4 Números complejos

LITERATURA Y MATEMÁTICAS

Las tribulaciones del estudiante Törless

–Dime, ¿entendiste bien todo esto?

–¿Qué?

–Ese asunto de los números imaginarios.

–Sí, no es tan difícil. Lo único que hay que tener presente es que la raíz cuadrada de menos uno es la unidad de cálculo.

–De eso precisamente se trata. Tal cosa no existe. Todo número, ya sea positivo, ya sea negativo, da como resultado, si se lo eleva al cuadrado, algo positivo. Por eso no puede haber ningún número real que sea la raíz cuadrada de algo negativo.

–Completamente cierto. Pero, ¿por qué, de todos modos, no habría de intentarse aplicar también a un número negativo la operación de la raíz cuadrada? Desde luego que el resultado no puede tener ningún valor real; por eso el resultado se llama imaginario. Es como cuando uno dice: aquí, antes, siempre se sentaba alguien; pongámosle hoy entonces también una silla. Y aun cuando la persona haya muerto, obramos como si todavía pudiera acudir a nosotros.

–Pero, ¿cómo puede hacerse tal cosa, cuando se sabe, con toda precisión matemática, que es imposible?

–A pesar de ello se hace precisamente como si fuera posible. Quizás pueda obtenerse algún resultado. ¿Y qué otra cosa ocurre, a fin de cuentas, con los números irracionales? Una división que nunca termina, una fracción cuyo valor nunca puedes agotar, aun cuando te pases la vida haciendo la operación. Y, ¿qué piensas de las paralelas, que se cortan en el infinito? Creo que no habría matemáticas si pretendiéramos saberlo todo a conciencia y exactamente.

–En eso tienes razón. Cuando uno considera las cosas así, todo parece bastante correcto; pero lo curioso está precisamente en que se puedan hacer cálculos reales y se pueda llegar por fin a un resultado comprensible con semejantes valores imaginarios, que de alguna manera son imposibles. […]

–Considero muy posible que aquí los inventores de las matemáticas hayan dado un traspiés. Porque, en efecto, ¿por qué aquello que está más allá de nuestro entendimiento no podría permitirse gastarle precisamente semejante broma al entendimiento? Pero la cuestión no me preocupa mucho, pues sé que todas estas cosas no conducen a nada.

ROBERT MUSIL

Törless es un idealista y su amigo es un pragmático. ¿Es verdad que $\sqrt{-1}$ no es un número real? Explica la referencia que hace el amigo a los números irracionales cuando los compara con $\sqrt{-1}$. ¿Es correcto lo que dice?

$\sqrt{-1}$ no es un número real, porque ningún número real elevado al cuadrado da como resultado un número negativo.

La referencia del texto es: «¿Y qué otra cosa ocurre, a fin de cuentas, con los números irracionales? Una división que nunca termina, una fracción cuyo valor nunca puedes agotar, aun cuando te pases la vida haciendo la operación».

Lo que el amigo dice de los números irracionales no es cierto, en realidad está hablando de números periódicos, pues se refiere a fracciones cuya expresión decimal no es un número exacto.

ANTES DE COMENZAR… RECUERDA

001 **Pon tres ejemplos de números reales que no sean racionales, y otros tres ejemplos de números reales que no sean irracionales.**

Respuesta abierta.

Tres números reales que no sean racionales: $\sqrt{2}$, π y $\sqrt{3}$

Tres números reales que no sean irracionales: 1, 2 y 3

002 **Calcula las raíces reales de los siguientes radicales.**

a) $\sqrt{16}$ **b)** $\sqrt[4]{-16}$ **c)** $\sqrt[3]{-1}$ **d)** $\sqrt[5]{32}$ **e)** $\sqrt[5]{0}$

a) $\sqrt{16} = \pm 4$

b) $\sqrt[4]{-16} \rightarrow$ No tiene raíces reales.

c) $\sqrt[3]{-1} = -1$

d) $\sqrt[5]{32} = 2$

e) $\sqrt[5]{0} = 0$

003 **Resuelve:** $\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{32}$

$$\sqrt{2} + \sqrt{8} - \sqrt{18} + \sqrt{32} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

004 **Expresa en radianes estos ángulos.**

a) 45° **b)** 60° **c)** 120° **d)** 240° **e)** 300°

a) $45° = \frac{\pi}{4}$ rad

b) $60° = \frac{\pi}{3}$ rad

c) $120° = \frac{2\pi}{3}$ rad

d) $240° = \frac{4\pi}{3}$ rad

e) $300° = \frac{5\pi}{3}$ rad

005 **Expresa en grados los ángulos.**

a) $\frac{\pi}{3}$ rad **b)** $\frac{\pi}{2}$ rad **c)** π rad **d)** $\frac{5\pi}{4}$ rad **e)** $\frac{3\pi}{5}$ rad

a) $\frac{\pi}{3}$ rad $= 60°$

b) $\frac{\pi}{2}$ rad $= 90°$

c) π rad $= 180°$

d) $\frac{5\pi}{4}$ rad $= 225°$

e) $\frac{3\pi}{5}$ rad $= 108°$

006 **Calcula:** $\left(sen\ 45° - \frac{cos\ 180° - tg\ 30°}{sen\ 60°}\right)(cos\ 30° - sen\ 90°)$

$$\left(sen\,45° - \frac{cos\,180° - tg\,30°}{sen\,60°}\right)\left(cos\,30° - sen\,90°\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{-1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{-6-2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3}$$

007 Determina el signo del seno, el coseno y la tangente de estos ángulos.

a) $150°$ b) $\frac{3\pi}{2}$ c) $240°$ d) $-60°$ e) $\frac{2\pi}{3}$

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
$150°$	$+$	$-$	$-$
$\frac{3\pi}{2}$	$-$	0	No existe
$240°$	$-$	$-$	$+$
$-60°$	$-$	$+$	$-$
$\frac{2\pi}{3}$	$+$	$-$	$-$

ACTIVIDADES

001 Escribe estos números como números complejos.

a) $\sqrt{-3}$ b) $\sqrt[4]{-16}$ c) 3 d) -3

a) $\sqrt{-3} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{-1} = \sqrt{3}\,i$

b) $\sqrt[4]{-16} = \sqrt{4i} = 2\sqrt{i} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$

c) $3 = 3 + 0i$

d) $-3 = -3 + 0i$

002 Resuelve las siguientes ecuaciones, y expresa sus soluciones como números complejos.

a) $3x^2 - 3x + 2 = 0$ b) $x^2 - x + 1 = 0$

a) $3x^2 - 3x + 2 = 0$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot 3\cdot 2}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{6} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}\,i}{6} \\ x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}\,i}{6} \end{cases}$$

b) $x^2 - x + 1 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}\,i}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}\,i}{2} \end{cases}$$

003 Escribe dos números complejos cuya parte real sea -1, y otros dos cuya parte imaginaria sea -1.

Dos números complejos cuya parte real sea -1: $-1 + i$ y $-1 + 2i$.

Dos números complejos cuya parte imaginaria sea -1: $1 - i$ y $2 - i$.

004 Determina x e y para que estos números complejos sean iguales.

a) $-2x+3i$ y $\frac{3}{2}-2yi$ b) $-x+yi$ y $7-6i$

a) $-2x+3i=\frac{3}{2}-2yi \rightarrow \begin{cases} -2x=\frac{3}{2} \rightarrow x=-\frac{3}{4} \\ 3=-2y \rightarrow y=-\frac{3}{2} \end{cases}$

b) $-x+yi=7-6i \rightarrow \begin{cases} -x=7 \rightarrow x=-7 \\ y=-6 \end{cases}$

005 Dado el número complejo $z=-2x+\frac{y}{2}i$, determina el valor de x e y para que sea:

a) Un número real.
b) Un número imaginario puro.
c) Un número complejo que no sea real ni imaginario puro.

a) $y=0$ b) $x=0$ c) $x\neq 0, y\neq 0$

006 Halla el opuesto y el conjugado de los siguientes números complejos.

a) $\frac{1}{2}+i$ c) $\frac{1}{2}-i$ e) i g) $\frac{5}{2}$

b) $-\frac{1}{2}+i$ d) $-\frac{1}{2}-i$ f) -5 h) 0

	$\frac{1}{2}+i$	$-\frac{1}{2}+i$	$\frac{1}{2}-i$	$-\frac{1}{2}-i$	i	-5	$\frac{5}{2}$	0
Opuesto	$-\frac{1}{2}-i$	$\frac{1}{2}-i$	$-\frac{1}{2}+i$	$\frac{1}{2}+i$	$-i$	5	$-\frac{5}{2}$	0
Conjugado	$\frac{1}{2}-i$	$-\frac{1}{2}-i$	$\frac{1}{2}+i$	$-\frac{1}{2}+i$	$-i$	-5	$\frac{5}{2}$	0

007 Representa gráficamente los siguientes números complejos.

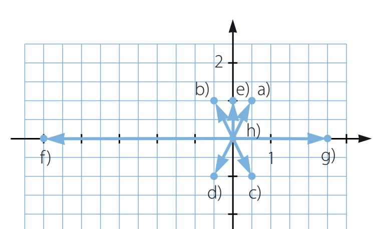
a) $\frac{1}{2}+i$ c) $\frac{1}{2}-i$ e) i g) $\frac{5}{2}$

b) $-\frac{1}{2}+i$ d) $-\frac{1}{2}-i$ f) -5 h) 0

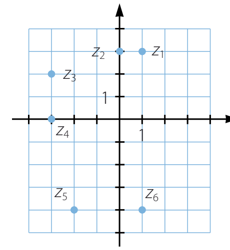
Ahora contesta, ¿dónde estará situado un número real?
¿Y si el número es imaginario puro?

Un número real estará situado en el eje de abscisas.

Un número imaginario puro se situará en el eje de ordenadas.



008 Escribe en forma binómica los números complejos correspondientes a los afijos representados.



$z_1 = (1, 3), z_2 = (0, 3), z_3 = (-3, 2),$
$z_4 = (-3, 0), z_5 = (-2, -4), z_6 = (1, -4)$

009 Resuelve las siguientes operaciones.

a) $(-1 - i) + (-4 + 5i)$

b) $\dfrac{-1-i}{-4+5i}$

c) $(-1 - i)(-4 + 5i)$

d) $\dfrac{(-2+i)(1+3i)}{-1+2i} - 2i$

a) $(-1 - i) + (-4 + 5i) = -5 + 4i$

b) $\dfrac{-1-i}{-4+5i} = \dfrac{(-1-i)(-4-5i)}{(-4+5i)(-4-5i)} = \dfrac{-1+9i}{41}$

c) $(-1 - i)(-4 + 5i) = 4 - 5i + 4i + 5 = 9 - i$

d) $\dfrac{(-2+i)(1+3i)}{-1+2i} - 2i = \dfrac{(-5-5i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} - 2i = 3 - i - 2i = 3 - 3i$

010 Calcula x para que el resultado sea un número real.

a) $(2x - i)(-2 + 7xi)$

b) $\dfrac{2x-i}{-2+7i}$

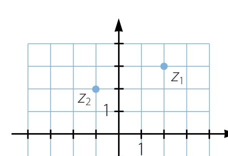
a) $(2x - i)(-2 + 7xi) = -4x + 14x^2i + 2i + 7x = 3x + (14x^2 + 2)i$

Igualamos a cero la parte imaginaria: $14x^2 + 2 = 0 \rightarrow x = \sqrt{\dfrac{-1}{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{7}i$

b) $\dfrac{2x-i}{-2+7i} = \dfrac{(2x-i)(-2-7i)}{(-2+7i)(-2-7i)} = \dfrac{-4x-7}{53} + \dfrac{-14x+2}{53}i$

Igualamos a cero la parte imaginaria: $\dfrac{-14x+2}{53} = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{7}$

011 Determina la expresión polar de los números complejos representados.



$z_1 \rightarrow r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$tg\,\alpha = \dfrac{3}{2} \rightarrow = 56°\,18'\,35{,}8''$ $\quad z_1 = (2, 3) = \sqrt{13}_{56°\,18'\,35{,}8''}$

$z_2 \rightarrow r = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

$tg\,\alpha = \dfrac{2}{-1} \rightarrow \xrightarrow{\alpha \in (90°,\,180°)} \alpha = 116°\,33'\,54''$ $\quad z_2 = (-1, 2) = \sqrt{5}_{116°\,33'\,54''}$

012 Expresa en forma polar.

a) $2+i$
b) $-2-i$
c) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$
d) $2-\sqrt{3}i$
e) $-4i$
f) 12

a) $2+i=\sqrt{5}_{26^\circ 33' 54,2''}$
b) $-2-i=\sqrt{5}_{206^\circ 33' 54''}$
c) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}_{135^\circ}$
d) $2-\sqrt{3}i=\sqrt{7}_{310^\circ 53' 36,2''}$
e) $-4i=4_{270^\circ}$
f) $12=12_{0^\circ}$

013 Expresa estos números en formas binómica y trigonométrica.

a) 1_{120°
b) 3_{240°
c) $2_{\frac{\pi}{3}}$
d) $3_{\frac{3\pi}{2}}$

a) $1_{120^\circ}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=(\cos 120^\circ+i \operatorname{sen} 120^\circ)$

b) $3_{240^\circ =}=\left(-\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)=3\,(\cos 240^\circ+i \operatorname{sen} 240^\circ)$

c) $2_{\frac{\pi}{3}}=\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$

d) $3_{\frac{3\pi}{2}}=(0,-3)=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\ \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right)$

014 Expresa los siguientes números complejos en forma polar.

a) $3\,(\cos 45^\circ+i \operatorname{sen} 45^\circ)$
b) $3\,(\cos 135^\circ+i \operatorname{sen} 135^\circ)$

a) $3\,(\cos 45^\circ+i \operatorname{sen} 45^\circ)=3_{45^\circ}$
b) $3\,(\cos 135^\circ+i \operatorname{sen} 135^\circ)=3_{135^\circ}$

015 Dados los números complejos:

$$z_1=2_{30^\circ}\qquad z_2=\cos 60^\circ+i \operatorname{sen} 60^\circ\qquad z_3=2_{\frac{5\pi}{4}}$$

calcula.

a) $z_1\cdot z_2$
b) $z_1\cdot \bar{z}_3$
c) $z_3\cdot z_3$
d) $(z_1)^2\cdot \bar{z}_2$

$z_1=2_{30^\circ}\qquad z_2=1_{60^\circ}\qquad z_3=2_{225^\circ}$

a) $2_{30^\circ}\cdot 1_{60^\circ}=2_{90^\circ}$
b) $2_{30^\circ}\cdot 2_{135^\circ}=4_{165^\circ}$
c) $2_{225^\circ}\cdot 2_{225^\circ}=4_{450^\circ}=4_{90^\circ}$
d) $(2_{30^\circ})^2\cdot 1_{300^\circ}=4_{60^\circ}\cdot 1_{300^\circ}=4_{0^\circ}$

016 Dados los números complejos:

$$z_1 = 1_{210^\circ} \qquad z_2 = 3\,[\cos(-30^\circ) + i\,\mathrm{sen}\,(-30^\circ)]$$

calcula.

a) $\dfrac{z_1}{z_2}$ b) $\dfrac{(z_1)^2 \cdot \bar{z}_2}{z_2}$

$z_1 = 1_{210^\circ} \qquad z_2 = 3_{330^\circ}$

a) $\dfrac{1_{210^\circ}}{3_{330^\circ}} = \dfrac{1}{3_{240^\circ}}$

b) $\dfrac{(1_{210^\circ})^2 \cdot 3_{30^\circ}}{3_{330^\circ}} = \dfrac{1_{420^\circ} \cdot 3_{30^\circ}}{3_{330^\circ}} = \dfrac{3_{450^\circ}}{3_{330^\circ}} = 1_{120^\circ}$

017 Dados los números complejos:

$$z_1 = 4_{330^\circ} \qquad z_2 = \cos 120^\circ + i\,\mathrm{sen}\,120^\circ \qquad z_3 = 1 - i$$

calcula.

a) $(z_1)^2$ b) $(z_2)^3$ c) $(z_3)^4 \cdot \bar{z}_3$ d) $(z_1)^2 \cdot \bar{z}_2$

$z_1 = 4_{330^\circ} \qquad z_2 = 1_{120^\circ} \qquad z_3 = \sqrt{2}_{\,315^\circ}$

a) $(4_{330^\circ})^2 = 16_{660^\circ} = 16_{300^\circ}$

b) $(1_{120^\circ})^3 = 1_{0^\circ}$

c) $\left(\sqrt{2}_{\,315^\circ}\right)^4 \cdot \sqrt{2}_{\,45^\circ} = 4_{1.260^\circ} \cdot \sqrt{2}_{\,45^\circ} = 4\sqrt{2}_{\,1.305^\circ} = 4\sqrt{2}_{\,225^\circ}$

d) $(4_{330^\circ})^2 \cdot 1_{240^\circ} = 16_{660^\circ} \cdot 1_{240^\circ} = 16_{900^\circ} = 16_{180^\circ} = -16$

018 Resuelve esta operación.

$$[16\,(\cos 60^\circ + i\,\mathrm{sen}\,60^\circ)] \cdot (2_{210^\circ})^4$$

$[16\,(\cos 60^\circ + i\,\mathrm{sen}\,60^\circ)] \cdot (2_{210^\circ})^4 = 16_{60^\circ} \cdot 16_{840^\circ} = 256_{900^\circ} = 256_{180^\circ}$

019 Utilizando la fórmula de Moivre, expresa $\cos 3\alpha$ y $\mathrm{sen}\,3\alpha$ en función de $\cos\alpha$ y $\mathrm{sen}\,\alpha$.

Consideramos un número complejo de módulo la unidad:

$$(1_\alpha)^3 = (\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)^3 = \cos 3\alpha + i\,\mathrm{sen}\,3\alpha$$

Desarrollamos la primera parte de la igualdad:

$$\cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha - 3\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha - i\,\mathrm{sen}^3\alpha = \\ = (\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha) + (3\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{sen}^3\alpha)i$$

Igualamos este resultado con la segunda parte de la igualdad:

$$(\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha) + (3\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{sen}^3\alpha)i = \cos 3\alpha + i\,\mathrm{sen}\,3\alpha$$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias resulta:

$$\begin{cases} \cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\,\mathrm{sen}^2\alpha \\ \mathrm{sen}\,3\alpha = 3\cos^2\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha - \mathrm{sen}^3\alpha \end{cases}$$

020 **Calcula las siguientes raíces.**

a) $\sqrt{3_{150^\circ}}$ c) $\sqrt[4]{-i}$

b) $\sqrt[3]{-27}$ d) $\sqrt[3]{-1+i}$

a) $\sqrt{3_{150^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuadrada del módulo: $\sqrt{3}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{150^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{2} = 75^\circ$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{150^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{2} = 255^\circ$$

Por tanto, las raíces son $\sqrt{3}_{\,75^\circ}$ y $\sqrt{3}_{\,255^\circ}$.

b) $\sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{27_{180^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: 3.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{3} = 180^\circ$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{180^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{3} = 300^\circ$$

Por tanto, las raíces son 3_{60°, $3_{180^\circ} = -3$ y 3_{300°.

c) $\sqrt[4]{-i} = \sqrt[4]{1_{270^\circ}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta del módulo: 1.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{270^\circ + 0 \cdot 360^\circ}{4} = 67^\circ\,30'$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{270^\circ + 1 \cdot 360^\circ}{4} = 157^\circ\,30'$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{270^\circ + 2 \cdot 360^\circ}{4} = 247^\circ\,30'$$

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{270^\circ + 3 \cdot 360^\circ}{4} = 337^\circ\,30'$$

Por tanto, las raíces son $1_{67^\circ\,30'}$, $1_{157^\circ\,30'}$, $1_{247^\circ\,30'}$ y $1_{337^\circ\,30'}$.

d) $\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}_{135°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: $\sqrt[6]{2}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{135° + 0 \cdot 360°}{3} = 45°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{135° + 1 \cdot 360°}{3} = 165°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{135° + 2 \cdot 360°}{3} = 285°$$

Por tanto, las raíces son $\sqrt[6]{2}_{45°}$, $\sqrt[6]{2}_{165°}$ y $\sqrt[6]{2}_{285°}$.

021 **Resuelve estas ecuaciones.**

a) $z^4 - 1 = 0$

b) $z^2 + 16 = 0$

c) $z^3 + 8 = 0$

d) $z^3 - 8 = 19$

a) $z^4 - 1 = 0 \rightarrow z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1_{0°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta del módulo: 1.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{0° + 0 \cdot 360°}{4} = 0°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{0° + 1 \cdot 360°}{4} = 90°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{0° + 2 \cdot 360°}{4} = 180°$$

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{0° + 3 \cdot 360°}{4} = 270°$$

Por tanto, las raíces son $1_{0°} = 1$, $1_{90°} = i$, $1_{180°} = -1$ y $1_{270°} = -i$.

b) $z^2 + 16 = 0 \rightarrow z = \sqrt{-16} = \sqrt{16_{180°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuadrada del módulo: 4.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180° + 0 \cdot 360°}{2} = 90°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180° + 1 \cdot 360°}{2} = 270°$$

Por tanto, las raíces son $4_{90°} = 4i$ y $4_{270°} = -4i$.

c) $z^3 + 8 = 0 \rightarrow z = \sqrt[3]{-8} \rightarrow z = \sqrt[3]{8_{180°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180° + 0 \cdot 360°}{3} = 60°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180° + 1 \cdot 360°}{3} = 180°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{180° + 2 \cdot 360°}{3} = 300°$$

Por tanto, las raíces son $2_{60°}$, $2_{180°}$ y $2_{300°}$.

d) $z^3 - 8 = 19 \rightarrow z = \sqrt[3]{27} \rightarrow z = \sqrt[3]{27_{0°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: 3.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{0° + 0 \cdot 360°}{3} = 0°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{0° + 1 \cdot 360°}{3} = 120°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{0° + 2 \cdot 360°}{3} = 240°$$

Por tanto, las raíces son $3_{0°}$, $3_{120°}$ y $3_{240°}$.

022 **Calcula y representa las raíces cúbicas de este número.**

$$\frac{1+i}{-1-i}$$

$$\frac{1+i}{-1-i} = \frac{(1+i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{-1-1}{1+1} = -1 = 1_{180°}$$

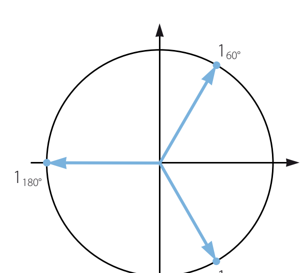
Módulo: $\sqrt[3]{1} = 1$

Argumentos:

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180° + 0 \cdot 360°}{3} = 60°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180° + 1 \cdot 360°}{3} = 180°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{180° + 2 \cdot 360°}{3} = 300°$$



Por tanto, las raíces son $1_{60°}$, $1_{180°}$ y $1_{300°}$.

023 **Un cuadrado, con centro en el origen de coordenadas, tiene uno de sus vértices en el punto *A*(3, 2). Determina los demás vértices.**

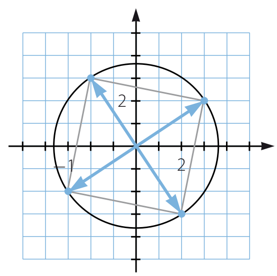
Calculamos las raíces cuartas de $3 + 2i$.

Módulo: $\sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Argumentos: $tg\ \alpha = \dfrac{2}{3} \rightarrow \alpha = 33°\ 41'\ 24{,}2''$

Sumamos 90° al argumento de cada vértice para obtener el siguiente.

Por tanto, las raíces son $\sqrt{13}_{33°\,41'\,24{,}2''}$, $\sqrt{13}_{123°\,41'\,24{,}2''}$, $\sqrt{13}_{213°\,41'\,24{,}2''}$ y $\sqrt{13}_{303°\,41'\,24{,}2''}$.



024 **Expresa los números complejos en forma binómica.**

a) $\sqrt{-16} + 3$ b) $-2 - \sqrt{-4}$ c) $\sqrt{-8} + \sqrt{2}$

a) $\sqrt{-16} + 3 = 3 + 4i$

b) $-2 - \sqrt{-4} = -2 - 2i$

c) $\sqrt{-8} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{8}\,i$

025 **Resuelve estas ecuaciones, y expresa sus soluciones en forma compleja.**

a) $x^2 + 4 = 0$ b) $2x^2 - 2x + 1 = 0$ c) $2x^2 - x + 5 = 0$

a) $x^2 + 4 = 0 \rightarrow x = \sqrt{-4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2i \\ x_2 = -2i \end{cases}$

b) $2x^2 - 2x + 1 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 2\cdot 1}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+i}{2} \\ x_2 = \dfrac{1-i}{2} \end{cases}$$

c) $2x^2 - x + 5 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 2\cdot 5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-39}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1+\sqrt{39}\,i}{2} \\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{39}\,i}{2} \end{cases}$$

026 Expresa en forma binómica estos números complejos.

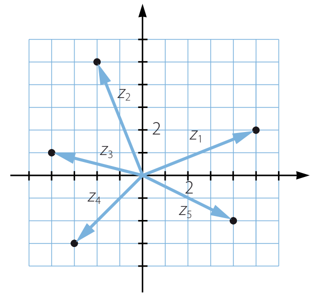
$z_1 = 5 + 2i$

$z_2 = -2 + 5i$

$z_3 = -4 + i$

$z_4 = -3 - 3i$

$z_5 = 4 - 2i$



027 Represente los números en el plano complejo.

a) $5 + i$

b) $\sqrt{2} - 3i$

c) $-3 - i$

d) $6i$

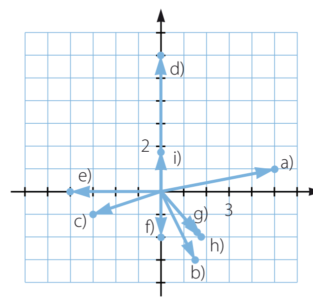
e) -4

f) $-2i$

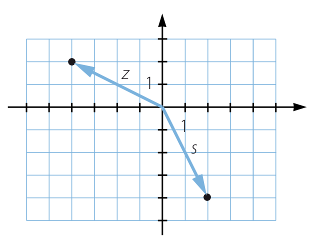
g) $\frac{3}{2} - \frac{5}{3}i$

h) $\sqrt{3} - 2i$

i) $\sqrt{3}\,i$



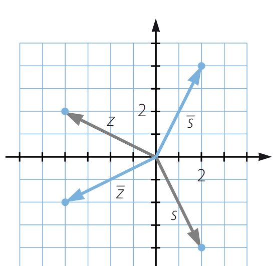
028 Dibuja el conjugado y el opuesto de los números complejos z y s.



a) ¿Cómo será la representación del conjugado de un número?

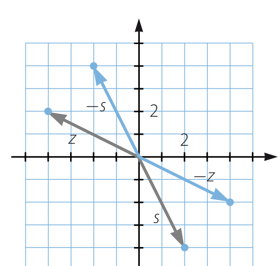
b) ¿Y de su opuesto?

a)



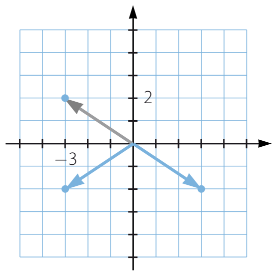
El conjugado de un número es simétrico respecto del eje de abscisas.

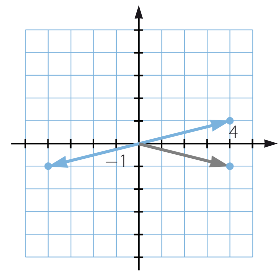
b)



El opuesto de un número es simétrico respecto del origen.

029 Representa en el plano complejo los siguientes números: $-3+2i$ y $4-i$. Obtén sus conjugados y sus opuestos, y represéntalos.





030 Encuentra las soluciones de las ecuaciones.

a) $x^2-2x+5=0$

b) $x^2-6x+10=0$

c) $x^2-4x+7=0$

d) $\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{5}{x+1}+2=0$

a) $x^2-2x+5=0$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot5}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-16}}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=1+2i\\x_2=1-2i\end{cases}$$

b) $x^2-6x+10=0$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot1\cdot10}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{-4}}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=3+i\\x_2=3-i\end{cases}$$

c) $x^2-4x+7=0$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot7}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-12}}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=2+\sqrt{3}\,i\\x_2=2-\sqrt{3}\,i\end{cases}$$

d) $\dfrac{x+1}{3}+\dfrac{5}{x+1}+2=0\rightarrow x^2+8x+22=0$

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64-4\cdot1\cdot22}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{-24}}{2}\rightarrow\begin{cases}x_1=-4+\sqrt{6}\,i\\x_2=-4-\sqrt{6}\,i\end{cases}$$

031 Calcula y representa en el plano complejo los números: $i^1,\ i^2,\ i^3,\ i^4,\ i^5,\ i^6,\dots$

Investiga también lo que ocurre con:

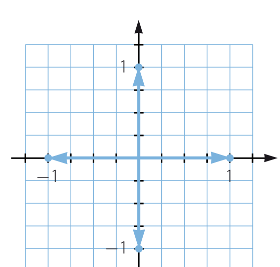
$i^{-1},\ i^{-2},\ i^{-3},\ i^{-4},\ i^{-5},\ i^{-6},\dots$

$i^{4n-3}=i$ $\qquad i^{-4n+3}=-i$

$i^{4n-2}=-1$ $\qquad i^{-4n+2}=-1$

$i^{4n-1}=-i$ $\qquad i^{-4n+1}=i$

$i^{4n}=1$ $\qquad i^{-4n}=1$



032 Realiza las siguientes operaciones.

a) $(3-5i)+(2-7i)+(-4+8i)$

b) $(-1+2i)-(3+6i)-(-4-i)$

c) $-(1-2i)-(-7i)-(-4-3i)$

d) $2(1-4i)-2(1+4i)-3(4-4i)$

e) $2\left(\sqrt{3}+i\right)-3\left(2\sqrt{3}+4i\right)$

f) $\left(\sqrt{2}-3i\right)+2\left(2-\sqrt{3}i\right)$

g) $\left(\frac{1}{2}+2i\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{3}i\right)+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}i\right)$

h) $(1-3i)+i(2-6i)-2i(-1+6i)$

a) $(3-5i)+(2-7i)+(-4+8i)=1-4i$

b) $(-1+2i)-(3+6i)-(-4-i)=(-1+2i)+(-3-6i)+(4+i)=-3i$

c) $-(1-2i)-(-7i)-(-4-3i)=(-1+2i)+(7i)+(4+3i)=3+12i$

d) $2(1-4i)-2(1+4i)-3(4-4i)=-12-4i$

e) $2\left(\sqrt{3}+i\right)-3\left(2\sqrt{3}+4i\right)=\left(2\sqrt{3}+2i\right)+\left(-6\sqrt{3}-12i\right)=-4\sqrt{3}-10i$

f) $\left(\sqrt{2}-3i\right)+2\left(2-\sqrt{3}i\right)=\left(\sqrt{2}-3i\right)+\left(4-2\sqrt{3}i\right)=\left(\sqrt{2}+4\right)-\left(3+2\sqrt{3}\right)i$

g) $\left(\frac{1}{2}+2i\right)-\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{3}i\right)+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{5}{12}+\frac{14}{3}i$

h) $(1-3i)+i(2-6i)-2i(-1+6i)=(1-3i)+(6+2i)+(12+2i)=19+i$

033 Haz estos productos y potencias.

a) $(1-3i)(2-6i)$

b) $(-3-4i)(7-i)$

c) $(-2+5i)^2$

d) $(5-4i)(5+4i)$

e) $\left(-3-2\sqrt{2}i\right)\left(-3+2\sqrt{2}i\right)$

f) $\left(\sqrt{2}-i\right)^3$

a) $(1-3i)(2-6i)=2-6i-6i-18=-16-12i$

b) $(-3-4i)(7-i)=-21+3i-28i-4=-25-25i$

c) $(-2+5i)^2=4-25-20i=-21-20i$

d) $(5-4i)(5+4i)=25+16=41$

e) $\left(-3-2\sqrt{2}i\right)\left(-3+2\sqrt{2}i\right)=9+8=17$

f) $\left(\sqrt{2}-i\right)^3=\sqrt{2^3}-6i-3\sqrt{2}+i=-\sqrt{2}-5i$

034 Efectúa las divisiones.

a) $\dfrac{-1+5i}{3-2i}$

b) $\dfrac{20+40i}{8+6i}$

c) $\dfrac{-1+5i}{2-i}$

a) $\dfrac{-1+5i}{3-2i}=\dfrac{(-1+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{-3-2i+15i-10}{9+4}=\dfrac{-13+13i}{13}=-1+i$

b) $\dfrac{20+40i}{8+6i}=\dfrac{(20+40i)(8-6i)}{(8+6i)(8-6i)}=\dfrac{160-120i+320i+240}{64+36}=4+2i$

c) $\dfrac{-1+5i}{2-i}=\dfrac{(-1+5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{-2-i+10i-5}{4+1}=\dfrac{-7+9i}{5}$

035 Obtén, en forma binómica, el resultado de las operaciones.

a) $\dfrac{30(1-i)}{-4-2i}+(2-3i)i$

b) $2i-\dfrac{(2+3i)3}{-3+i}$

c) $\dfrac{4(10-i)+8}{2-6i}-(3-i)(2+6i)$

d) $(-2-5i)-\dfrac{10-10i-5(1+i)}{(8+2i)-(5+3i)}$

e) $\dfrac{(1+3i)^2-(2i)^2}{-3+4i}$

a) $\dfrac{30(1-i)}{-4-2i}+(2-3i)i=-3+9i+(3+2i)=11i$

b) $2i-\dfrac{(2+3i)3}{-3+i}=2i+\dfrac{9}{10}+\dfrac{33}{10}i=\dfrac{9}{10}+\dfrac{53}{10}i$

c) $\dfrac{4(10-i)+8}{2-6i}-(3-i)(2+6i)=\dfrac{48-4i}{2-6i}-(6+18i-2i+6)=$
$=3+7i-(12+16i)=-9-9i$

d) $(-2-5i)-\dfrac{10-10i-5(1+i)}{(8+2i)-(5+3i)}=(-2-5i)-\dfrac{5-15i}{3-i}=$
$=(-2-5i)-(3-4i)=-5-i$

e) $\dfrac{(1+3i)^2-(2i)^2}{-3+4i}=\dfrac{-8+6i+4}{-3+4i}=\dfrac{36}{25}-\dfrac{2}{25}i$

036 Represanta en el plano complejo los números complejos y los resultados de las operaciones. Explica lo que sucede en cada caso.

a) $(3+2i)+(-1+4i)$

b) $(3+2i)(-1+3i)$

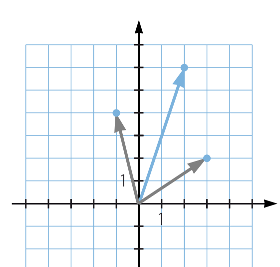
c) $(-5+2i)-(4+3i)$

d) $\dfrac{-2+6i}{4-2i}$

a) $(3+2i)+(-1+4i)=2+6i$

El resultado es otro número complejo que tiene por coordenadas la suma de las coordenadas de los dos números.

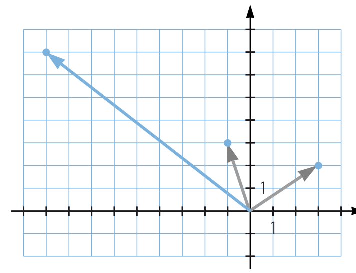
Gráficamente coincide con el vector suma.



b) $(3 + 2i)(-1 + 3i) = -3 + 9i - 2i - 6 = -9 + 7i$

El resultado es otro número complejo que tiene:

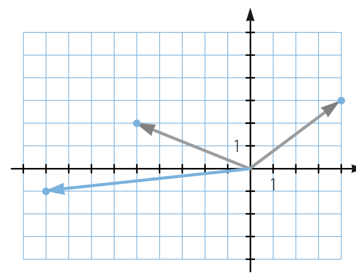
- Parte real igual al producto de las partes reales de los números, menos el producto de las partes imaginarias.
- Parte imaginaria igual al producto de la parte real del primero por la parte imaginaria del segundo, más la parte imaginaria del primero por la parte real del segundo.



c) $(-5 + 2i) - (4 + 3i) = -9 - i$

El resultado es otro número complejo que tiene por coordenadas la resta de las coordenadas de los dos números.

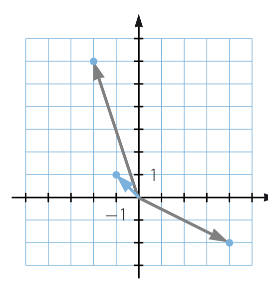
Gráficamente coincide con la diferencia de vectores.



d) $\dfrac{-2+6i}{4-2i} = \dfrac{(-2+6i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)} = \dfrac{-8-4i+24i-12}{16+4} = \dfrac{-20+20i}{20} = -1+i$

El resultado es otro número complejo que tiene:

- Parte real igual al producto de las partes reales de los números, más el producto de las partes imaginarias, dividido entre la suma de los cuadrados de la parte real e imaginaria del divisor.
- Parte imaginaria igual al producto de la parte imaginaria del primero por la parte real del segundo, menos la parte real del primero por la parte imaginaria del segundo, dividido entre la suma de los cuadrados de la parte real e imaginaria del divisor.



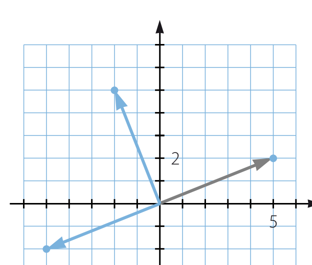
037 ●●○ **Representa $(5 + 2i)$. Multiplícalo por i y representa el resultado. Multiplica dos veces por i y explica qué se obtiene.**

$(5 + 2i)i = -2 + 5i$

$(5 + 2i)i^2 = -5 - 2i$

Al multiplicar por i el punto se desplaza 90°, mediante un giro de centro el origen, en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Al multiplicar por i^2 se obtiene el punto simétrico respecto del origen (su opuesto).



038 Encuentra el número complejo que es inverso de $-1 + 2i$.

$$\frac{1}{-1+2i} = \frac{-1-2i}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{-1-2i}{5}$$

039 Calcula z en la siguiente ecuación.

$$(2-3i)z = (6+5i)$$

$$(2-3i)z = (6+5i) \rightarrow z = \frac{6+5i}{2-3i} \rightarrow z = \frac{(6+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} \rightarrow z = \frac{-3+28i}{13}$$

040 Calcula $a, b, c, \dots$, para que se verifiquen las condiciones indicadas en cada apartado.

a) $(3-5i) + (-1+ai)$ es un número real.

b) $(b+3i) + (5+2i)$ es un número imaginario puro.

c) $(c+6i)(3-2i)$ es un número real.

d) $(d+6i)(3-2i)$ es un número imaginario puro.

e) $\dfrac{7+11i}{e-2i}$ es un número real.

f) $\dfrac{7+11i}{f-2i}$ es un número imaginario puro.

a) $(3-5i) + (-1+ai) = 2 + (-5+a)i \rightarrow a = 5$

b) $(b+3i) + (5+2i) = (b+5) + 5i \rightarrow b = -5$

c) $(c+6i)(3-2i) = (3c+12) + (-2c+18)i \rightarrow -2c+18 = 0 \rightarrow c = 9$

d) $(d+6i)(3-2i) = (3d+12) + (-2d+18)i \rightarrow 3d+12 = 0 \rightarrow d = -4$

e) $$\frac{7+11i}{e-2i} = \frac{(7+11i)(e+2i)}{(e-2i)(e+2i)} = \frac{7e-22}{e^2+4} + \frac{11e+14}{e^2+4}i \rightarrow \frac{11e+14}{e^2+4} = 0$$
$$\rightarrow e = -\frac{14}{11}$$

f) $$\frac{7+11i}{f-2i} = \frac{(7+11i)(f+2i)}{(f-2i)(f+2i)} = \frac{7f-22}{f^2+4} + \frac{11f+14}{f^2+4}i \rightarrow \frac{7f-22}{f^2+4} = 0$$
$$\rightarrow f = \frac{22}{7}$$

041 Encuentra p y q para que se cumpla:

$$(p+3i)(4+qi) = 15+9i$$

$$(p+3i)(4+qi) = 15+9i \rightarrow (4p-3q) + (12+pq)i = 15+9i$$

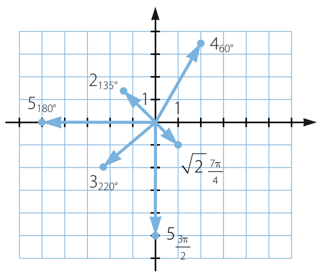
$$\left.\begin{array}{l} 4p-3q = 15 \\ 12+pq = 9 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} p_1 = 3;\ q_1 = -1 \\ p_2 = \dfrac{3}{4};\ q_2 = -4 \end{array}\right.$$

042 Demuestra que el número complejo $z = 1 - 3i$ verifica la igualdad $\dfrac{z^2}{2} = z - 5$.

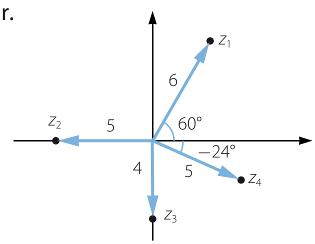
$$\frac{z^2}{2} = \frac{(1-3i)^2}{2} = \frac{-8-6i}{2} = -4 - 3i = 1 - 3i - 5 = z - 5$$

043 Representa los siguientes números complejos expresados en forma polar.

a) $4_{60°}$ b) $2_{135°}$ c) $3_{220°}$ d) $\sqrt{2}_{\frac{7\pi}{4}}$ e) $5_{180°}$ f) $5_{\frac{3\pi}{2}}$



044 Expresa estos números complejos en forma polar.



$z_1 = 6_{60°}$

$z_2 = 5_{180°}$

$z_3 = 4_{270°}$

$z_4 = 5_{336°}$

045 Escribe estos números en forma polar y represéntalos.

a) $3 - 4i$ b) $\sqrt{3} + i$ c) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ d) $-3i$ e) -3 f) $\dfrac{1}{2}i$

a) $3 - 4i = 5_{306°\,52'\,11{,}63''}$

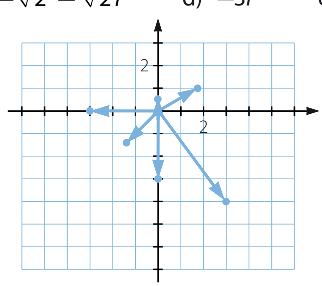
b) $\sqrt{3} + i = 2_{30°}$

c) $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i = 2_{225°}$

d) $-3i = 3_{270°}$

e) $-3 = 3_{180°}$

f) $\dfrac{1}{2}i = \dfrac{1}{2}_{90°}$



046 Escribe en forma binómica los siguientes números complejos.

a) $4_{60°}$ b) $2_{215°}$ c) $3_{\frac{\pi}{2}}$ d) 2_{π} e) $3_{150°}$ f) $1_{\frac{3\pi}{2}}$ g) $\sqrt{2}_{\frac{7\pi}{4}}$ h) $\sqrt{3}_{300°}$

a) $2 + 2\sqrt{3}i$

b) $-1{,}64 - 1{,}15i$

c) $3i$

d) -2

e) $-\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$

f) $-i$

g) $1 - i$

h) $\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i$

047 Dados los números complejos:

$$z_1 = 5_{240°} \qquad z_2 = 3_{135°} \qquad z_3 = \sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}}$$

escribe, en forma polar y binómica, el conjugado y el opuesto de cada uno de ellos.

Tenemos en cuenta que el conjugado es el punto simétrico respecto del eje de abscisas y el opuesto es el simétrico respecto del origen.

Número		Conjugado		Opuesto	
Polar	Binómica	Polar	Binómica	Polar	Binómica
$5_{240°}$	$\left(-\frac{5}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$	$5_{120°}$	$\left(-\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$	$5_{60°}$	$\left(\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$
$3_{135°}$	$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$	$3_{225°}$	$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$	$3_{315°}$	$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$
$\sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}}$	$\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\sqrt{3}_{\frac{11\pi}{6}}$	$\left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\sqrt{3}_{\frac{7\pi}{6}}$	$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

048 Efectúa las siguientes operaciones.

a) $4_{120°} \cdot 3_{60°}$

b) $\dfrac{6_{\pi}}{2_{\frac{\pi}{4}}}$

c) $4_{\frac{\pi}{3}} \cdot 2_{270°}$

d) $\dfrac{8_{170°}}{2_{50°}}$

e) $\left(5_{\frac{\pi}{3}}\right)^2$

f) $2_{260°} \cdot 5_{130°}$

g) $\dfrac{7_{\frac{2\pi}{3}}}{5_{\frac{5\pi}{2}}}$

h) $\left(2_{120°}\right)^5$

i) $\dfrac{10_{120°}}{5_{240°}}$

j) $\left(\sqrt{3}_{\frac{5\pi}{2}}\right)^6$

a) $4_{120°} \cdot 3_{60°} = 12_{180°}$

b) $\dfrac{6_{\pi}}{2_{\frac{\pi}{4}}} = 3_{\frac{3\pi}{4}}$

c) $4_{\frac{\pi}{3}} \cdot 2_{270°} = 4_{60°} \cdot 2_{270°} = 8_{330°}$

d) $\dfrac{8_{170°}}{2_{50°}} = 4_{120°}$

e) $\left(5_{\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 25_{\frac{2\pi}{3}}$

f) $2_{260°} \cdot 5_{130°} = 10_{390°} = 10_{30°}$

g) $\dfrac{7_{\frac{2\pi}{3}}}{5_{\frac{5\pi}{2}}} = \dfrac{7}{5}_{\frac{\pi}{6}}$

h) $\left(2_{120°}\right)^5 = 32_{600°} = 32_{240°}$

i) $\dfrac{10_{120°}}{5_{240°}} = 2_{240°}$

j) $\left(\sqrt{3}_{\frac{5\pi}{2}}\right)^6 = 27_{15\pi} = 27_{\pi}$

049 Realiza estas operaciones, expresando primero los números en forma polar.

a) $(1-i)^4$ b) $\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^6$ c) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^4$ d) $\left(\sqrt{2}-i\right)^7$

a) $(1-i)^4 = \left(\sqrt{2}_{315°}\right)^4 = 4_{180°}$

b) $\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^6 = (2_{135°})^6 = 64_{90°}$

c) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^4 = (2_{120°})^4 = 16_{120°}$

d) $\left(\sqrt{2}-i\right)^7 = \sqrt{3}_{\,324°\,44'\,8,2''}$

050 Calcula, usando la fórmula del binomio de Newton, esta potencia: $\left(2-2\sqrt{3}i\right)^5$. Hazlo en forma binómica.

Comprueba, expresando el número en forma polar, que se obtiene el mismo resultado.

$$\left(2-2\sqrt{3}i\right)^5 = 2^5 - 5\cdot 2^4\cdot 2\sqrt{3}i - 10\cdot 2^3\cdot 12 + 10\cdot 2^2\cdot 24\sqrt{3}i + 5\cdot 2\cdot 72 - 288\sqrt{3}i =$$
$$= 512 + 512\sqrt{3}i$$

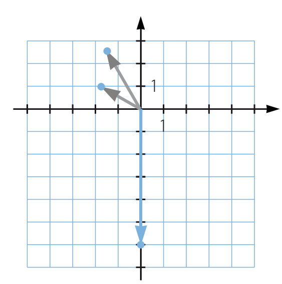
$(4_{300°})^5 = 1.024_{60°}$

$512 + 512\sqrt{3}i = 1.024_{60°}$

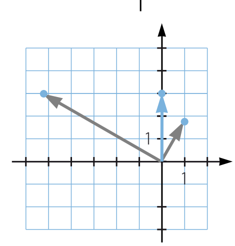
051 Representa en el plano complejo estos números y los resultados de sus operaciones. Explica lo que sucede en cada caso.

a) $2_{150°}\cdot 3_{120°}$ b) $\dfrac{6_{150°}}{2_{60°}}$ c) $\left(2_{\frac{\pi}{3}}\right)^4$

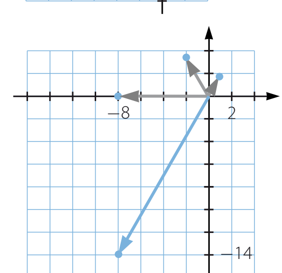
a) El módulo del resultado es el producto de los módulos, y el argumento es la suma de los argumentos de los números dados.



b) El módulo del resultado es el cociente de los módulos, y el argumento es la resta de los argumentos de los números dados.



c) El módulo del resultado es la cuarta potencia del módulo, y el argumento es el cuádruple del argumento del número dado.



052 Realiza las siguientes potencias, empleando la fórmula de Moivre.

a) $\left(3\left(\cos 25° + i \operatorname{sen} 25°\right)\right)^4$

b) $\left(2\left(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°\right)\right)^9$

c) $\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)^3$

d) $\left(3\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right)\right)^4$

a) $(3(\cos 25° + i \operatorname{sen} 25°))^4 = 81(\cos 100° + i \operatorname{sen} 100°)$

b) $(2(\cos 40° + i \operatorname{sen} 40°))^9 = 512(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°) = 512$

c) $\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)^3 = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$

d) $\left(3\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right)\right)^4 = 81(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = 81$

053 Con la fórmula de Moivre, expresa *sen* 5α y *cos* 5α en función de *sen* α y *cos* α.

Consideramos un número complejo de módulo la unidad:

$$(1_\alpha)^5 = (\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)^5 = \cos 5\alpha + i \operatorname{sen} 5\alpha$$

Desarrollamos la primera parte de la igualdad:

$$\cos^5\alpha + 5i\cos^4\alpha \operatorname{sen}\alpha - 10\cos^3\alpha \operatorname{sen}^2\alpha - 10i\cos^2\alpha \operatorname{sen}^3\alpha + 5\cos\alpha \operatorname{sen}^4\alpha + i\operatorname{sen}^5\alpha = (\cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha \operatorname{sen}^2\alpha + 5\cos\alpha \operatorname{sen}^4\alpha) + (5\cos^4\alpha \operatorname{sen}\alpha - 10\cos^2\alpha \operatorname{sen}^3\alpha + \operatorname{sen}^5\alpha)i$$

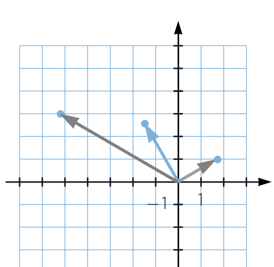
Igualamos este resultado con la segunda parte de la igualdad:

$$(\cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha \operatorname{sen}^2\alpha + 5\cos\alpha \operatorname{sen}^4\alpha) + (5\cos^4\alpha \operatorname{sen}\alpha - 10\cos^2\alpha \operatorname{sen}^3\alpha + \operatorname{sen}^5\alpha)i = \cos 5\alpha + i \operatorname{sen} 5\alpha$$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias resulta:

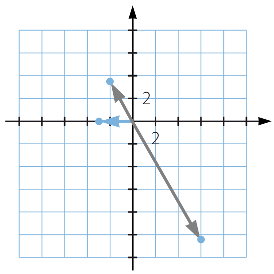
$$\left.\begin{aligned}\cos 5\alpha &= \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha \operatorname{sen}^2\alpha + 5\cos\alpha \operatorname{sen}^4\alpha\\ \operatorname{sen} 5\alpha &= 5\cos^4\alpha \operatorname{sen}\alpha - 10\cos^2\alpha \operatorname{sen}^3\alpha + \operatorname{sen}^5\alpha\end{aligned}\right\}$$

054 Dibuja los números $2_{30°}$ y $6_{150°}$. ¿Por qué número complejo hay que multiplicar al primero para obtener el segundo?



Hay que multiplicar por $3_{120°}$.

055 Dibuja los números $12_{300°}$ y $4_{120°}$. ¿Por qué número complejo hay que dividir al primero para obtener el segundo?



Hay que dividir entre $3_{180°}$.

056 Calcula las soluciones de las siguientes raíces.

a) $\sqrt[3]{64_{120°}}$ b) $\sqrt[5]{32_{\frac{5\pi}{4}}}$ c) $\sqrt[4]{9_{220°}}$

a) $\sqrt[3]{64_{120°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: 4.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{120° + 0 \cdot 360°}{3} = 40°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{120° + 1 \cdot 360°}{3} = 160°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{120° + 2 \cdot 360°}{3} = 280°$$

Por tanto, las raíces son $4_{40°}$, $4_{160°}$ y $4_{280°}$.

b) $\sqrt[5]{32_{\frac{5\pi}{4}}} = \sqrt[5]{32_{225°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz quinta del módulo: 2.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{225° + 0 \cdot 360°}{5} = 45°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{225° + 1 \cdot 360°}{5} = 117°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{225° + 2 \cdot 360°}{5} = 189°$$

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{225° + 3 \cdot 360°}{5} = 261°$$

$$\text{Si } k = 4 \rightarrow \beta_5 = \frac{225° + 4 \cdot 360°}{5} = 333°$$

Por tanto, las raíces son $2_{45°}$, $2_{117°}$, $2_{189°}$, $2_{261°}$ y $2_{333°}$.

c) $\sqrt[4]{9_{220°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cuarta del módulo: $\sqrt{3}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{220° + 0 \cdot 360°}{4} = 55°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{220° + 1 \cdot 360°}{4} = 145°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{220° + 2 \cdot 360°}{4} = 235°$$

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{220° + 3 \cdot 360°}{4} = 325°$$

Por tanto, las raíces son $\sqrt{3}_{55°}$, $\sqrt{3}_{145°}$, $\sqrt{3}_{235°}$ y $\sqrt{3}_{325°}$.

057 **Realiza las raíces y representa los resultados en el plano complejo.**

a) $\sqrt[6]{-16}$ **b)** $\sqrt[3]{16i}$ **c)** $\sqrt[5]{1-\sqrt{3}i}$

a) $\sqrt[6]{-16} = \sqrt[6]{16_{180°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz sexta del módulo: $\sqrt[3]{4}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{180° + 0 \cdot 360°}{6} = 30°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{180° + 1 \cdot 360°}{6} = 90°$$

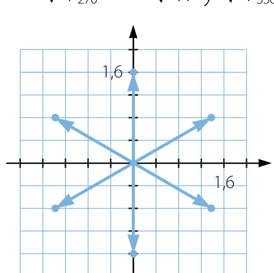
$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{180° + 2 \cdot 360°}{6} = 150°$$

$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{180° + 3 \cdot 360°}{6} = 210°$$

$$\text{Si } k = 4 \rightarrow \beta_5 = \frac{180° + 4 \cdot 360°}{6} = 270°$$

$$\text{Si } k = 5 \rightarrow \beta_6 = \frac{180° + 5 \cdot 360°}{6} = 330°$$

Por tanto, las raíces son $\sqrt[3]{4}_{30°}$, $\sqrt[3]{4}_{90°} = \sqrt[3]{4}i$, $\sqrt[3]{4}_{150°}$, $\sqrt[3]{4}_{210°}$,
$\sqrt[3]{4}_{270°} = -\sqrt[3]{4}i$ y $\sqrt[3]{4}_{330°}$.



b) $\sqrt[3]{16i} = \sqrt[3]{16_{90°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz cúbica del módulo: $2\sqrt[3]{2}$.

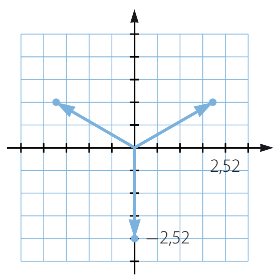
Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{90° + 0 \cdot 360°}{3} = 30°$$

$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{90° + 1 \cdot 360°}{3} = 150°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{90° + 2 \cdot 360°}{3} = 270°$$

Por tanto, las raíces son $2\sqrt[3]{2}_{30°}$, $2\sqrt[3]{2}_{150°}$ y $2\sqrt[3]{2}_{270°} = -2\sqrt[3]{2}i$.



c) $\sqrt[5]{1 - \sqrt{3}i} = \sqrt[5]{2_{60°}}$

El módulo de las soluciones será la raíz quinta del módulo: $\sqrt[5]{2}$.

Existirán tantos argumentos como indique el radical.

$$\text{Si } k = 0 \rightarrow \beta_1 = \frac{60° + 0 \cdot 360°}{5} = 12°$$

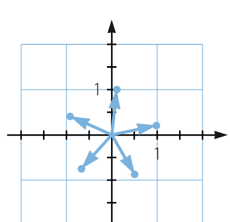
$$\text{Si } k = 1 \rightarrow \beta_2 = \frac{60° + 1 \cdot 360°}{5} = 84°$$

$$\text{Si } k = 2 \rightarrow \beta_3 = \frac{60° + 2 \cdot 360°}{5} = 156°$$

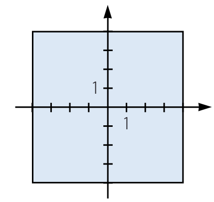
$$\text{Si } k = 3 \rightarrow \beta_4 = \frac{60° + 3 \cdot 360°}{5} = 228°$$

$$\text{Si } k = 4 \rightarrow \beta_5 = \frac{60° + 4 \cdot 360°}{5} = 300°$$

Por tanto, las raíces son $\sqrt[5]{2}_{12°}$, $\sqrt[5]{2}_{84°}$, $\sqrt[5]{2}_{156°}$, $\sqrt[5]{2}_{228°}$ y $\sqrt[5]{2}_{300°}$.



058 Los vértices del polígono representado son las raíces cuartas de un número complejo.
Determina el número y sus raíces.



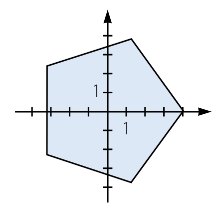
Las raíces son:

$z_1 = 4 + 4i = \sqrt{32}_{45°}$ $\quad$ $z_3 = -4 - 4i = \sqrt{32}_{225°}$

$z_2 = -4 + 4i = \sqrt{32}_{135°}$ $\quad$ $z_4 = 4 - 4i = \sqrt{32}_{315°}$

El número es: $z = 1.024_{180°} = -1.024$

059 En el gráfico se representan las raíces de un número.
Determínalas y descubre de qué número se trata.



Las raíces son:

$z_1 = 4_{0°} = 4$ $\quad$ $z_4 = 4_{216°}$

$z_2 = 4_{72°}$ $\quad$ $z_5 = 4_{288°}$

$z_3 = 4_{144°}$

El número es: $z = 1.024_{0°} = 1.024$

060 Encuentra n y z de manera que dos de las soluciones de $\sqrt[n]{z}$ sean $6_{30°}$ y $6_{120°}$.
¿Hay una única solución? ¿Cuál es el menor número n que puedes encontrar?

Sea $z = r_\alpha$.
La raíz enésima de r debe ser 6.
El argumento debe ser múltiplo de 30 y de 120.
La solución no es única.
El menor número que cumple las condiciones es $n = 4$.
$z_1 = 1.296_{120°}$
Otra solución es $n = 8$.
$z_2 = 1.679.616_{240°}$

061 Resuelve las ecuaciones.

a) $x^2 + 1 = 0$ $\quad$ c) $x^5 - 32 = 0$ $\quad$ e) $x^4 + 16 = 0$

b) $x^3 + 12 = 0$ $\quad$ d) $x^5 - 1 = 0$ $\quad$ f) $x^3 - 8 = 0$

a) $x^2 + 1 = 0 \rightarrow x = \sqrt{-1} = 1_{\frac{180° + k \cdot 360°}{2}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{90°} = i$ $\quad$ Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{270°} = -i$

b) $x^3 + 12 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{-12} = \sqrt[3]{12}_{\frac{180° + k \cdot 360°}{3}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt[3]{12}_{60°}$ $\quad$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = \sqrt[3]{12}_{300°}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = \sqrt[3]{12}_{180°} = -\sqrt[3]{12}$

c) $x^5 - 32 = 0 \rightarrow x = \sqrt[5]{32} = 2_{\frac{0° + k \cdot 360°}{5}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 2_{72°}$ $\quad$ Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 2_{288°}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 2_{144°}$ $\quad$ Si $k = 4 \rightarrow x_5 = 2_{0°} = 2$

Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 2_{216°}$

d) $x^5 - 1 = 0 \rightarrow x = \sqrt[5]{1} = 1_{\frac{0° + k \cdot 360°}{5}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{72°}$ Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 1_{288°}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{144°}$ Si $k = 4 \rightarrow x_5 = 1_{0°} = 1$

Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{216°}$

e) $x^4 + 16 = 0 \rightarrow x = \sqrt[4]{-16} = 2_{\frac{180° + k \cdot 360°}{4}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 2_{45°}$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 2_{225°}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 2_{135°}$ Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 2_{315°}$

f) $x^3 - 8 = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2_{\frac{0° + k \cdot 360°}{3}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 2_{120°}$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 2_{0°} = 2$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 2_{240°}$

062 Realiza la siguiente operación.

$$\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1+i}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1+i}} = \sqrt[4]{\frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}} = \sqrt[4]{\frac{2i}{2}} = \sqrt[4]{i} = 1_{\frac{90° + k \cdot 360°}{4}}$$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 2_{22,5°}$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 2_{202,5°}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 2_{112,5°}$ Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 2_{292,5°}$

063 Expresa en forma polar el inverso de estos números.

a) $2_{150°}$ b) $3_{\frac{\pi}{2}}$ c) $4_{\frac{\pi}{3}}$ d) $\left(\frac{1}{4}\right)_{\pi}$

Para calcular el inverso de un número en forma polar, calculamos el inverso del módulo y el opuesto del argumento.

a) $\frac{1}{2}_{210°}$ b) $\frac{1}{3}_{\frac{3\pi}{2}}$ c) $\frac{1}{4}_{\frac{5\pi}{3}}$ d) $4_{\pi} = -4$

064 Calcula las siguientes raíces de números complejos.

a) $\sqrt{1}$ b) $\sqrt[3]{1}$ c) $\sqrt[4]{1}$ d) $\sqrt{i}$ e) $\sqrt[3]{i}$ f) $\sqrt[4]{i}$

a) $\sqrt{1} = 1_{\frac{0° + k \cdot 360°}{2}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{180°} = -1$ Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{0°} = 1$

b) $\sqrt[3]{1} = 1_{\frac{0° + k \cdot 360°}{3}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{120°}$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{0°} = 1$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{240°}$

c) $\sqrt[4]{1} = 1_{\frac{0^\circ + k \cdot 360^\circ}{4}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{90^\circ} = i$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{180^\circ} = -1$

Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{270^\circ} = -i$

Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 1_{0^\circ} = 1$

d) $\sqrt{i} = 1_{\frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{2}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{45^\circ}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{225^\circ}$

e) $\sqrt[3]{i} = 1_{\frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{3}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{30^\circ}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{150^\circ}$

Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{270^\circ} = -i$

f) $\sqrt[4]{i} = 1_{\frac{90^\circ + k \cdot 360^\circ}{4}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = 1_{22,5^\circ}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = 1_{112,5^\circ}$

Si $k = 2 \rightarrow x_3 = 1_{202,5^\circ}$

Si $k = 3 \rightarrow x_4 = 1_{292,5^\circ}$

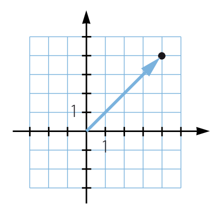
065 ●●○

Observa el número complejo representado.

a) ¿A qué exponente hay que elevarlo para obtener un número real?

b) ¿Y un número imaginario puro?

c) ¿Hay una única solución en cada caso?



El argumento es 45°.

a) $n \cdot 45^\circ = 180^\circ \rightarrow n = 4 \cdot (2k + 1)$

$n \cdot 45^\circ = 360^\circ \rightarrow n = 8 \cdot (k + 1)$

b) $n \cdot 45^\circ = 90^\circ \rightarrow n = 2 \cdot (4k + 1)$

$n \cdot 45^\circ = 270^\circ \rightarrow n = 6 \cdot (4k + 1)$

c) En cada caso hay infinitas soluciones.

066 ●●○

¿Qué número complejo hay que sumarle a $-3 + 2i$ para que resulte 5_{270°? ¿Y para que resulte $6_{\frac{5\pi}{3}}$?

$(-3 + 2i) + (a + bi) = -5i \rightarrow a = 3, b = -7$

$(-3 + 2i) + (a + bi) = 3 - 3\sqrt{3}\,i \rightarrow a = 6, b = -2 - 3\sqrt{3}$

067 ●●○

Calcula z sabiendo que su módulo es $\sqrt{5}$ y que $z(3 - 6i)$ es un número imaginario puro.

$z = \sqrt{5}_\alpha$

$3 - 6i = \sqrt{45}_{296^\circ\, 33'\, 54,1''}$

$\alpha + 296^\circ\, 33'\, 54,1'' = 90^\circ \rightarrow \alpha = 153^\circ\, 26'\, 5,82'' + 360^\circ \cdot k$

$\alpha + 296^\circ\, 33'\, 54,1'' = 270^\circ \rightarrow \alpha = 333^\circ\, 26'\, 5,82'' + 360^\circ \cdot k$

Por tanto, tenemos que: $\alpha = 153^\circ\, 26'\, 5,82'' + 180^\circ \cdot k$.

068 Escribe qué condiciones deben cumplir a, b, c y d para que:

a) $(a+bi)(c+di)$ sea un número real.

b) $(a+bi)(c+di)$ sea un número imaginario puro.

c) $\dfrac{a+bi}{c+di}$ sea un número imaginario puro.

d) $\dfrac{a+bi}{c+di}$ sea un número real.

$$(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$$

a) Para que sea un número real: $ad = -bc$

b) Para que sea un número imaginario puro: $ac = bd$

c) Para que sea un número imaginario puro: $ac = -bd$

d) Para que sea un número real: $ad = bc$

069 Calcula dos números reales a y b, de modo que: $a + 5i = \dfrac{13+bi}{4-i}$

$$\frac{13+bi}{4-i} = \frac{(13+bi)(4+i)}{(4-i)(4+i)} = \frac{52-b}{17} + \frac{13+4b}{17}i$$

$$\begin{cases} \dfrac{52-b}{17} = a \rightarrow 17a + b = 52 \rightarrow a = 2 \\ \dfrac{13+4b}{17} = 5 \rightarrow 13 + 4b = 85 \rightarrow b = 18 \end{cases}$$

070 Halla el valor de a para que este número complejo cumpla que su cuadrado sea igual a su conjugado.

$$a + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Calculamos el cuadrado: $\left(a + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = a^2 - \dfrac{3}{4} + \sqrt{3}ai$

Hallamos el conjugado: $a - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\begin{cases} a^2 - \dfrac{3}{4} = a \\ \sqrt{3}a = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

071 Halla el valor de m para que $3-2i$ sea raíz del polinomio x^2-6i+m.

$m=a+bi$

Para que sea raíz del polinomio debe cumplir:

$$(3-2i)^2-6i+a+bi=0\rightarrow(5+a)+(-18+b)i=0\rightarrow a=-5,\ b=18$$

072 Calcula el valor de b para que el cociente de $-9+bi$ entre $1-2i$ tenga módulo $5\sqrt{2}$.

$$\frac{-9+bi}{1-2i}=\frac{(-9+bi)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=\frac{-9-2b+(-18+b)i}{5}$$

$$\sqrt{(-9-2b)^2+(-18+b)^2}=5\sqrt{2}\rightarrow 81+36b+4b^2+324-36b+b^2=50$$

$$5b^2+355=0\rightarrow b=\sqrt{71}\,i$$

073 Halla c sabiendo que la representación gráfica de $\dfrac{12+ci}{-5+2i}$ está sobre la bisectriz del primer cuadrante.

Para que esté sobre la bisectriz del primer cuadrante, la parte imaginaria debe ser igual a la parte real.

$$\frac{12+ci}{-5+2i}=\frac{(12+ci)(-5-2i)}{(-5+2i)(-5-2i)}=\frac{-60+2c+(-24-5c)i}{29}$$

$$-60+2c=-24-5c\rightarrow c=\frac{36}{7}$$

074 ¿Es cierto que, siempre que multiplicas un número real por un número complejo z, el resultado tiene el mismo argumento que z?
Si no es cierto, enuncia una propiedad correcta.

No es cierto, ya que: $1_{180°}\cdot 1_{90°}=1_{270°}$.

Solo es cierto si el número real es positivo.

Si multiplicamos un número real positivo por un número complejo z, el resultado tiene el mismo argumento que z.

075 ¿Es cierto que el conjugado del producto de dos números complejos es el producto de sus conjugados?

Sean $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di$ dos números complejos.

Calculamos el conjugado del producto:

$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$$

El conjugado del producto es: $ac-bd-(ad+bc)i$

Hallamos el producto de sus conjugados:

$$(a-bi)(c-di)=ac-bd+(-ad-bc)i=ac-bd-(ad+bc)i$$

Luego es cierto.

076 **Demuestra que, si multiplicas un número complejo por su conjugado, se obtiene el cuadrado de su módulo.**

Sea $z = a + bi$.

Calculamos su módulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

El cuadrado del módulo es: $a^2 + b^2$

Multiplicamos por el conjugado: $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$

Por tanto, es cierto.

077 **¿Qué diferencia existe entre las soluciones de la raíz cuadrada real de 16 y la raíz cuadrada del número complejo 16 + 0*i*?**

No existe ninguna diferencia, pues ambos números tienen como raíz cuadrada 4 y −4.

078 **Calcula las tres raíces cúbicas de −27 y comprueba que su suma es cero. Comprueba si sucede lo mismo con las tres raíces cúbicas de 16 − 88*i*. ¿Sucederá eso con todos los números complejos? Justifica tu respuesta.**

$$\sqrt[3]{-27} = 3_{\frac{180° + k \cdot 360°}{3}}$$

Si $k = 0 \rightarrow z_1 = 3_{60°} = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ Si $k = 2 \rightarrow z_3 = 3_{300°} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

Si $k = 1 \rightarrow z_2 = 3_{180°} = -3$

Sumamos las raíces: $\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i - 3 + \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i = 0$

Calculamos las raíces cúbicas de $16 - 88i = \sqrt{8.000}_{280°\,18'\,17{,}45''}$:

$$\sqrt[6]{8.000}_{\frac{280°\,18'\,17{,}45'' + k \cdot 360°}{3}}$$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt[6]{8.000}_{93°\,26'\,5{,}82''} = -1{,}1983 + 19{,}965i$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = \sqrt[6]{8.000}_{213°\,23'\,5{,}82''} = -16{,}6902 - 11{,}0197i$

Si $k = 2 \rightarrow x_3 = \sqrt[6]{8.000}_{333°\,26'\,5{,}82''} = 17{,}8885 - 8{,}94427i$

Sumamos las raíces:

$$-1{,}1983 + 19{,}965i - 16{,}6902 - 11{,}0197i + 17{,}8885 - 8{,}94427i = 0$$

Sucederá lo mismo con todos los números complejos.

Dado un número complejo, sus tres raíces cúbicas serán: r_α, $r_{\alpha+120°}$ y $r_{\alpha+240°}$.

Si multiplicamos las raíces por el número complejo $\left(\frac{3}{r}\right)_{-\alpha+60°}$, da como resultado las raíces cúbicas de −27, cuya suma es cero:

$$0 = z_1 + z_2 + z_3 = \left(\frac{3}{r}\right)_{-\alpha+60°} \cdot (r_\alpha + r_{\alpha+120°} + r_{\alpha+240°})$$

Como $\left(\frac{3}{r}\right)_{-\alpha+60°} \neq 0 \rightarrow (r_\alpha + r_{\alpha+120°} + r_{\alpha+240°}) = 0$, la suma de las tres raíces cúbicas de cualquier número complejo distinto de cero es cero.

079 Uno de los vértices de un triángulo es el origen de coordenadas y los otros dos son los afijos de los números complejos $-2+5i$ y $3+i$. Calcula la longitud de sus lados.

Sea O el origen de coordenadas, $A=-2+5i$, $B=3+i$.

Calculamos la longitud del lado OA: $\sqrt{(-2)^2+5^2}=\sqrt{29}$

Hallamos la longitud del lado OB: $\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

Determinamos la longitud del lado AB: $\sqrt{(-2-3)^2+(5-1)^2}=\sqrt{41}$

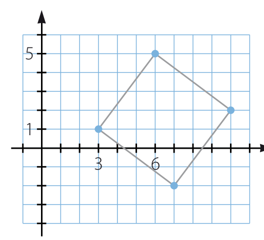
080 Dos vértices consecutivos de un cuadrado son los afijos de los números $6+5i$ y $3+i$. Determina el resto de sus vértices, sabiendo que tiene uno en el cuarto cuadrante.

La variación de la parte real de los dos números es de 3 unidades y la variación de la parte compleja es de 4 unidades.

Por tanto, si a partir de los vértices conocidos llevamos una variación de 4 unidades en la parte real y 3 unidades en la parte imaginaria, resultan los otros dos vértices, obteniéndose dos soluciones:

$C=(7,-2)$ y $D=(10,2)$

$C'=(-1,4)$ y $D'=(2,8)$



De estas soluciones únicamente la primera solución tiene un vértice en el cuarto cuadrante.

081 Uno de los vértices de un cuadrado con centro en el origen tiene coordenadas $(-1, 3)$. Utiliza los números complejos para determinar los otros vértices y su área.

$z_2=-1+3i$

Elevamos a la cuarta: $z=100_{73°\,44'\,23{,}26''}$

Calculamos el resto de las raíces: $\sqrt[4]{100_{40}}=\sqrt{10}_{\frac{40°+k\cdot 360°}{4}}$

Si $k=0\rightarrow x_1=\sqrt{10}_{18°\,26'\,5{,}82''}=3+i$ | Si $k=2\rightarrow x_3=\sqrt{10}_{198°\,26'\,5{,}81''}$

Si $k=1\rightarrow x_2=\sqrt{10}_{108°\,26'\,5{,}81''}$ | Si $k=3\rightarrow x_4=\sqrt{10}_{288°\,26'\,5{,}81''}$

$z_1=(3,1)$ y $z_2=(-1,3)$

Hallamos la longitud del lado: $\sqrt{(-1-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{20}$

Por tanto, el área es 20.

082 Un pentágono regular, con centro en el origen de coordenadas, tiene en $(-3, -2)$ uno de sus vértices. Halla los demás vértices usando números complejos.

$z_2=-3-2i$

Elevamos a la quinta: $z=\sqrt{13^5}_{213°\,41'\,24{,}2''}$

Calculamos el resto de las raíces: $\sqrt{13}_{\frac{213°\,41'\,24{,}2''+k\cdot 360°}{5}}$

Si $k=0\rightarrow x_1=\sqrt{13}_{42°\,44'\,16{,}85''}$ | Si $k=2\rightarrow x_3=\sqrt{13}_{186°\,44'\,16{,}85''}$

Si $k=1\rightarrow x_2=\sqrt{13}_{114°\,44'\,16{,}85''}$ | Si $k=3\rightarrow x_4=\sqrt{13}_{258°\,44'\,16{,}85''}$

083 ¿Qué número complejo forma un triángulo equilátero con su conjugado y con -5?

Sea L la longitud del lado del triángulo equilátero, uno de los vértices es el complejo $a + bi$ y el otro vértice es su conjugado $a - bi$.

$$b = L \cdot sen\ 30° = \frac{L}{2} \qquad a = -5 + L \cdot cos\ 30° = -5 + \frac{L \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Todos los triángulos tienen -5 como el vértice situado más a la izquierda.

Si el vértice -5 estuviera situado a la derecha del triángulo, las coordenadas de los otros vértices serían:

$$b = L \cdot sen\ 30° = \frac{L}{2} \qquad a = -5 - L \cdot cos\ 30° = -5 - \frac{L \cdot \sqrt{3}}{2}$$

084 **Las cuatro raíces cuartas de -4.096 describen un cuadrado. Calcula su área. Además, sus raíces cúbicas describen un triángulo equilátero. Determina su área.**

Las raíces cuartas de -4.096 son:

$$z_1 = 8_{45°} = \left(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right) \qquad z_3 = 8_{225°} = \left(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\right)$$

$$z_2 = 8_{135°} = \left(-4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right) \qquad z_4 = 8_{315°} = \left(4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\right)$$

Calculamos el lado: $\sqrt{\left(4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\right)^2} = 8\sqrt{2}$

Por tanto, el área es de128.

Las raíces cúbicas de -4.096 son:

$$z_1 = 16_{60°} = \left(8, 8\sqrt{3}\right) \qquad z_3 = 16_{300°} = \left(8, -8\sqrt{3}\right)$$

$$z_2 = 16_{180°} = (-16, 0)$$

Se forma un triángulo cuya base mide 16 y su altura es de 24.

Por tanto, su área mide $192\sqrt{3}$.

085 **El número complejo $3 + 5i$ es una de las raíces cúbicas de z. Halla las otras dos raíces.**

$$z_1 = 3 + 5i = \sqrt{35}_{59°\,2'\,10{,}48''}$$

Las raíces tendrán el mismo módulo.

Calculamos el resto de las raíces: $\sqrt{35}_{59°\,2'\,10{,}48'' + \frac{k \cdot 360°}{3}}$

Si $k = 0 \rightarrow x_1 = \sqrt{35}_{59°\,2'\,10{,}48''}$ Si $k = 2 \rightarrow x_3 = \sqrt{35}_{299°\,2'\,10{,}48''}$

Si $k = 1 \rightarrow x_2 = \sqrt{35}_{179°\,2'\,10{,}48''}$

086 **Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $3 + i$ y $3 - i$. Haz lo mismo con $-2 - 5i$ y $-2 + 5i$.**

$$(x - 3 + i)(x - 3 - i) = 0 \rightarrow x^2 - 3x - ix - 3x + 9 + 3i + ix - 3i + 1 = 0$$
$$\rightarrow x^2 - 6x + 10 = 0$$

$$(x + 2 + 5i)(x + 2 - 5i) = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 5ix + 2x + 4 - 10i + 5ix + 10i + 25 = 0$$
$$\rightarrow x^2 + 4x + 29 = 0$$

087 Demuestra que si una ecuación de segundo grado cuyos coeficientes son números reales tiene dos raíces complejas, estas deben ser números conjugados.

Tenemos una ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$

Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \left(\sqrt{-b^2 + 4ac}\right)i}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \left(\sqrt{-b^2 + 4ac}\right)i}{2a} \end{cases}$$

Luego sus soluciones son dos números complejos conjugados.

088 ¿Qué condición deben cumplir los números reales a, b y c para que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tenga soluciones complejas?

Se debe cumplir que: $b^2 - 4ac < 0$

089 Resuelve la ecuación $x^4 + 10x^2 + 169 = 0$.

$$x^4 + 10x^2 + 169 = 0 \xrightarrow{t\,=\,x^2} t^2 + 10t + 169 = 0$$

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot 1\cdot 169}}{2\cdot 1} = \frac{-10 \pm 24i}{2} = \begin{cases} t_1 = -5 + 12i \\ t_2 = -5 - 12i \end{cases}$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{-5 + 12i} = \sqrt{13_{112^\circ\, 37'\, 11{,}5''}} = \begin{cases} x_1 = \sqrt{13}_{\,56^\circ\, 18'\, 35{,}75''} \\ x_2 = \sqrt{13}_{\,236^\circ\, 18'\, 35{,}75''} \end{cases}$$

$$\sqrt{-5 - 12i} = \sqrt{13_{247^\circ\, 22'\, 48{,}49''}} = \begin{cases} x_3 = \sqrt{13}_{\,123^\circ\, 41'\, 24{,}24''} \\ x_4 = \sqrt{13}_{\,303^\circ\, 41'\, 24{,}24''} \end{cases}$$

090 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\dfrac{z}{5-i} + (2-i)\,6i = -3 + 2i$

b) $z(-2 + 6i) + \dfrac{-41 + 37i}{4 - 3i} + 10 - 8i = z(1 + 7i)$

a) $\dfrac{z}{5-i} + (2-i)6i = -3 + 2i \rightarrow \dfrac{z}{5-i} + 6 + 12i = -3 + 2i$

$\rightarrow \dfrac{z}{5-i} = -9 - 10i \rightarrow z = (5-i)(-9-10i) \rightarrow z = -55 - 41i$

b) $z(-2+6i) + \dfrac{-41+37i}{4-3i} + 10 - 8i = z(1+7i) \rightarrow z(-2+6i) - 11 +$

$+ i + 10 - 8i = z(1+7i) \rightarrow z(-2+6i) - 1 - 7i = z(1+7i)$

$\rightarrow z(-2+6i) - z(1+7i) = 1 + 7i \rightarrow z(-2+6i-1-7i) = 1 + 7i$

$\rightarrow z = \dfrac{1+7i}{-3-i} \rightarrow z = -1 - 2i$

091 Resuelve estas ecuaciones.

a) $x^2 - 8ix + 4i - 19 = 0$

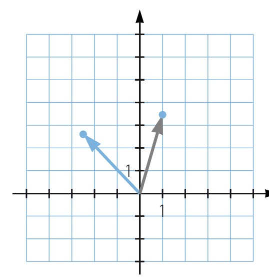
b) $\left.\begin{array}{l} x - iy = 0 \\ y - ix = 4 - 6i \end{array}\right\}$

a) $x^2 - 8ix + 4i - 19 = 0 \rightarrow x = \dfrac{8i \pm \sqrt{-64 - 4 \cdot 1 \cdot (4i - 19)}}{2 \cdot 1} = \dfrac{8i \pm \sqrt{10 - 16i}}{2}$

b) $\left.\begin{array}{l} x - iy = 0 \\ y - ix = 4 - 6i \end{array}\right\} \xrightarrow{x = iy} y - i(iy) = 4 - 6i \rightarrow y + y = 4 - 6i \rightarrow y = 2 - 3i$

$x = i(2 - 3i) = 3 + 2i$

092 Representa el número complejo $1 + 2\sqrt{3}i$ y realiza en este punto un giro de 60° centrado en el origen. Halla las expresiones binómica y polar del número complejo resultante.



$z = 1 + 2\sqrt{3}i = \sqrt{13}_{73°\ 53'\ 52,39''}$

Hacemos un giro de 60°:

$\sqrt{13}_{133°\ 53'\ 52,39''} = -2,5 + 2,6i$

093 La suma de dos números complejos conjugados es 16 y la suma de sus módulos es 20. Determínalos.

Sea $z = a + bi$.

$\left.\begin{array}{r} a + bi + a - bi = 16 \\ \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + (-b)^2} = 20 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} a = 8 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \end{array}\right\}$

$\rightarrow 64 + b^2 = 100 \rightarrow b = \pm 6$

Los números son: $8 + 6i$ y $8 - 6i$.

094 Encuentra todos los números complejos tales que su cubo es igual a su raíz cuadrada.

Un número complejo es de la forma r_α. Si ponemos la condición de que su cubo sea igual a su raíz cuadrada, tenemos:

$(r_\alpha)^3 = \sqrt{r_\alpha}$

$(r_\alpha)^3 = r^3_{3\alpha} = \sqrt{r_\alpha} = \left(\sqrt{r}\right)_{\frac{\alpha}{2}}$

Para que sean iguales es preciso que: $\left.\begin{array}{r} r^3 = \sqrt{r} \\ 3\alpha = \dfrac{\alpha}{2} \end{array}\right\}$

$r^3 = \sqrt{r} \rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 1 \end{cases}$

$3\alpha = \dfrac{\alpha}{2} + 360° \rightarrow 6\alpha = \alpha + 720° \rightarrow \begin{cases} \alpha = 0° \\ \alpha = 144° \end{cases}$

Las soluciones son:

$z = 0_{0° + k \cdot 360°}$, $z = 1_{0° + k \cdot 360°}$, $z = 1_{144° + k \cdot 360°}$

095 Investiga qué números complejos cumplen que su cuadrado es igual a su conjugado. Para realizarlo supón que el número está expresado en forma polar.

$z = r_\alpha$

$|z| = r_{360° - \alpha}$

$r^2_{2\alpha} = r_{360° - \alpha}$

Igualamos: $r^2 = r \rightarrow r = 0, r = 1$

$2\alpha = 360° - \alpha \rightarrow \alpha = 120°$

Por tanto, los números cuyo cuadrado es igual a su conjugado son 0_α y $1_{120°}$.

096 **Sea** $u = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. **Comprueba que si** $z = -2 + 5i$, **entonces** z, $u \cdot z$ **y** $u^2 \cdot z$ **son las tres raíces cúbicas de un número complejo. Demuestra que eso sucede para cualquier número** z. **¿Qué tiene de particular el número** u**?**

$z = -2 + 5i = \sqrt{29}_{111°\,48'\,5{,}07''}$

$$u \cdot z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2 + 5i) = 1_{120°} \cdot \sqrt{29}_{111°\,48'\,5{,}07''} = \sqrt{29}_{231°\,48'\,5{,}07''}$$

$$u^2 \cdot z = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 (-2 + 5i) = 1_{120°} \cdot \sqrt{29}_{111°\,48'\,5{,}07''} = \sqrt{29}_{351°\,48'\,5{,}07''}$$

Son las raíces cúbicas de $29_{335°\,24'\,15{,}2''}$.

Esto sucede para cualquier número complejo, ya que las raíces cúbicas de un número complejo tienen el mismo módulo y su argumento se diferencia en 120°.

Al multiplicar cualquier número por u, su módulo no varía y su argumento aumenta 120°.

097 **Determina si es cierta esta afirmación.**

Si dos números complejos z **y** w **cumplen que** $z^3 = w^3$, **entonces** $z = w$.

La afirmación no es cierta.

Para cualquier número complejo z tenemos otros dos complejos: $1_{120°} \cdot z$ y $1_{240°} \cdot z$, cuyo cubo coincide con el cubo de z.

$(1_{120°} \cdot z)^3 = 1_{360°} \cdot z^3 = z^3$

$(1_{240°} \cdot z)^3 = 1_{720°} \cdot z^3 = z^3$

098 **Del número complejo** z_1 **se sabe que su argumento es 150°, y el módulo de** z_2 **es 2. Calcula** z_1 **y** z_2 **sabiendo que su producto es** $-8i$.

$z_1 = r_{150°}$

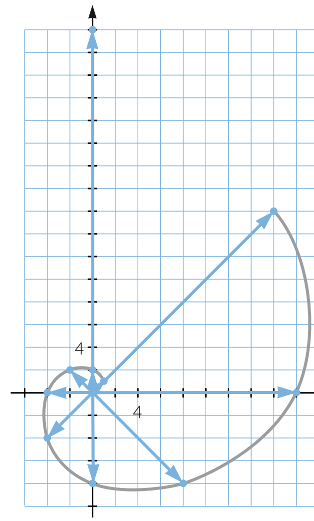
$z_2 = 2_\alpha$

$-8i = 8_{270°}$

$r_{150°} \cdot 2_\alpha = 8_{270°}$

$$\left.\begin{array}{r} r \cdot 2 = 8 \\ 150° + \alpha = 270° \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} r = 4 \\ \alpha = 120° \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} z_1 = 4_{150°} \\ z_2 = 2_{120°} \end{array}$$

099 Representa el número $1 + i$. Pásalo a forma polar y calcula sus 10 primeras potencias. Represéntalas en el plano complejo. Observa que los afijos de esos números describen una curva espiral.



$$z = 1 + i = \sqrt{2}_{45°}$$
$$z^2 = 2_{90°}$$
$$z^3 = 2\sqrt{2}_{135°}$$
$$z^4 = 4_{180°}$$
$$z^5 = 4\sqrt{2}_{225°}$$
$$z^6 = 8_{270°}$$
$$z^7 = 8\sqrt{2}_{315°}$$
$$z^8 = 16_{0°}$$
$$z^9 = 16\sqrt{2}_{45°}$$
$$z^{10} = 32_{90°}$$

100 Calcula la suma de los 10 primeros términos de una progresión aritmética de diferencia $1 + 2i$ y cuyo primer término es $-6 - 2i$.

$$d = 1 + 2i$$
$$a_1 = -6 - 2i$$
$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$
$$a_{10} = -6 - 2i + (10 - 1)(1 + 2i) = 3 + 16i$$
$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$
$$S_{10} = \frac{(-6 - 2i + 3 + 16i)10}{2} = -15 + 70i$$

101 Si el número complejo $a + bi$ tiene módulo m y argumento α, ¿cómo expresarías en forma binómica un número complejo con módulo $6m$ y argumento $2\pi - \alpha$? ¿Y si el módulo es $3m$ y el argumento es $\alpha + \frac{3\pi}{2}$?

Sea $w = c + di$ el número complejo que tiene por módulo $6m$ y argumento $2\pi - \alpha$.

$$c = 6\sqrt{a^2 + b^2}\ \cos(2\pi - \alpha) = 6\sqrt{a^2 + b^2}\ \cos\alpha$$
$$d = 6\sqrt{a^2 + b^2}\ \operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -6\sqrt{a^2 + b^2}\ \operatorname{sen}\alpha$$

Sea $v = e + fi$ el número complejo que tiene por módulo $3m$ y argumento $\alpha + \frac{3\pi}{2}$.

$$e = 3\sqrt{a^2 + b^2}\ \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = 3\sqrt{a^2 + b^2}\ \operatorname{sen}\alpha$$
$$f = 3\sqrt{a^2 + b^2}\ \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = -3\sqrt{a^2 + b^2}\ \cos\alpha$$

102 Sea $z = r_\alpha$ un número complejo en forma polar y $\bar{z}$ su conjugado. Calcula el valor del cociente.

$$\frac{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos n\alpha}{(z+\bar{z}) \cdot [z^2 + (\bar{z})^2] \cdot \ldots \cdot [z^n + (\bar{z})^n]}$$

$$z = r_\alpha = r\,(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$$

$$\bar{z} = r_{360^\circ - \alpha} = r\,(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha)$$

$$\frac{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos n\alpha}{(z+\bar{z}) \cdot \left(z^2 + (\bar{z})^2\right) \cdot \ldots \cdot \left(z^n + (\bar{z})^n\right)} =$$

$$= \frac{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos n\alpha}{(r\,(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha) + r\,(\cos\alpha - i\,\text{sen}\,\alpha)) \cdot \ldots \cdot (r^n\,(\cos n\alpha + i\,\text{sen}\,n\alpha) + r^n\,(\cos n\alpha - i\,\text{sen}\,n\alpha))} =$$

$$= \frac{\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \ldots \cdot \cos n\alpha}{2r\cos\alpha \cdot 2r^2\cos 2\alpha \cdot 2r^n\cos n\alpha} = \frac{1}{2^n \cdot r^{\frac{n+n^2}{2}}}$$

103 Dada la ecuación $z^2 + (a + bi)z + c + di = 0$, con a, b, c y d números reales, encuentra la relación entre ellos para que sus raíces tengan el mismo argumento.

$$z^2 + (a+bi)z + c + di = 0$$

$$z = \frac{-a - bi \pm \sqrt{(a+bi)^2 - 4(c+di)}}{2} = \frac{-a - bi \pm \sqrt{a^2 - b^2 + 2abi - 4c - 4di}}{2}$$

Para que tengan el mismo argumento, el cociente entre la parte imaginaria y la parte entera debe ser el mismo.

$$a^2 - b^2 + 2abi - 4c - 4di = 0$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 - b^2 - 4c &= 0 \\ 2ab - 4d &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Como solo tenemos dos ecuaciones y cuatro incógnitas tenemos que dejar dos de las incógnitas en función de las otras.

$$a_1 = \frac{\left(\sqrt{2c^2 + 2d^2} + \sqrt{2}c\right)\sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} - c}}{d} \qquad b_1 = \sqrt{2\sqrt{c^2 + d^2} - 2c}$$

$$a_2 = -\frac{\left(\sqrt{2c^2 + 2d^2} + \sqrt{2}c\right)\sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} - c}}{d} \qquad b_2 = -\sqrt{2\sqrt{c^2 + d^2} - 2c}$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{\sqrt{c^2 + d^2} + c}\left(\sqrt{2c^2 + 2d^2} - \sqrt{2}c\right)i}{d} \qquad b_3 = -\sqrt{2\sqrt{c^2 + d^2} + 2ci}$$

$$a_4 = \frac{\sqrt{-\sqrt{c^2 + d^2} + c}\left(\sqrt{2c^2 + 2d^2} - \sqrt{2}c\right)i}{d} \qquad b_4 = \sqrt{2\sqrt{c^2 + d^2} + 2ci}$$

PARA FINALIZAR...

104 **Calcula la suma $\sum_{k=0}^{n} i^k$, expresando el resultado lo más simplificado posible.**

$$\sum_{k=0}^{n} i^k = i - 1 - i + 1 + \ldots + i^n$$

$$\text{Si } n = 4t,\ t \in \mathbb{N} \rightarrow \sum_{k=0}^{n} i^k = 1$$

$$\text{Si } n = 4t - 1,\ t \in \mathbb{N} \rightarrow \sum_{k=0}^{n} i^k = 0$$

$$\text{Si } n = 4t - 2,\ t \in \mathbb{N} \rightarrow \sum_{k=0}^{n} i^k = i - 1$$

$$\text{Si } n = 4t - 3,\ t \in \mathbb{N} \rightarrow \sum_{k=0}^{n} i^k = i$$

105 **Demuestra que si el número complejo z es una raíz del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y $c \in \mathbb{R}$, $\bar{z}$ es también una raíz.**

$$z = d + ei$$

$$\begin{aligned} P(d + ei) &= a(d + ei)^2 + b(d + ei) + c = a(d^2 - e^2 + 2dei) + bd + ebi + c = \\ &= ad^2 - ae^2 + 2adei + bd + ebi + c = 0 \end{aligned}$$

Por tanto, resulta que: $ad^2 - ae^2 + bd + c = 0$ $\quad$ $2adei + ebi = 0$

$$\begin{aligned} P(d - ei) &= a(d - ei)^2 + b(d - ei) + c = a(d^2 - e^2 - 2dei) + bd - ebi + c = \\ &= ad^2 - ae^2 - 2adei + bd - ebi + c = \\ &= ad^2 - ae^2 + bd + c - (2adei + ebi) = 0 \end{aligned}$$

106 **Halla un polinomio de cuarto grado con coeficientes reales, cuyas raíces sean $2i$ y $1 + i$.**

$$(x + 2i)(x - 2i)(x - (1 + i))(x - (1 - i)) \rightarrow x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + 8$$

107 **Obtén la suma y el producto de las raíces n-ésimas de la unidad.**

Sea $\sqrt[n]{1_0} = 1_{\frac{k \cdot 360°}{n}}$.

$$\text{La suma de las raíces es: } \frac{1_{\frac{360°}{n}} \cdot \left(\left(1_{\frac{360°}{n}}\right)^n - 1\right)}{\left(1_{\frac{360°}{n}} - 1\right)} = \frac{1_{\frac{360°}{n}} \cdot (1 - 1)}{\left(1_{\frac{360°}{n}} - 1\right)} = 0$$

El producto de las raíces es:

$$P_n = 1_{\frac{360°}{n}} \cdot 1_{\frac{2 \cdot 360°}{n}} \cdot \ldots \cdot 1_{\frac{n \cdot 360°}{n}} = 1_{\left(\frac{360°}{n} + \frac{2 \cdot 360°}{n} + \ldots + \frac{n \cdot 360°}{n}\right)} = 1_{\frac{360°}{n}(1+2+\ldots+n)} = 1_{\frac{360°}{n} \frac{(n+1)n}{2}} = -1$$

108 **Calcula las 5 soluciones complejas de esta ecuación.**

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

El primer término es la suma de los términos de una progresión geométrica.

$a_1 = 1, r = x \qquad S_5 = \dfrac{(x^6 - 1)}{x - 1}$

Por tanto, resulta que: $\dfrac{(x^6 - 1)}{x - 1} = 0 \rightarrow x^6 - 1 = 0 \rightarrow x = \sqrt[5]{1} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1_{60°} \\ x_3 = 1_{120°} \\ x_4 = 1_{180°} \\ x_5 = 1_{240°} \\ x_6 = 1_{300°} \end{cases}$

Las soluciones son: x_2, x_3, x_4, x_5 y x_6.

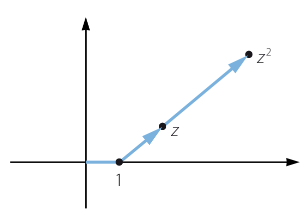
109 **Resuelve el sistema de ecuaciones con incógnitas *z* y *w*.**

$$\begin{cases} iz - (1+i)w = 3 \\ (2+i)z + iw = 4 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} iz - (1+i)w &= 3 \\ (2+i)z + iw &= 4 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} z &= \frac{w + iw + 3}{i} \\ z &= \frac{4 - iw}{2+i} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} z &= w - (w+3)i \\ z &= \frac{8 - w - (2w+4)i}{5} \end{aligned}\right\} \rightarrow w = \frac{1}{3} + 2i$$

$$z = \left(\frac{1}{3} + 2i\right) - \left(\left(\frac{1}{3} + 2i\right) + 3\right)i = \frac{7 - 4i}{3}$$

110 **Halla la expresión de *z* sabiendo que los afijos de los números complejos 1, *z* y z^2 están alineados.**



Las coordenadas de los números complejos son:

$A(1, 0) \qquad B(a, b) \qquad C(a^2 - b^2, 2ab)$

Calculamos los vectores:

$\overrightarrow{AB} = (a - 1, b) \qquad \overrightarrow{AC} = (a^2 - b^2 - 1, 2ab)$

Los puntos están alineados si los vectores son proporcionales.

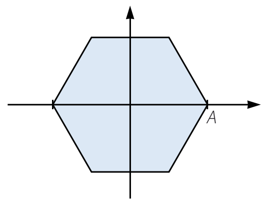
$\overrightarrow{AB} = t\,\overrightarrow{AC} \rightarrow (a - 1, b) = t\,(a^2 - b^2 - 1, 2ab)$

$$\left.\begin{aligned} a - 1 &= t(a^2 - b^2 - 1) \\ b &= t \cdot 2ab \end{aligned}\right\} \xrightarrow{t = \frac{1}{2a}} a - 1 = \left(\frac{1}{2a}\right)(a^2 - b^2 - 1)$$

$$\rightarrow a^2 - 2a + 1 = b \rightarrow b = a - 1$$

Por tanto, resulta que: $z = a + (a - 1)i$

111 Un hexágono regular está centrado en el origen de coordenadas y uno de sus vértices es el punto $A(1, 0)$.



Halla los vértices de otro hexágono regular con el mismo centro, lados paralelos al anterior y un área que es 5 veces mayor.

Si los dos polígonos son semejantes y la razón entre sus áreas es 5, la razón entre sus longitudes es $\sqrt{5}$.

Un vértice es el punto $\left(\sqrt{5},\ 0\right)$ y los otros vértices son $\sqrt{5}_{60°}$, $\sqrt{5}_{120°}$, $\sqrt{5}_{180°}$, $\sqrt{5}_{240°}$ y $\sqrt{5}_{300°}$.

Esto sería equivalente a calcular las raíces sextas de $\left(\sqrt{5}\right)^6 = 125$.