2 \rightarrow f(x)$ es convexa en $\left(-\dfrac{4}{3}, 2\right)$.

$f''(x) < 0$ si $x < -\dfrac{4}{3} \rightarrow f(x)$ es convexa en $\left(-\infty, -\dfrac{4}{3}\right)$.



098 Dada la función $y = \dfrac{3x - 2}{x + 4}$, resuelve.

a) Determina su dominio.

b) Halla sus asíntotas.

c) ¿Tiene puntos de corte con los ejes? ¿Cuáles son?

d) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) Halla los máximos y mínimos.

f) Representa la función.

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{-4\}$

b) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{3x - 2}{x + 4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -4^+} \dfrac{3x - 2}{x + 4} = -\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = -4$ es una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - 2}{x + 4} = 3 \rightarrow y = 3$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

c) Punto de corte con el eje X: $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$

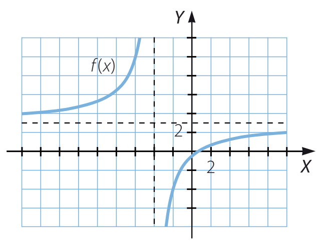
Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

d) $f'(x) = \dfrac{3(x+4) - (3x-2)}{(x+4)^2} = \dfrac{14}{(x+4)^2}$

$f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$.

e) La función no tiene máximos ni mínimos.

f)



099 Estudia y representa estas funciones racionales.

a) $y = \dfrac{5x+1}{x-2}$

b) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x-3}$

c) $y = \dfrac{x^2}{2-x}$

d) $y = \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 6}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{5x+1}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{5x+1}{x-2} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x+1}{x-2} = 5 \rightarrow y = 5$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

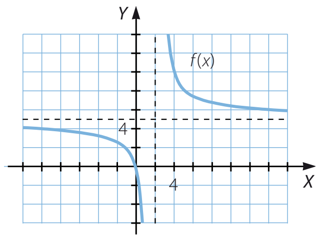
Punto de corte con el eje X: $\left(-\frac{1}{5}, 0\right)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

$f'(x) = \dfrac{5(x-2) - (5x+1)}{(x-2)^2} = \dfrac{-11}{(x-2)^2}$

$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



b) Dom $f = \mathbb{R} - \{3\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow x = 3 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} = +\infty \rightarrow \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

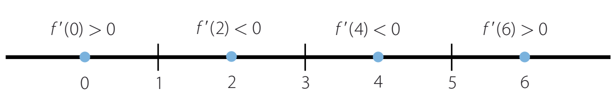
$$\left.\begin{array}{l} m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x} = 1 \\ n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + 1}{x - 3} = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Asíntota oblicua: } y = x + 1$$

Punto de corte con el eje X: $(1, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\dfrac{1}{3}\right)$

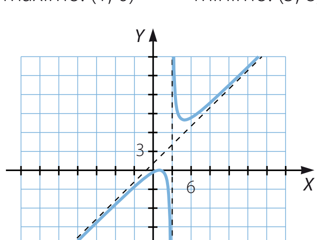
$$f'(x) = \frac{(2x - 2)(x - 3) - (x^2 - 2x + 1)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2}$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$$



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$ y es decreciente en $(1, 3) \cup (3, 5)$.

Máximo: $(1, 0)$ Mínimo: $(5, 8)$



c) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2}{2-x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2}{2-x} = -\infty\end{array}\right\} \to x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

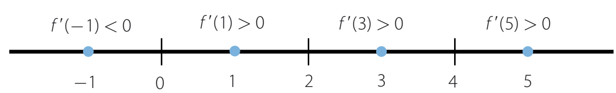
$$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{2-x} = +\infty \to \text{La función no tiene asíntota horizontal.}$$

$$\left.\begin{array}{l}m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{2x-x^2} = -1 \\ n = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{2-x} + x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{2-x} = -2\end{array}\right\} \to \text{Asíntota oblicua: } y = -x - 2$$

Punto de corte con los ejes: (0, 0)

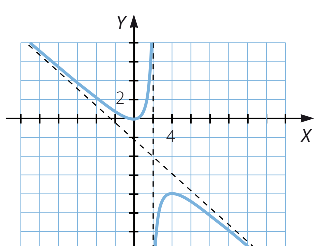
$$f'(x) = \frac{2x(2-x)+x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x-x^2}{(2-x)^2}$$

$$4x - x^2 = 0 \to \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ y es creciente en $(0, 2) \cup (2, 4)$.

Máximo: $(4, -8)$ Mínimo: $(0, 0)$



d) Dom $f = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{2x^2+2x-4}{x^2+x-6} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{2x^2+2x-4}{x^2+x-6} = -\infty\end{array}\right\} \to x = -3 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{2x^2+2x-4}{x^2+x-6} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x^2+2x-4}{x^2+x-6} = +\infty\end{array}\right\} \to x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^2+2-4}{x^2+x-6} = 1 \to y = 1 \text{es una asíntota horizontal.}$$

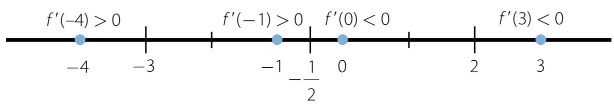
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Puntos de corte con el eje X: $(1, 0)$ y $(-2, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(-3, \frac{1}{2}\right)$

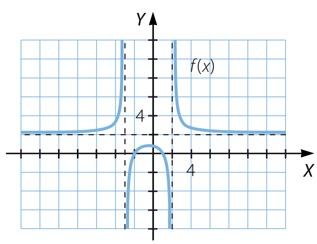
$$f'(x) = \frac{-16x - 8}{(x^2 + x - 6)^2}$$

$$-16x - 8 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$



$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -3) \cup \left(-3, \frac{1}{2}\right)$ y es decreciente en $\left(-\frac{1}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty)$.

Máximo: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{18}{25}\right)$



100 ●●●

Representa estas funciones racionales, analizando sus características.

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4}$

b) $y = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1}$

c) $y = \dfrac{x + 5}{x^2 - 3x - 4}$

d) $y = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{x^2}$

e) $y = \dfrac{2x}{x^2 + x - 6}$

f) $y = \dfrac{x - 3}{(x + 1)(x - 1)}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = 4 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 3x - 4} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

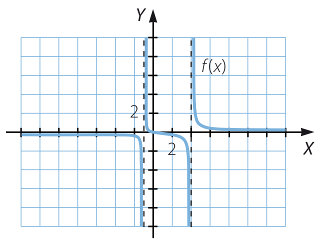
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con los ejes: (0, 0)

$$f'(x) = \frac{x^2 - 3x - 4 - x(2x - 3)}{(x^2 - 3x - 4)^2} = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 3x - 4)^2}$$

$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x + 1} = 1 \rightarrow y = 1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con el eje Y: (3, 0)

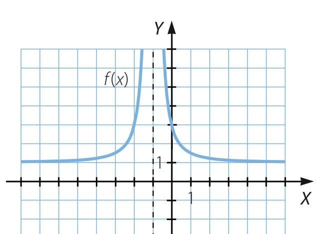
$$f'(x) = \frac{(2x + 2)(x^2 + 2x + 1) - (x^2 + 2x + 3)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2} = \frac{-4x - 4}{(x^2 + 2x + 1)^2}$$

$-4x - 4 = 0 \rightarrow x = -1 \notin$ Dom f

$f'(x) > 0$ si $x < -1 \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$.

$f'(x) < 0$ si $x > -1 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-1, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



c) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x+5}{x^2-3x-4} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x+5}{x^2-3x-4} = -\infty \end{array}\right\} \to x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x+5}{x^2-3x-4} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} \dfrac{x+5}{x^2-3x-4} = +\infty \end{array}\right\} \to x = 4 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+5}{x^2-3x-4} = 0 \to y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

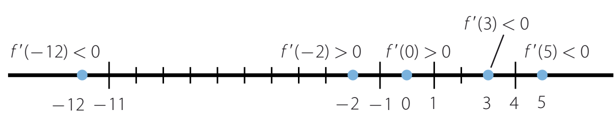
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con el eje X: $(-5, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $\left(0, -\dfrac{5}{4}\right)$

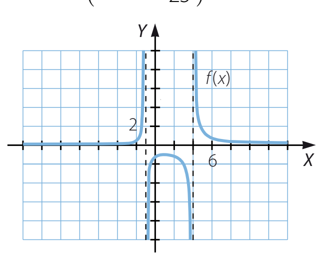
$$f'(x) = \frac{x^2-3x-4-(x+5)(2x-3)}{(x^2-3x-4)^2} = \frac{-x^2-10x+11}{(x^2-3x-4)^2}$$

$$\frac{-x^2-10x+11}{(x^2-3x-4)^2} = 0 \to -x^2-10x+11 = 0 \to \begin{cases} x = -11 \\ x = 1 \end{cases}$$



$f(x)$ es creciente en $(-11, -1) \cup (-1, 1)$ y es decreciente en $(-\infty, -11) \cup (1, 4) \cup (4, +\infty)$.

Mínimo: $\left(-11, -\dfrac{1}{25}\right)$ Máximo: $(1, -1)$



d) Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+4x+2}{x^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+4x+2}{x^2} = +\infty \end{array}\right\} \to x = 0 \text{ es una asíntota vertical.}$$

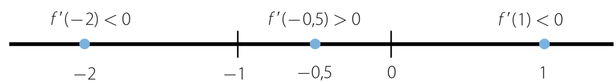
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+4x+2}{x^2} = 1 \to y = 1 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Puntos de corte con el eje X: $\left(-\sqrt{2}-2, 0\right)$ y $\left(\sqrt{2}-2, 0\right)$

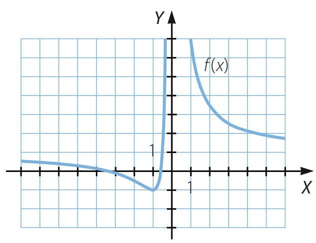
$$f'(x) = \frac{(2x+4)\cdot x^2 - (x^2+4x+2)\cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{-4x-4}{x^3}$$

$-4x - 4 = 0 \rightarrow x = -1$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ y es creciente en $(-1, 0)$.

Mínimo: $(-1, 1)$



e) Dom $f = \mathbb{R} - \{-3, 2\}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-3^-} \dfrac{2x}{x^2+x-6} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-3^+} \dfrac{2x}{x^2+x-6} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = -3 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{2x}{x^2+x-6} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{2x}{x^2+x-6} = +\infty \end{array}\right\} \rightarrow x = 2 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2+x-6} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

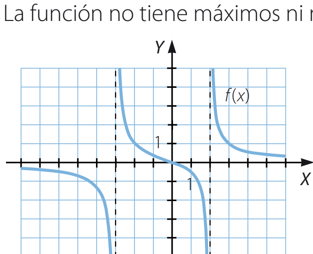
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con los ejes: $(0, 0)$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+x-6) - 2x(2x+1)}{(x^2+x-6)^2} = \frac{-2x^2-12}{(x^2+x-6)^2}$$

$f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 2) \cup (2, +\infty)$.

La función no tiene máximos ni mínimos.



f) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)} = +\infty\end{array}\right\} \rightarrow x = -1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-3}{(x+1)(x-1)} = -\infty\end{array}\right\} \rightarrow x = 1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-3}{(x+1)(x-1)} = 0 \rightarrow y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

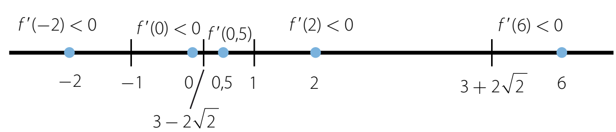
Al tener asíntota horizontal, la función no tiene asíntota oblicua.

Punto de corte con el eje X: $(3, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $(0, 3)$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1 - (x-3)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2 + 6x - 1}{(x^2-1)^2}$$

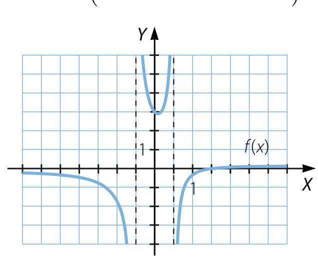
$$\frac{-x^2 + 6x - 1}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow -x^2 + 6x - 1 = 0 \Rightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{2}$$



$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup \left(-1, 3 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(3 + 2\sqrt{2}, +\infty\right)$

y es creciente en $\left(3 - 2\sqrt{2}, 1\right) \cup \left(1, 3 + 2\sqrt{2}\right)$.

Máximo: $\left(3 + 2\sqrt{2}, \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{2}\right)$ Mínimo: $\left(3 - 2\sqrt{2}, \dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{2}\right)$



101 Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$ en el intervalo $[1, 1 + h]$.

a) Utiliza el resultado para determinar la tasa de variación media en los intervalos $[1, 3]$, $[1, 5]$ y $[1, 8]$.

b) Calcula el límite cuando h tiende a cero de la tasa de variación media en el intervalo $[1, 1 + h]$, y comprueba que equivale a $f'(1)$.

$$T.V.M.\ ([1, 1+h]) = \frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \frac{2(1+h)^2-2(1+h)+3-3}{h} =$$
$$= \frac{2+4h+2h^2-2-2h}{h} = 2h+2$$

a) $T.V.M.\ ([1, 3]) = 2 \cdot 2 + 2 = 6$
$T.V.M.\ ([1, 5]) = 2 \cdot 4 + 2 = 10$
$T.V.M.\ ([1, 8]) = 2 \cdot 7 + 2 = 16$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{1+h-1} = \lim\limits_{h \to 0} (2h+2) = 2 \qquad f'(x) = 4x-2 \rightarrow f'(1) = 2$

102 **A partir de la definición, halla la función derivada de estas funciones.**

a) $y = \sqrt{x+1}$ **b)** $y = \frac{1}{x}$

a) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h} =$
$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{x+h+1-(x+1)}{h\left(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}\right)} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$

b) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{x-(x+h)}{h(x+h)x} =$
$= \lim\limits_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2}$

103 **Las siguientes funciones se pueden expresar como composición de otras funciones más sencillas. Halla sus funciones derivadas de dos modos diferentes, y compara los resultados que obtienes.**

a) $y = 2^{3x+5}$ **b)** $y = (x^2+7x)^2$ **c)** $y = \ln(3x)$ **d)** $y = \log_3 \frac{x^2}{3}$

a) $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3x+5 \qquad y' = 2^{3x+5} \cdot \ln 2 \cdot 3$
$y = 2^{3x} \cdot 2^5 \rightarrow y' = 2^{3x} \cdot \ln 2 \cdot 3 \cdot 2^5 = 2^{3x+5} \cdot \ln 2 \cdot 3$

b) $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^2+7x \qquad y' = 2(x^2+7x)(2x+7) = 4x^3+42x^2+98x$
$y = (x^2+7x) \cdot (x^2+7x) \rightarrow y' = (2x+7) \cdot (x^2+7x) + (x^2+7x) \cdot (2x+7) =$
$= 4x^3+42x^2+98x$

c) $f(x) = \ln x$ y $g(x) = 3x \qquad y' = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x}$

$y = \ln(3x) = \ln 3 + \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$

d) $f(x) = \log_3 x$ y $g(x) = \frac{x^2}{3} \qquad y' = \frac{1}{\frac{x^2 \cdot \ln 3}{3}} \cdot \frac{2x}{3} = \frac{2}{x \cdot \ln 3}$

$y = \log_3 \frac{x^2}{3} = 2 \log_3 x - \log_3 3 = 2 \log_3 x - 1 \rightarrow y' = 2 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 3} = \frac{2}{x \cdot \ln 3}$

Los resultados obtenidos coinciden.

104 Obtén las funciones derivadas de estas funciones utilizando la regla de la cadena.

a) $y = e^{\ln x}$

b) $y = \left(\dfrac{2}{x}\right)^4 - 3\left(\dfrac{2}{x}\right)^3 + 5\left(\dfrac{2}{x}\right)^2 - 4\left(\dfrac{2}{x}\right) + 3$

c) $y = sen\,\dfrac{x}{2}$

d) $y = \ln (x^2 e)$

a) $y' = e^{\ln x} \cdot \dfrac{1}{x} = x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$

b) $y' = \left[4\left(\dfrac{2}{x}\right)^3 - 9\left(\dfrac{2}{x}\right)^2 + 10\left(\dfrac{2}{x}\right) - 4\right] \cdot \left(-\dfrac{2}{x^2}\right) = -\dfrac{64}{x^5} + \dfrac{72}{x^4} - \dfrac{40}{x^3} + \dfrac{8}{x^2}$

c) $y' = cos\,\dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{2}$

d) $y' = \dfrac{1}{x^2 e} \cdot 2xe = \dfrac{2}{x}$

105 Determina el valor de la expresión a para que la función no sea derivable en el punto $x = 3$.

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 3 \\ x^2 + 3x - 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$f(3) = 13$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = a \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 13 \end{array}\right\} \to \text{Si } a \neq 13\text{, la función no es continua y no es derivable.}$$

106 Completa la siguiente función para que sea derivable en todo el conjunto $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 2 \\ bx + 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Para que sea derivable, la función tiene que ser continua: $f(2) = 2b + 4$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 2b + 4 \end{array}\right\} \to \text{Si } 6 = 2b + 4\text{, la función es continua} \to b = 1.$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 5 \\ f'(2^+) = 1 \end{array}\right\} \to \text{La función no es derivable.}$$

107 La recta cuya ecuación es $y = 9x - 14$ es tangente a la función $y = x^3 - 3x + k$. Determina en qué punto son tangentes y halla el valor de k. ¿Hay una sola solución? La función tiene dos puntos en los que la tangente es horizontal. Hállalos y escribe la ecuación de esas rectas.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

Cuando la recta dada es tangente: $3x^2 - 3 = 9 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

Si $x = 2 \rightarrow y - (2 + k) = 9(x - 2) \rightarrow y = 9x - 16 + k \rightarrow k = 2$

Si $x = -2 \rightarrow y - (-2 + k) = 9(x + 2) \rightarrow y = 9x + 16 + k \rightarrow k = -2$

Luego hay dos soluciones válidas.

Cuando la tangente es horizontal, se cumple que: $3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

Si $x = 1 \rightarrow y - (-2 + k) = 0 \cdot (x - 1) \rightarrow y = -2 + k$

Si $x = -1 \rightarrow y - (2 + k) = 0 \cdot (x + 1) \rightarrow y = 2 + k$

108 ¿Es cierto que la función $y = x^3$ es siempre creciente? ¿Qué ocurre en el origen de coordenadas?

$f'(x) = 3x^2$

Si $x \neq 0 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Si $x = 0 \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow$ La función no es creciente ni decreciente en este punto.

109 Se ha estimado que el gasto de electricidad de una empresa, de 8 a 17 horas, sigue esta función.

$$E(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}36t^2 + 4{,}05t - 10$$

donde t pertenece al intervalo (8, 17).

a) ¿Cuál es el consumo a las 10 horas? ¿Y a las 16 horas?

b) ¿En qué momento del día es máximo el consumo? ¿Y mínimo?

c) Determina las horas del día en las que el consumo se incrementa.

a) $E(10) = 4{,}5$

$E(16) = 3{,}6$

b) $E'(t) = 0{,}03t^2 - 0{,}72t + 4{,}05$

$0{,}03t^2 - 0{,}72t + 4{,}05 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = 15 \end{cases}$

$E''(t) = 0{,}06t - 0{,}72$

$E''(9) = -0{,}18 < 0 \rightarrow$ En $t = 9$ tiene un máximo.

$E''(15) = 0{,}18 > 0 \rightarrow$ En $t = 15$ tiene un mínimo.

Por tanto, el consumo es máximo a las 9 horas y es mínimo a las 15 horas.

c) Como $t = 9$ es un máximo, el consumo crece de las 8 horas a las 9 horas. Del mismo modo, como $t = 15$ es un mínimo, el consumo crece de las 15 horas a las 17 horas.

110

Un investigador está probando la acción de un medicamento sobre una bacteria. Ha comprobado que el número de bacterias, N, varía con el tiempo, t, una vez suministrado el medicamento, según la función:

$$N = 20t^3 - 510t^2 + 3.600t + 2.000$$

a) ¿Cuántas bacterias había en el momento de suministrar el medicamento? ¿Y al cabo de 10 horas?

b) En ese momento, ¿el número de bacterias está creciendo o disminuyendo?

c) ¿Cuál es el momento en que la acción del producto es máxima?

d) ¿En qué momento empieza a notarse el efecto del medicamento?

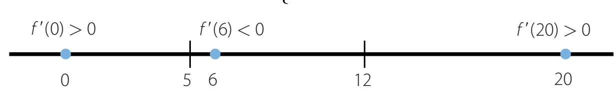
e) ¿Y en qué momento empieza a perder su efecto el medicamento?

a) Si $t = 0 \rightarrow N = 2.000$ bacterias

Si $t = 10 \rightarrow N = 7.000$ bacterias

b) $N' = 60t^2 - 1.020t + 3.600$

$$60t^2 - 1.020t + 3.600 = 0 \rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 12 \end{cases}$$



El número de bacterias crece hasta las 5 horas y vuelve a crecer a partir de las 12 horas. Este número decrece entre las 5 horas y las 12 horas.

c) El medicamento alcanza su máxima acción a las 12 horas.

d) El efecto del medicamento empieza a notarse a partir de las 5 horas.

e) El medicamento empieza a perder su efecto a partir de las 12 horas.

111

¿Cuál es la ecuación de una parábola que pasa por el punto (0, 9) y en el punto (2, 9) tiene como recta tangente $y - 6x + 3 = 0$?

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Como la parábola pasa por el punto (0, 9) $\rightarrow c = 9$

Y como también pasa por el punto (2, 9) $\rightarrow 4a + 2b + 9 = 9 \rightarrow 4a + 2b = 0 \rightarrow b = -2a$

Así, resulta que: $f(x) = ax^2 - 2ax + 9 \rightarrow f'(x) = 2ax - 2a$

Si $y = 6x - 3$ es la tangente en el punto $x = 2$, entonces:

$f'(2) = 6 \rightarrow 4a - 2a = 6 \rightarrow a = 3$

La ecuación de la parábola es: $f(x) = 3x^2 - 6x + 9$

112

Obtén la expresión algebraica de una función que pasa por (2, 5), sabiendo que su derivada es: $f'(x) = 2x^2 + 6x - 3$

Si $f'(x) = 2x^2 + 6x - 3 \rightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 3x + k$

Como la función pasa por el punto (2, 5) $\rightarrow f(2) = 5$

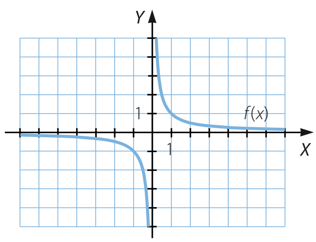
$\frac{2}{3} \cdot 8 + 12 - 6 + k = 5 \rightarrow k = -\frac{19}{3}$

La ecuación de la parábola es: $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 3x - \frac{19}{3}$

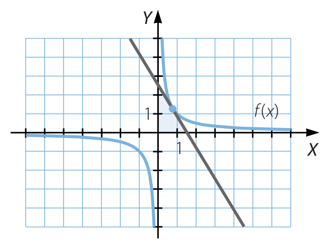
113 Representa la función $y = \frac{1}{x}$.

a) Considera un punto cualquiera de la función que esté en el primer cuadrante. Comprueba que la recta tangente a la función en ese punto forma un triángulo con los semiejes positivos.

b) Demuestra que, independientemente del punto que se escoja, el área de ese triángulo es siempre la misma.



a)



b) Si $a > 0$, entonces $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ es un punto de la función en el primer cuadrante.

Como $y' = -\frac{1}{x^2}$, la ecuación de la recta tangente en $x = a$ es:

$$y - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}(x - a)$$

Las coordenadas de los puntos de corte de la tangente con los ejes determinan la base y la altura del triángulo.

$$\text{Si } x = 0 \rightarrow y - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \rightarrow y = \frac{2}{a}$$

$$\text{Si } y = 0 \rightarrow 0 - \frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a^2}x = \frac{2}{a} \rightarrow x = 2a$$

Así, el área del triángulo es: $A = \frac{2a \cdot \frac{2}{a}}{2} = 2\ u^2$, independientemente del valor de a.

114 La recta tangente a una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$ es $y = 5x - 7$. Halla el valor de la función y de su derivada en el punto de abscisa 2.

$$y = 5x - 7 \rightarrow y - 3 = 5(x - 2) \rightarrow \begin{cases} f(2) = 3 \\ f'(2) = 5 \end{cases}$$

115 Explica cuánto valen $f'(0)$ y $g'(0)$ en las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \sqrt{x}$.
(Puedes hacer la gráfica de las funciones, si es necesario).

Dom $f = (0, +\infty) \rightarrow f'(0)$ no existe porque la función no está definida en $x = 0$.

Dom $g = [0, +\infty) \rightarrow g'(0)$ no existe porque la función no está definida para valores menores que 0 y no existe $g'(0^-)$.

116 La función derivada de una parábola es una recta que pasa por los puntos $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-1, -\frac{11}{2}\right)$. Halla la abscisa del vértice de esa parábola.

Como la ecuación de una parábola es $y = ax^2 + bx + c$, su derivada es $y' = 2ax + b$.

La ecuación de la recta que pasa por los puntos es:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-6} \rightarrow y = 3x - \frac{5}{2}$$

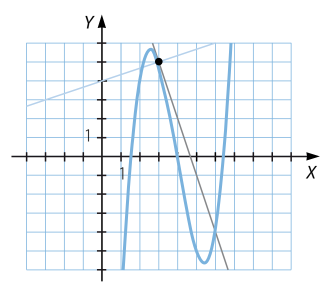
Igualando coeficientes, resulta:

$$2ax = 3x \rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$b = -\frac{5}{2}$$

La abscisa del vértice es: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{5}{2}}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{5}{6}$

117 Si trazamos la recta tangente y la recta normal a la función $y = x^3 - 12x^2 + 42x - 40$, en el punto (3, 5) se forma, con los semiejes positivos de coordenadas, un cuadrilátero. Determina su área.



$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 42$$

$$f'(3) = -3$$

La ecuación de la recta tangente en (3, 5) es:

$$y - 5 = -3(x-3) \rightarrow y = -3x + 14$$

Y la ecuación de la recta normal es:

$$y - 5 = \frac{1}{3}(x-3) \rightarrow y = \frac{1}{3}x + 4$$

El cuadrilátero tiene como vértices: (0, 0), (0, 4), (3, 5) y $\left(\frac{14}{3}, 0\right)$.

Para calcular su área se descompone en tres figuras:

- El rectángulo de vértices (0, 0), (4, 0), (3, 4) y (3, 0) mide 12 u^2.
- El triángulo de vértices (4, 0), (3, 4) y (3, 5) mide $\frac{3}{2}u^2$.
- El triángulo de vértices (3, 5), (3, 0) y $\left(\frac{14}{3}, 0\right)$ mide $\frac{25}{6}u^2$.

Luego el área del cuadrilátero es: $12 + \frac{3}{2} + \frac{25}{6} = \frac{53}{3}u^2$

118 Sea una función que no es continua en $x = 3$.

$$\lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$$

Demuestra que la función no puede ser derivable en ese punto estudiando el límite.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

Si la función es derivable en $x = 3$ entonces existe el límite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = l \rightarrow \lim_{h\to 0} (f(3+h) - f(3)) = l \lim_{h\to 0} h$$

$$\rightarrow \lim_{h\to 0} (f(3+h) - f(3)) = 0 \rightarrow \lim_{h\to 0} f(3+h) = \lim_{h\to 0} f(3)$$

Esto no es cierto, porque la función no es continua en $x = 3$, y la función no puede ser derivable en este punto.

119 **Considera una parábola general expresada de la forma:**

$$y = ax^2 + bx + c$$

a) **Como en el vértice la tangente será horizontal, la derivada se anula en ese punto. Compruébalo y despeja el valor de x.**

b) **Encuentra también el valor de y, aplicándolo a la parábola $y = -2x^2 + 8x + 4$.**

a) $y' = 2ax + b$

$2ax + b = 0 \rightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$

b) $x = -\dfrac{b}{2a} \rightarrow y = a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + c = \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b^2}{2a} + c = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$

PARA FINALIZAR...

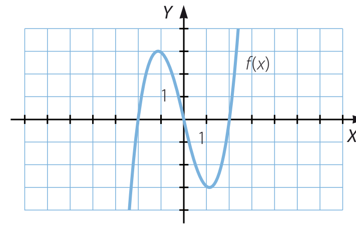
120 **Sea $f(x) = arc\ tg \dfrac{sen\ x}{1 + cos\ x}$. Estudia si $f(x)$ y $f'(x)$ son constantes.**

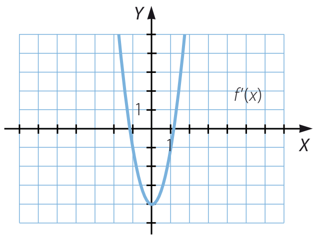
$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{sen\ x}{1 + cos\ x}\right)^2} \cdot \frac{cos\ x(1 + cos\ x) + sen^2 x}{(1 + cos\ x)^2} = \frac{cos\ x + 1}{(1 + cos\ x)^2 + sen^2\ x} =$$

$$= \frac{cos\ x + 1}{1 + 2\ cos\ x + cos^2\ x + sen^2\ x} = \frac{cos\ x + 1}{2\ cos\ x + 2} = \frac{1}{2}$$

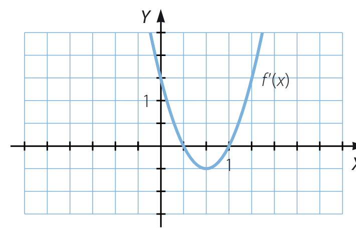
Al ser $f'(x)$ constante y no nula, la función $f(x)$ no es constante.

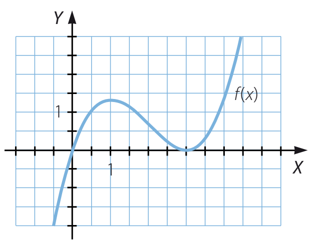
121 Dada la gráfica de una función $f(x)$, representa la función $f'(x)$ de forma aproximada.





122 Si la gráfica de una función $f'(x)$ es la siguiente, representa de forma aproximada la función $f(x)$.





123 Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones inversas, es decir, $(g \circ f)(x) = x$, ¿se verifica que $(g' \circ f')(x) = x$?

No se verifica. Si se consideran las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$, se tiene que son inversas ya que cumplen que: $(g \circ f)(x) = x$

Sin embargo, resulta que: $(g' \circ f')(x) = g'(f'(x)) = g'(3x^2) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(3x^2)^2}} = \dfrac{1}{3x\sqrt[3]{9x}} \neq x$

Luego $f'(x)$ y $g'(x)$ no son funciones inversas.

124 Se define el ángulo de dos curvas en un punto común como el ángulo formado por sus rectas tangentes en ese punto.
Aplícalo a las curvas $y = x^2$ y $x = y^2$.

$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ x = y^2 \end{array}\right\} \rightarrow (0, 0)$ es el punto de intersección de las curvas.

La recta tangente en este punto a la primera curva es: $y = 0$

La recta tangente en el mismo punto a la segunda curva es: $x = 0$

Como las rectas son perpendiculares, el ángulo que forman las dos curvas mide 90°.

125 Verifica que si un polinomio tiene una raíz doble, también lo es de su derivada.
Resuelve la ecuación $12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = 0$, sabiendo que una de sus raíces es doble.

Si un polinomio tiene una raíz doble a, entonces: $f(x) = (x - a)^2 \cdot p(x)$

$$f'(x) = 2(x - a) \cdot p(x) + (x - a)^2 \cdot p'(x) = (x - a)[2p(x) + (x - a) \cdot p'(x)]$$

Por tanto, a es también una raíz de la derivada.

Sea $f(x) = 12x^3 - 16x^2 + 7x - 1$.

Como $f'(x) = 36x^2 - 32x + 7$, resulta que: $36x^2 - 32x + 7 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{7}{18} \end{cases}$

Y como una de las raíces es doble coincide con una de las anteriores:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \rightarrow 12x^3 - 16x^2 + 7x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (12x^2 - 10x + 2)$$

$$12x^2 - 10x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ x = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación son: $\dfrac{1}{2}$ (doble) y $\dfrac{1}{3}$

126 **¿Cómo debe descomponerse un número positivo *a* en la suma de dos números no negativos para que la suma de los cuadrados de los dos sumandos sea mínima? ¿Y para que sea máxima?**

Sea x tal que $0 \leq x \leq a$, de modo que $a = x + (a - x)$.

$f(x) = x^2 + (a - x)^2$

$f'(x) = 2x + 2(a - x) \cdot (-1) = 4x - 2a \qquad 4x - 2a = 0 \rightarrow x = \dfrac{a}{2}$

$f''(x) = 4 \qquad f''\left(\dfrac{a}{2}\right) = 4 > 0 \rightarrow x = \dfrac{a}{2}$ es un mínimo.

Luego si el número a se descompone en $\dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2}$, la suma de los cuadrados es mínima. Al ser $f(x) = x^2 + (a - x)^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$ una parábola abierta hacia arriba, como $0 \leq x \leq a$, la suma de los cuadrados es máxima si $x = 0$ o si $x = a$, es decir, si el número se descompone en $a + 0$.

127 **Demuestra que la tangente a una circunferencia en un punto es perpendicular al radio en ese punto.**

Sea una circunferencia centrada en el origen de coordenadas de radio r: $x^2 + y^2 = r^2$

Si $y = \sqrt{r^2 - x^2} \rightarrow y' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Entonces la ecuación de la recta tangente en un punto (a, b) es: $y - b = -\dfrac{a}{b}(x - a)$

La recta determinada por el radio de la circunferencia que pasa por este punto es:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \rightarrow y = \frac{b}{a}x$$

Las rectas son perpendiculares ya que: $\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{-\dfrac{a}{b}}$