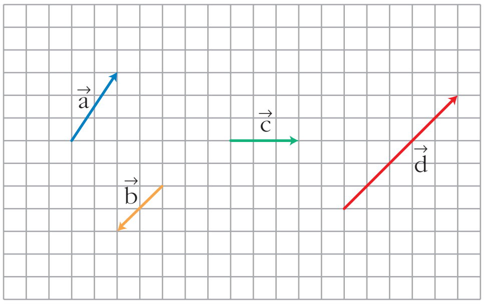
7 VECTORES

Página 171

REFLEXIONA Y RESUELVE

Multiplica vectores por números

■ **Copia en un papel cuadriculado los cuatro vectores siguientes:**



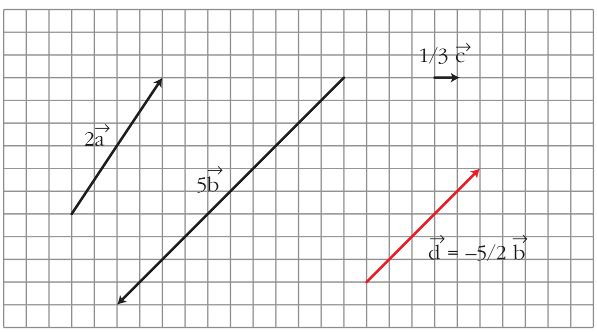
Representa:

a) $2\vec{a}$ **b)** $5\vec{b}$ **c)** $\frac{1}{3}\vec{c}$

Expresa el vector $\vec{d}$ como producto de uno de los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ o $\vec{c}$ por un número.

Designa los vectores anteriores mediante pares de números. Por ejemplo: $\vec{a}(2, 3)$

Repite con pares de números las operaciones que has efectuado anteriormente.



- $\vec{d} = -2{,}5\ \vec{b} = \frac{-5}{2}\ \vec{b}$
- $\vec{a}(2, 3)$

  $\vec{b}(-2, -2)$

  $\vec{c}(3, 0)$

  $\vec{d}(5, 5)$
- $2\vec{a} = 2(2, 3) = (4, 6)$

  $5\vec{b} = 5(-2, -2) = (-10, -10)$

  $\frac{1}{3}\ \vec{c} = \frac{1}{3}(3, 0) = (1, 0)$

Suma vectores

- **Efectúa gráficamente:**

a) $\vec{a} + \vec{c}$ **b)** $\vec{b} + \vec{c}$ **c)** $\vec{b} + \vec{a}$ **d)** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

siendo $\vec{a}$, $\vec{b}$ **y** $\vec{c}$ **los del ejercicio anterior.**

Realiza las mismas sumas con pares de números.

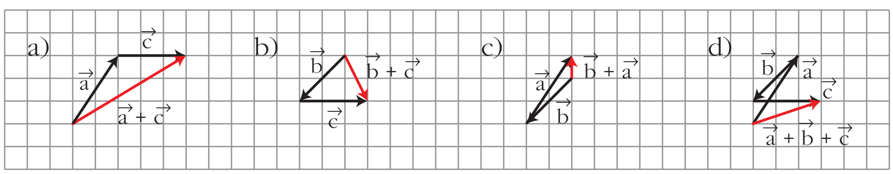
Por ejemplo: $\vec{a} + \vec{c} = (2, 3) + (3, 0) = (5, 3)$

a) $\vec{a} + \vec{c} = (2, 3) + (3, 0) = (5, 3)$

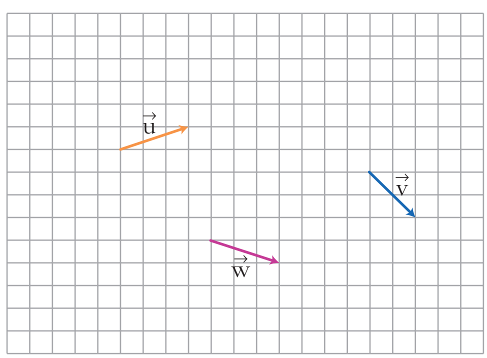
b) $\vec{b} + \vec{c} = (-2, -2) + (3, 0) = (1, -2)$

c) $\vec{b} + \vec{a} = (-2, -2) + (2, 3) = (0, 1)$

d) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2, 3) + (-2, -2) + (3, 0) = (3, 1)$



Combina operaciones



- **Con los vectores** $\vec{u}$, $\vec{v}$ **y** $\vec{w}$ **efectúa las siguientes operaciones gráficamente y mediante pares de números:**

a) $2\vec{u} + 3\vec{v}$ **b)** $-\vec{v} + 5\vec{w}$ **c)** $2\vec{u} + 3\vec{v} - 4\vec{w}$

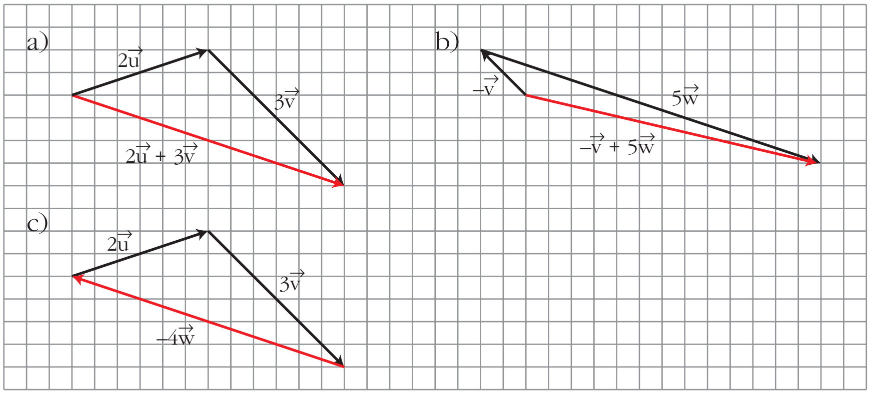
¿Cómo designarías al vector resultante de esta última operación?

a) $2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(3, 1) + 3(2, -2) = (6, 2) + (6, -6) = (12, -4)$

b) $-\vec{v} + 5\vec{w} = -(2, -2) + 5(3, -1) = (-2, 2) + (15, -5) = (13, -3)$

c) $2\vec{u} + 3\vec{v} - 4\vec{w} = 2(3, 1) + 3(2, -2) - 4(3, -1) = (6, 2) + (6, -6) + (-12, 4) = (0, 0)$

Vector nulo: $\vec{0}$



Página 175

1. Si $\vec{u}(-2, 5)$ y $\vec{v}(1, -4)$ son las coordenadas de dos vectores respecto de una base, halla las coordenadas respecto de la misma base de:

a) $2\vec{u} + \vec{v}$ **b)** $\vec{u} - \vec{v}$ **c)** $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$ **d)** $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$

a) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-2, 5) + (1, -4) = (-4, 10) + (1, -4) = (-3, 6)$

b) $\vec{u} - \vec{v} = (-2, 5) - (1, -4) = (-2, 5) + (-1, 4) = (-3, 9)$

c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = 3(-2, 5) + \frac{1}{3}(1, -4) = (-6, 15) + \left(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \left(\frac{-17}{3}, \frac{41}{3}\right)$

d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} = -\frac{1}{2}(-2, 5) - 2(1, -4) = \left(1, \frac{-5}{2}\right) + (-2, 8) = \left(-1, \frac{11}{2}\right)$

Página 176

1. Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cumplen que: $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = \frac{3}{2}$, $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 30°$. Calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b)** $\vec{v} \cdot \vec{u}$ **c)** $(-\vec{u}) \cdot \vec{v}$

d) $(3\vec{u}) \cdot (-5\vec{v})$ **e)** $\vec{u} \cdot \vec{u}$ **f)** $\vec{v} \cdot (-\vec{v})$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\, cos\,\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot cos\,30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

b) $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{3}$

c) $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3\sqrt{3}$

d) $(3\vec{u}) \cdot (-5\vec{v}) = 3(-5)(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -15 \cdot 3\sqrt{3} = -45\sqrt{3}$

e) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2\, cos\,0° = 16$

f) $\vec{v} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{v} \cdot \vec{v} = -|\vec{v}|^2 = -\frac{9}{4}$

2. **Si $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$, averigua el ángulo $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$. (Usa la calculadora).**

$$cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|} = \frac{-2}{3 \cdot 5} = -\frac{2}{15} \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 97°\ 39'\ 44''$$

3. **Halla $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u})$ y $\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{u})$ sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 120°$.**

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|\ |\vec{v}|\ cos\ 120° + |\vec{u}|\ |\vec{u}|\ cos\ 0° =$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot 3 = -\frac{15}{2} + 9 = \frac{3}{2}$$

$$\vec{v} \cdot (\vec{v} - \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} = 25 - \left(-\frac{15}{2}\right) = \frac{65}{2}$$

Página 178

4. **Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ mediante sus coordenadas respecto a una base ortonormal, $\vec{u}(3, -4)$, $\vec{v}(-1, 3)$, halla:**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ y $\vec{v} \cdot \vec{u}$

b) $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ y $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

c) El valor de k para que $(4, k)$ sea perpendicular a $\vec{v}$.

d) Un vector unitario perpendicular a $\vec{u}$.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -4) \cdot (-1, 3) = 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 = -15$

$\vec{v} \cdot \vec{u} = (-1, 3) \cdot (3, -4) = (-1) \cdot 3 + 3 \cdot (-4) = -15$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

$|\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$$cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|} = \frac{-15}{5\sqrt{10}} = -0{,}9486832981 \rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 161°\ 33'\ 54''$$

c) $(4, k) \perp (-1, 3) \rightarrow (4, k) \cdot (-1, 3) = 0 \rightarrow -4 + 3k = 0 \rightarrow k = \frac{4}{3}$

Para que $(4, k)$ sea perpendicular a $\vec{v}$, ha de ser $k = \frac{4}{3}$.

d) Un vector perpendicular a $\vec{u}(3, -4)$ es, por ejemplo, $(4, 3)$.

Un vector unitario paralelo a $(4, 3)$ es $\frac{1}{|(4, 3)|} \cdot (4, 3) = \frac{1}{5}(4, 3) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

Hay dos vectores unitarios perpendiculares a $(3, -4)$. Son $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ y $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

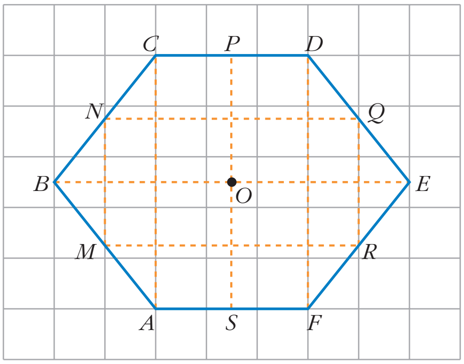
Página 182

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Los vectores y sus operaciones

1 **La figura *ABCDEF* es un hexágono.**



Compara el módulo, la dirección y el sentido de los siguientes pares de vectores:

a) $\overrightarrow{AB}$ **y** $\overrightarrow{BC}$ **b)** $\overrightarrow{FE}$ **y** $\overrightarrow{BC}$ **c)** $\overrightarrow{BM}$ **y** $\overrightarrow{DE}$ **d)** $\overrightarrow{OS}$ **y** $\overrightarrow{OE}$

a) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$. Tienen distinta dirección.

b) Los dos vectores tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo, luego: $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BC}$.

c) $|\overrightarrow{BM}| = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$. Tienen la misma dirección y el mismo sentido.

Luego: $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$.

d) $|\overrightarrow{OS}| < |\overrightarrow{OE}|$. Sus direcciones son perpendiculares: $\overrightarrow{OS} \perp \overrightarrow{OE}$.

2 **Busca en la figura del ejercicio 1 tres vectores iguales a** $\overrightarrow{NC}$ **y otros tres iguales a** $\overrightarrow{AS}$**.**

$\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{FR} = \overrightarrow{RE}$

$\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SF} = \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PD}$

3 **Sustituye los puntos suspensivos por un número, de forma que estas igualdades sean verdaderas para el hexágono del ejercicio 1:**

a) $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CP}$ **b)** $\overrightarrow{MN} = \ldots\overrightarrow{AC}$ **c)** $\overrightarrow{OP} = \ldots\overrightarrow{OS}$ **d)** $\overrightarrow{NB} = \ldots\overrightarrow{BC}$

a) $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CP}$ b) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OS}$ d) $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

4 **Completa las igualdades siguientes con las letras que faltan para que, en el hexágono del ejercicio 1, sean verdaderas:**

a) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{B\ldots} = \overrightarrow{AE}$ **b)** $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{\ldots C} = \overrightarrow{SF}$

c) $\overrightarrow{O\ldots} + \overrightarrow{SO} = \overrightarrow{FD}$ **d)** $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{AB}$

a) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AE}$ b) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{SF}$

c) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{SO} = \overrightarrow{FD}$ d) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$

5 **Observa el rombo de la figura y calcula:**

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

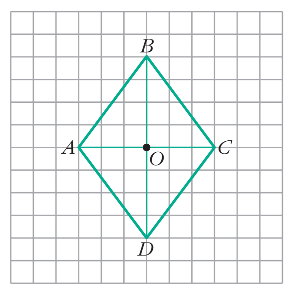
b) $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

f) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CA}$

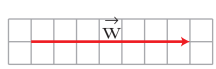


Expresa los resultados utilizando los vértices del rombo.

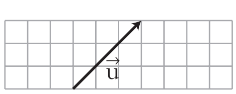
a) $\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD}$

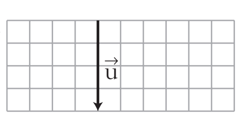
d) $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $2\overrightarrow{DC}$

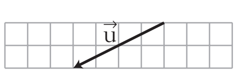
6 **Considera el vector $\vec{w}$:**

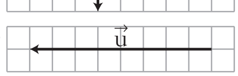


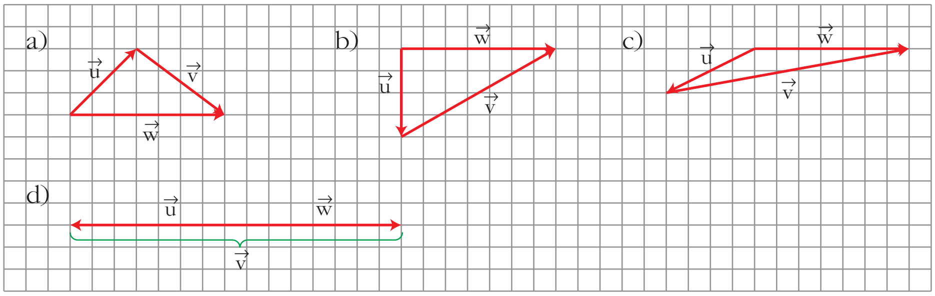
Dibuja en cada uno de estos casos un vector $\vec{v}$ que sumado con $\vec{u}$ dé como resultado $\vec{w}$:

a) 

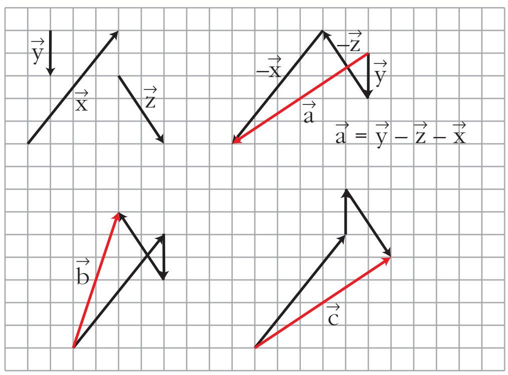
b) 

c) 

d) 



7 **Los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ los hemos obtenido operando con los vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$. ¿Qué operaciones hemos hecho en cada caso?**



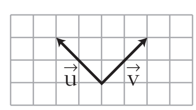
$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$ $\vec{c} = \vec{x} - \vec{y} + \vec{z}$

Bases y coordenadas

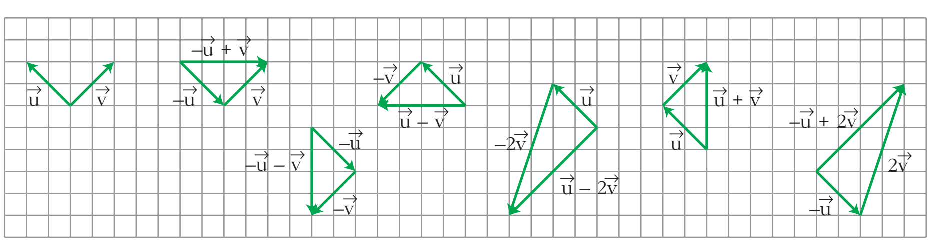
8 **A la vista de la figura, dibuja los vectores:**

$-\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$,

$-\vec{u} - \vec{v}$, $-\vec{u} + 2\vec{v}$, $\vec{u} - 2\vec{v}$



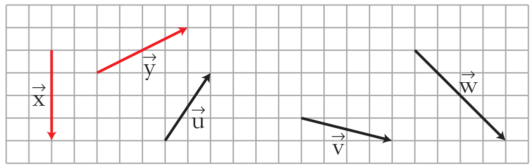
Si tomamos como base $(\vec{u}, \vec{v})$, ¿cuáles son las coordenadas de los vectores que has dibujado?



$-\vec{u} + \vec{v} = (-1, 1)$ $\vec{u} - \vec{v} = (1, -1)$ $\vec{u} + \vec{v} = (1, 1)$

$-\vec{u} - \vec{v} = (-1, -1)$ $-\vec{u} + 2\vec{v} = (-1, 2)$ $\vec{u} - 2\vec{v} = (1, -2)$

9 **Escribe los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.**



¿Cuáles serán las coordenadas de esos vectores respecto a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$?

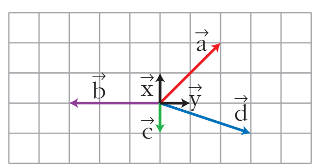
$\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{y}$, luego $\vec{u} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ respecto de $B(\vec{x}, \vec{y})$.

$\vec{v} = \frac{3}{4}\vec{x} + \vec{y}$, luego $\vec{v} = \left(\frac{3}{4}, 1\right)$ respecto de $B(\vec{x}, \vec{y})$.

$\vec{w} = \frac{3}{2}\vec{x} + \vec{y}$, luego $\vec{w} = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$ respecto de $B(\vec{x}, \vec{y})$.

Página 183

10 **Escribe las coordenadas de los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, con respecto a la base $B(\vec{x}, \vec{y})$.**



$\vec{a} = (2, 2)$; $\vec{b} = (0, -3)$; $\vec{c} = (-1, 0)$; $\vec{d} = (-1, 3)$

11 **En una base ortonormal las coordenadas de un vector son $\vec{v}(2, -5)$. Halla las coordenadas de $\vec{v}$ en la base $B = \{(1, -1), (0, -1)\}$.**

$$\left.\begin{array}{l}\vec{x}(1, -1)\\ \vec{y}(0, -1)\\ \vec{v}(2, -5)\end{array}\right\} \begin{array}{l}\vec{v} = a\vec{x} + b\vec{y}\\ (2, -5) = a(1, -1) + b(0, -1) = (a, -a) + (0, -b) = (a, -a - b)\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}2 = a\\ -5 = -a - b\end{array}\right\} \begin{array}{l}a = 2\\ b = +3\end{array}$$

Las coordenadas de $\vec{v}$ en la nueva base son (2, 3).

12 **Si las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son (3, –5) y (–2, 1), obtén las coordenadas de:**

a) $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ **b)** $-\vec{u} - \frac{3}{5}\vec{v}$ **c)** $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$

a) $-2(3, -5) + \frac{1}{2}(-2, 1) = (-6, 10) + \left(-1, \frac{1}{2}\right) = \left(-7, \frac{21}{2}\right)$

b) $-(3, -5) - \frac{3}{5}(-2, 1) = (-3, 15) + \left(\frac{6}{5}, \frac{-3}{5}\right) = \left(\frac{-9}{5}, \frac{72}{5}\right)$

c) $\frac{1}{2}\left[(3, -5) + (-2, 1)\right] - \frac{2}{3}\left[(3, -5) - (-2, 1)\right] = \frac{1}{2}(1, -4) - \frac{2}{3}(5, -6) =$

$$= \left(\frac{1}{2}, -2\right) + \left(\frac{-10}{3}, 4\right) = \left(\frac{-17}{6}, 2\right)$$

13 **Halla el vector $\vec{b}$ tal que $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, siendo $\vec{a}(-1, 3)$ y $\vec{c}(7, -2)$.**

$$(7, -2) = 3(-1, 3) - \frac{1}{2}(b_1, b_2) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 7 = -3 - (1/2)b_1 \rightarrow b_1 = -20 \\ -2 = 9 - (1/2)b_2 \rightarrow b_2 = 22 \end{array}\right\}$$

$\vec{b}(-20, 22)$

14 **Dados los vectores $\vec{a}(3, -2)$, $\vec{b}(-1, 2)$ y $\vec{c}(0, -5)$, calcula m y n de modo que: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.**

$$(0, -5) = m(3, -2) + n(-1, 2) \rightarrow \begin{cases} 0 = 3m - n \\ -5 = -2m + 2n \end{cases}$$

Resolvemos el sistema:

Despejando en la primera ecuación, $n = 3m$, y sustituyendo en la segunda:

$$-5 = -2m + 6m \rightarrow -5 = 4m \rightarrow m = \frac{-5}{4} \rightarrow n = \frac{-15}{4}$$

15 **Expresa el vector $\vec{a}(-1, -8)$ como combinación lineal de $\vec{b}(3, -2)$ y $\vec{c}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$.**

☛ ***Calcula m y n tales que $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.***

$$(-1, -8) = m(3, -2) + n\left(4, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} -1 = 3m + 4n \\ -8 = -2m - \frac{1}{2}n \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por reducción (por ejemplo).

Para ello, multiplicamos la segunda ecuación por 8 (en los dos miembros) y sumamos miembro a miembro las dos:

$$\begin{array}{rl} -1 = & 3m + 4n \\ -64 = & -16m - 4n \\ \hline -65 = & -13m \;\rightarrow\; m = \dfrac{-65}{-13} = 5 \end{array}$$

Sustituyendo en una de las dos ecuaciones y despejando n:

$-1 = 3m + 4n \;\rightarrow\; -1 = 3 \cdot (5) + 4n \;\rightarrow\; -16 = 4n \;\rightarrow\; n = -4$

Así, podemos decir: $\vec{a} = 5\vec{b} - 4\vec{c}$

16 **¿Cuáles de los siguientes pares de vectores forman una base?**

a) $\vec{u}(3, -1)$, $\vec{v}(1, 3)$ **b)** $\vec{u}(2, 6)$, $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

a) Sí, tienen distinta dirección ($\vec{u} \neq k\vec{v}$ para cualquier k). Basta con representarlos gráficamente para comprobarlo.

b) No, pues tienen la misma dirección ($\vec{u} = 3\vec{v}$).

Producto escalar. Módulo y ángulo

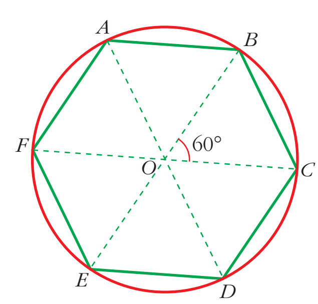
17 **En una circunferencia de centro O y de radio 2 cm, se inscribe un hexágono regular de vértices A, B, C, D, E, F. Calcula los productos:**

a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ **b)** $\vec{OA} \cdot \vec{OC}$

c) $\vec{AB} \cdot \vec{ED}$ **d)** $\vec{BC} \cdot \vec{EF}$

a) $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| \cdot |\vec{OB}| \cos(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}}) = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60° = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$

b) $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 120° = 2 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$



c) $\vec{AB} \cdot \vec{ED} \overset{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot \cos 0° \overset{(*)}{=} 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

(*) OAB es un triángulo equilátero, luego:

$$|\vec{AB}| = |\vec{OA}| = 2$$

Razonamos igual para $|\vec{ED}|$.

d) $\vec{BC} = -\vec{EF}$ (mismo módulo, misma dirección y sentido opuesto)

Luego: $\vec{BC} \cdot \vec{EF} = 2 \cdot 2 \cdot \cos 180° = 2 \cdot 2 \cdot (-1) = -4$

18 **Dados los vectores $\vec{x}(5, -2)$, $\vec{y}(0, 3)$, $\vec{z}(-1, 4)$, calcula:**

a) $\vec{x} \cdot \vec{y}$ **b)** $\vec{x} \cdot \vec{z}$ **c)** $\vec{y} \cdot \vec{z}$

a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = (5, -2) \cdot (0, 3) = -6$

b) $\vec{x} \cdot \vec{z} = (5, -2) \cdot (-1, 4) = -5 - 8 = -13$

c) $\vec{y} \cdot \vec{z} = (0, 3) \cdot (-1, 4) = 12$

19 **Calcula k para que el producto $\vec{u} \cdot \vec{v}$ sea igual a 0 en los siguientes casos:**

a) $\vec{u}(6, k)$, $\vec{v}(-1, 3)$ **b)** $\vec{u}\left(\frac{1}{5}, -2\right)$, $\vec{v}(k, 3)$ **c)** $\vec{u}(-3, -2)$, $\vec{v}(5, k)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (6, k) \cdot (-1, 3) = 0 \rightarrow -6 + 3k = 0 \rightarrow k = 2$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{1}{5}, -2\right) \cdot (k, 3) = 0 \rightarrow \frac{k}{5} - 6 = 0 \rightarrow k = 30$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, -2) \cdot (5, k) = 0 \rightarrow -15 - 2k = 0 \rightarrow k = -\frac{15}{2}$

20 **Dados $\vec{u}(2, 3)$, $\vec{v}(-3, 1)$ y $\vec{w}(5, 2)$, calcula:**

a) $(3\vec{u} + 2\vec{v})\vec{w}$

b) $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$

c) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

d) $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v})$

☛ ***a) Halla primero las coordenadas de $3\vec{u} + 2\vec{v}$.***

c) Efectúa $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Multiplica el resultado (un número) por el vector $\vec{w}$. Obtendrás un vector.

a) $3\vec{u} + 2\vec{v} = 3(2, 3) + 2(-3, 1) = (6, 9) + (-6, 2) = (0, 11)$

$(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w} = (0, 11) \cdot (5, 2) = 0 \cdot 5 + 11 \cdot 2 = 0 + 22 = 22$

b) $\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{w} = (2, 3) \cdot (5, 2) = 10 + 6 = 16 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = (-3, 1) \cdot (5, 2) = -15 + 2 = -13 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w} = 16 - (-13) = 16 + 13 = 29$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, 3) \cdot (-3, 1) = -6 + 3 = -3$

$(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} = -3(5, 2) = (-15, -6)$

d) $\vec{v} \cdot \vec{v} = (-3, 1) \cdot (-3, 1) = 9 + 1 = 10$

$\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = (2, 3) \cdot 10 = (20, 30)$

21 **Halla el módulo de cada uno de los siguientes vectores:**

$\vec{u}(3, 2)$ **$\vec{v}(-2, 3)$** **$\vec{w}(-8, -6)$**

$\vec{z}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **$\vec{t}(5, 0)$** **$\vec{r}(1, 1)$**

$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$ $\quad |\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$|\vec{w}| = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = 10$ $\quad |\vec{z}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$

$|\vec{t}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5$ $\quad |\vec{r}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

22 **Halla el valor de m para que el módulo del vector $\vec{u}\left(\frac{3}{5}, m\right)$ sea igual a 1.**

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + m^2} = 1 \rightarrow \frac{9}{25} + m^2 = 1 \rightarrow m^2 = \frac{16}{25} \begin{cases} m_1 = \frac{4}{5} \\ m_2 = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

23 **Calcula x, de modo que el producto escalar de $\vec{a}(3, -5)$ y $\vec{b}(x, 2)$ sea igual a 7. ¿Qué ángulo forman los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$?**

$(3, -5) \cdot (x, 2) = 7 \rightarrow 3x - 10 = 7 \rightarrow x = \frac{17}{3}$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{7}{\left(\sqrt{3^2 + (-5)^2}\right)\left(\sqrt{(17/3)^2 + 2^2}\right)} \rightarrow \alpha = 78°\ 28'\ 34{,}6''$$

24 **Halla el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:**

a) $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(1, -5)$

b) $\vec{m}(4, 6)$, $\vec{n}(3, -2)$

c) $\vec{a}(1, 6)$, $\vec{b}\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$

a) Utilizamos las dos expresiones para calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 1 + 2(-5) = -7$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Igualando las dos expresiones, se tiene:

$$-7 = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{-7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = -0{,}38$$

Luego: $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 112°\ 22'\ 48''$

b) Despejando directamente en la definición:

$\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) \rightarrow$

$\rightarrow \cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \dfrac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}|\,|\vec{n}|} = \dfrac{4 \cdot 3 + 6 \cdot (-2)}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}} = \dfrac{0}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}} = 0$

de donde: $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = 90°$ (basta con ver que $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$)

c) $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \dfrac{-1/2 - 18}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{37/2}} = \dfrac{-37/2}{\left(37\sqrt{2}\right)/2} = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Luego: $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 135°$

25 **Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcula k de modo que:**

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$.

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \rightarrow -20 - 2k = 0 \rightarrow k = -10$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{34} \rightarrow 25 + k^2 = 34 \rightarrow k^2 = 9 \rightarrow k = \pm 3$

Hay, pues, dos soluciones.

26 **Dado el vector $\vec{u}(6, -8)$, determina:**

a) Los vectores unitarios (módulo 1) de la misma dirección que $\vec{u}$.

b) Los vectores ortogonales a $\vec{u}$ que tengan el mismo módulo que $\vec{u}$.

c) Los vectores unitarios y ortogonales a $\vec{u}$.

☛ ***Mira el problema resuelto número 4.***

a) Calculamos: $|\vec{u}| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$

Los vectores de la misma dirección que $\vec{u}$ y de módulo 1 son:

$\vec{v}_1 = \dfrac{1}{10}(6, -8) = \left(\dfrac{3}{5}, -\dfrac{4}{5}\right)$

$\vec{v}_2 = \dfrac{1}{10}(-6, 8) = \left(-\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$

b) Se obtienen permutando las coordenadas de $\vec{u}$ y cambiando el signo de una de ellas.

$\vec{v}_1 = (8, 6)$

$\vec{v}_2 = (-8, -6)$

También se pueden hallar expresando analíticamente las dos condiciones y resolviendo el sistema que obtenemos:

$\vec{v} \perp \vec{u} \to (x, y) \cdot (6, -8) = 0 \to 6x - 8y = 0 \to x = \frac{8y}{6} = \frac{4}{3}y$

$|\vec{v}| = |\vec{u}| \to \sqrt{x^2 + y^2} = 10 \to x^2 + y^2 = 100$

$\left(\frac{4}{3}y\right)^2 + y^2 = 100 \to \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 100 \to \frac{25}{9}y^2 = 100 \to y^2 = 36 \to y = \pm 6$

- Si $y_1 = 6 \to x_1 = \frac{4}{3}6 = 8 \to \vec{v}_1\,(8, 6)$
- Si $y_2 = -6 \to x_2 = -8 \to \vec{v}_2\,(-8, -6)$

c) Teniendo en cuenta a) y b), haremos:

$\vec{v}_1 = \frac{1}{10}(8, 6) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$

$\vec{v}_2 = \frac{1}{10}(-8, -6) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$

O bien, resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} |\vec{v}| = 1 \to \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \to x^2 + y^2 = 1 \\ \vec{u} \perp \vec{v} \to 6x - 8y = 0 \to x = \frac{8y}{6} = \frac{4y}{3} \end{array}\right\} \to$$

$\to \left(\frac{4y}{3}\right)^2 + y^2 = 1 \to \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 1 \to \frac{25}{9}y^2 = 1 \to y^2 = \frac{25}{9} \to y = \pm\frac{3}{5}$

- Si $y_1 = \frac{3}{5} \to x_1 = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$
- Si $y_2 = \frac{-3}{5} \to x_2 = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{-4}{5}$

Así, $\vec{v}_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \quad \vec{v}_2\left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}\right)$

Página 184

PARA RESOLVER

27 Halla las coordenadas de un vector $\vec{v}(x, y)$, ortogonal a $\vec{u}(3, 4)$ y que mida el doble que $\vec{u}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \perp \vec{v} \to \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \to 3x + 4y = 0 \\ |\vec{v}| = 2|\vec{u}| \to \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{9 + 16} = 2\sqrt{25} = 10 \to x^2 + y^2 = 100 \end{array}\right\}$$

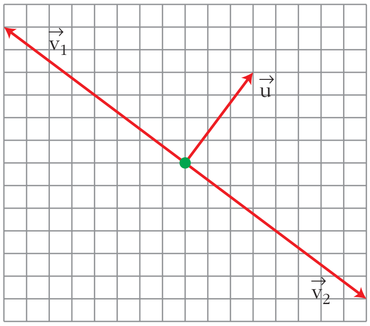
Resolvemos el sistema:

Despejamos x en la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$x = \frac{-4}{3}y \rightarrow \left(\frac{-4}{3}y\right)^2 + y^2 = 100 \rightarrow \frac{16}{9}y^2 + y^2 = 100 \rightarrow \frac{25}{9}y^2 = 100 \rightarrow y = \pm 6$$

Si $y_1 = 6 \rightarrow x_1 = \frac{-4}{3} \cdot 6 = -8 \rightarrow \vec{v}_1\,(-8, 6)$

Si $y_2 = -6 \rightarrow x_2 = \frac{-4}{3} \cdot (-6) = 8 \rightarrow \vec{v}_2\,(8, -6)$



El problema tiene dos posibles soluciones, tales que:

$$\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$$

28 **Dados $\vec{a}(2, 1)$ y $\vec{b}(6, 2)$, halla un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{v} \cdot \vec{a} = 1$ y $\vec{v} \perp \vec{b}$.**

$$\left.\begin{array}{l}(x, y) \cdot (2, 1) = 1 \rightarrow 2x + 2y = 1 \\ (x, y) \cdot (6, 2) = 0 \rightarrow 6x + 2y = 0\end{array}\right\}\ \text{Resolvemos el sistema:}$$

Multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por (–1) y sumamos miembro a miembro:

$$\begin{array}{r}-2x - 2y = -1 \\ 6x + 2y = 0 \\ \hline 4x \qquad = -1\end{array} \rightarrow x = \frac{-1}{4}$$

Sustituimos en una ecuación, por ejemplo en la segunda, y despejamos la otra incógnita:

$$6x + 2y = 0 \rightarrow 6 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + 2y = 0 \rightarrow 2y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{4}$$

Así, nuestro vector será: $\vec{v}\left(\frac{-1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

29 **Siendo $\vec{u}(5, -b)$ y $\vec{v}(a, 2)$, halla a y b, sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales y que $|\vec{v}| = \sqrt{13}$.**

Si $\vec{u} \perp \vec{v}$, entonces $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (5, -b) \cdot (a, 2) = 0 \rightarrow 5a - 2b = 0$

Si $|\vec{v}| = \sqrt{13}$, entonces $\sqrt{a^2 + 2^2} = \sqrt{13} \rightarrow a^2 + 4 = 13$

Resolvemos el sistema:

$$a^2 + 4 = 13 \rightarrow a = \pm 3$$

Entonces: Si $a = 3 \rightarrow b = \frac{5a}{2} = \frac{15}{2}$

Si $a = -3 \rightarrow b = \frac{5a}{2} = \frac{-15}{2}$

Luego hay dos posibles soluciones: $\vec{u}\left(5, \dfrac{-15}{2}\right), \ \vec{v}\,(3, 2)$

O bien: $\vec{u}\left(5, \dfrac{15}{2}\right), \ \vec{v}\,(-3, 2)$

30 **Dados los vectores $\vec{a} = 2\vec{u} - \vec{v}$ y $\vec{b} = -3\vec{u} + k\vec{v}$, siendo $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-3, 0)$, halla k de modo que $(\vec{a} + \vec{b})$ sea ortogonal a $(\vec{a} - \vec{b})$.**

☛ ***Escribe las coordenadas de $(\vec{a} + \vec{b})$ y $(\vec{a} - \vec{b})$.***

Si $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$, entonces $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$. Obtendrás una ecuación cuya incógnita es k.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} = 2(2, 3) - (-3, 0) = (7, 6) \\ \vec{b} = -3(2, 3) + k(-3, 0) = (-6 - 3k, -9) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \vec{a} + \vec{b} = (1 - 3k, -3) \\ \vec{a} - \vec{b} = (13 + 3k, 15) \end{array}\right.$$

Ahora, como el producto escalar de ambos vectores debe ser 0, por ser ortogonales:

$(1 - 3k, -3) \cdot (13 + 3k, 15) = 0 \ \rightarrow \ (1 - 3k)(13 + 3k) + (-3) \cdot 15 = 0$

$13 + 3k - 39k - 9k^2 - 45 = 0 \ \rightarrow \ 9k^2 + 36k + 32 = 0$

$$k = \frac{-36 \pm \sqrt{1\,296 - 1\,152}}{18} = \frac{-36 \pm \sqrt{144}}{18} =$$

$$= \frac{-36 \pm 12}{18} = \begin{cases} -24/18 = -4/3 = k_1 \\ -48/18 = -8/3 = k_2 \end{cases}$$

31 **Halla el valor que debe tener k para que los vectores $\vec{x} = k\vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{y} = k\vec{a} - \vec{b}$ sean perpendiculares, siendo $\vec{a}(3/2, 4)$ y $\vec{b}(5, 0)$.**

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x} = k\left(\dfrac{3}{2}, 4\right) + (5, 0) = \left(\dfrac{3k}{2} + 5, 4k\right) \\[2ex] \vec{y} = k\left(\dfrac{3}{2}, 4\right) - (5, 0) = \left(\dfrac{3k}{2} - 5, 4k\right) \\[2ex] \text{Como queremos } \vec{x} \perp \vec{y} \ \Rightarrow \ \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \end{array}\right\} \text{ Entonces:}$$

$$\left(\frac{3k}{2} + 5, 4k\right) \cdot \left(\frac{3k}{2} - 5, 4k\right) = 0 \ \rightarrow \ \left(\frac{3k}{2} + 5\right)\left(\frac{3k}{2} - 5\right) + (4k)(4k) = 0 \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \ \frac{9k^2}{4} - 25 + 16k^2 = 0 \ \rightarrow \ \frac{73}{4}k^2 = 25 \ \rightarrow \ k = \pm\frac{10}{\sqrt{73}} \ \text{ (dos soluciones)}$$

32 **Dados los vectores $\vec{u}(k, -6)$ y $\vec{v}(3, h)$, calcula k y h de modo que $|\vec{u}| = 10$ y $\vec{u} \perp \vec{v}$.**

$$|\vec{u}| = \sqrt{k^2 + (-6)^2} = 10 \to k^2 + 36 = 100 \to k^2 = 64 \to$$
$$\to k = \pm 8 \text{ (dos soluciones)}$$

- Si $k = 8 \to \vec{u}(8, -6);\ \vec{u} \perp \vec{v} \to (8, -6) \cdot (3, h) = 0 \to 24 - 6h = 0 \to h = 4$
- Si $k = -8 \to \vec{u}(-8, -6);\ \vec{u} \perp \vec{v} \to (-8, -6) \cdot (3, h) = 0 \to -24 - 6h = 0 \to$
$\to h = -4$

33 **Calcula las coordenadas de un vector $\vec{u}$ tal que $|\vec{u}| = 1$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ siendo $\vec{v}(2, 1)$.**

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}(a, b) \to |\vec{u}| = 1 \to \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \to (a, b) \cdot (2, 1) = 1 \to 2a + b = 1 \end{array}\right\} \text{Resolvemos el sistema:}$$

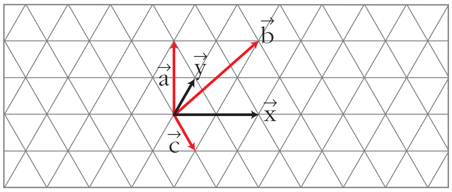
$b = 1 - 2a \to a^2 + (1 - 2a)^2 = 1 \to a^2 + 1 + 4a^2 - 4a = 1 \to 5a^2 - 4a = 0$

$a = 0 \to b = 1$

$a = \dfrac{4}{5} \to b = -\dfrac{3}{5}$

Soluciones: $\vec{u}_1(0, 1)$ y $\vec{u}_2\left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$

34 **Expresa los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ como combinación lineal de $\vec{x}$ e $\vec{y}$.**



$$\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y} \qquad \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{x} + 2\vec{y} \qquad \vec{c} = \frac{1}{2}\vec{x} - \vec{y}$$

35 **De los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sabemos que $|\vec{a}| = 3$ y $|\vec{b}| = 5$ y que forman un ángulo de 120°. Calcula $|\vec{a} - \vec{b}|$.**

☛ ***Mira el problema resuelto número 8.***

Como: $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|\ |\vec{v}|\ \cos 0° = |\vec{v}|^2 \cdot 1 = |\vec{v}|^2$

entonces podemos decir que:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$
$$= |\vec{a}|^2 - 2\ |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 =$$
$$= 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos 120° + 5^2 = 9 - 30 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 25 = 49$$

Luego: $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$

36 **Si $|\vec{u}| = 3$ y $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = -11$, halla $|\vec{v}|$.**

☛ ***$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v} = -11$.***

Como $\vec{u}\cdot\vec{u} = |\vec{u}|^2 = 9$, calcula $|\vec{v}|$.

$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - \vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = -11$

Como $|\vec{u}| = 3$, se tiene que:

$3^2 - |\vec{v}|^2 = -11 \to |\vec{v}|^2 = 20 \to |\vec{v}| = \sqrt{20}$

37 **Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 5$ y $\vec{u}\perp\vec{v}$, halla $|\vec{u}+\vec{v}|$ y $|\vec{u}-\vec{v}|$.**

$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} =$

$\overset{(*)}{=} |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \to |\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{34}$

$^{(*)}\ \vec{u}\perp\vec{v} \to \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

$|\vec{u}-\vec{v}|^2 = (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{v} =$

$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 3^2 + 5^2 = 34 \to |\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{34}$

38 **Sea $B(\vec{x}, \vec{y})$ una base ortonormal. Calcula $|\vec{x}+\vec{y}|$ y $|\vec{x}-\vec{y}|$.**

☛ ***Mira el problema resuelto número 7.***

$|\vec{x}+\vec{y}|^2 = (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{x} + 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{y} = |\vec{x}| + 0 + |\vec{y}| = 2 \to |\vec{x}+\vec{y}| = \sqrt{2}$

$|\vec{x}-\vec{y}|^2 = (\vec{x}-\vec{y})\cdot(\vec{x}-\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{x} - 2\vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{y} = |\vec{x}| - 0 + |\vec{y}| = 2 \to |\vec{x}-\vec{y}| = \sqrt{2}$

39 **Si $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 3$ y $|\vec{u}+\vec{v}| = 5$, ¿qué ángulo forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$?**

Razonando como en el problema resuelto número 7, llegamos a:

$$|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\,|\vec{u}|\,|\vec{v}|\,\cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + |\vec{v}|^2$$

Sustituyendo los valores conocidos:

$$5^2 = 4^2 + 2\cdot 4\cdot 3\cdot \cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + 3^2$$

$$25 = 16 + 24\cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + 9$$

$$\cos\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \frac{25-25}{24} = 0 \to \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 90°$$

40 **Calcula x para que los vectores $\vec{a}(7, 1)$ y $\vec{b}(1, x)$ formen un ángulo de 45°.**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 + x = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ cos\ 45° \ \rightarrow$

$\rightarrow\ 7 + x = \sqrt{50} \cdot \sqrt{1 + x^2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \rightarrow$

$\rightarrow\ 14 + 2x = \sqrt{100(1 + x^2)} \ \rightarrow\ \dfrac{14 + 2x}{10} = \sqrt{1 + x^2} \ \rightarrow$

$\rightarrow\ \dfrac{7 + x}{5} = \sqrt{1 + x^2} \ \rightarrow\ \dfrac{49 + x^2 + 14x}{25} = 1 + x^2 \ \rightarrow$

$\rightarrow\ 49 + x^2 + 14x = 25 + 25x^2 \ \rightarrow\ 24x^2 - 14x - 24 = 0 \ \rightarrow$

$\rightarrow\ 12x^2 - 7x - 12 = 0 \ \rightarrow\ x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 + 576}}{24} \ \begin{cases} x_1 = 4/3 \\ x_2 = -3/4 \end{cases}$

41 **Calcula x para que $\vec{a}(3, x)$ y $\vec{b}(5, 2)$ formen un ángulo de 60°.**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ cos\ 60°$

$15 + 2x = \sqrt{9 + x^2} \cdot \sqrt{29} \cdot \dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ 30 + 4x = \sqrt{29(9 + x^2)} \ \rightarrow$

$\rightarrow\ 900 + 16x^2 + 240x = 29(9 + x^2) \ \rightarrow\ 13x^2 + 240x - 639 = 0$

$x = \dfrac{-240 \pm \sqrt{57\,600 + 33\,228}}{26} = \dfrac{-240 \pm \sqrt{90\,828}}{26} =$

$= \dfrac{-240 \pm 301{,}4}{26} \ \begin{cases} x_1 = -2{,}36 \\ x_2 = 20{,}82 \end{cases}$

42 **Halla las coordenadas de cierto vector $\vec{x}$, sabiendo que forma un ángulo de 60° con $\vec{a}(2, 4)$ y que los módulos de ambos son iguales.**

$\left.\begin{array}{l} |\vec{a}| = \sqrt{20} = |\vec{x}| \\ \text{Sea } \vec{x}(m, n) \end{array}\right\} \ \rightarrow\ \vec{a} \cdot \vec{x} = |\vec{a}|\ |\vec{x}|\ cos\ 60° \ \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} 2m + 4n = \sqrt{20} \cdot \sqrt{20} \cdot \dfrac{1}{2} \ \rightarrow\ 2m + 4n = 10 \\ \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{20} \ \rightarrow\ m^2 + n^2 = 20 \end{cases}$

Resolvemos el sistema:

$$m = \frac{10 - 4n}{2} = 5 - 2n$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$(5 - 2n)^2 + n^2 = 20 \ \rightarrow\ 25 + 4n^2 - 20n + n^2 = 20 \ \rightarrow\ n^2 - 4n + 1 = 0$

$n = \dfrac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} \ \begin{cases} n_1 = 0{,}27 \\ n_2 = 3{,}73 \end{cases}$

- Si $n_1 = 0{,}27 \ \rightarrow\ m_1 = 5 - 2 \cdot 0{,}27 = 4{,}46 \ \rightarrow\ \vec{x}_1 = (4{,}46;\ 0{,}27)$
- Si $n_2 = 3{,}73 \ \rightarrow\ m_2 = 5 - 2 \cdot 3{,}73 = -2{,}46 \ \rightarrow\ \vec{x}_2 = (-2{,}46;\ 3{,}73)$

43 **Determina un vector $\vec{a}$ que forme con $\vec{b}(-1, -2)$ un ángulo de 30° y tal que $|\vec{a}| = \sqrt{3}\,|\vec{b}|$.**

Sea $\vec{a}(x, y) \to \begin{cases} -x - 2y = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos 30° \\ \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} \end{cases} \to$

$\to \begin{cases} -x - 2y = \left(\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}\right) \cdot \sqrt{5} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ x^2 + y^2 = 15 \end{cases} \to \begin{cases} -x - 2y = \dfrac{15}{2} \\ x^2 + y^2 = 15 \end{cases}$

Resolvemos el sistema:

$$x = -2y - \frac{15}{2}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación:

$\left(4y^2 + \dfrac{225}{4} + 30y\right) + y^2 = 15 \;\to\; 5y^2 + 30y + \dfrac{165}{4} = 0$

$20y^2 + 120y + 165 = 0 \;\to\; 4y^2 + 24y + 33 = 0$

$y = \dfrac{-24 \pm \sqrt{576 - 528}}{8} = \dfrac{-24 \pm 4\sqrt{3}}{8} = -3 \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Así: $\vec{a}\left(\dfrac{-3}{2} - \sqrt{3}, -3 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ o $\vec{a} = \left(\dfrac{-3}{2} + \sqrt{3}, -3 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

44 **Dados los vectores $\vec{u}(1, 3)$ y $\vec{v}(6, 4)$, halla la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.**

☛ ***Sabes que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot proy_{\vec{u}}\, (\vec{v})$.***

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot$ (proy. de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$)

(proy. de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$) $= \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \dfrac{6 + 12}{\sqrt{10}} = \dfrac{18}{\sqrt{10}} = \dfrac{18\sqrt{10}}{10} = \dfrac{9\sqrt{10}}{5}$

45 **Dados los vectores $\vec{a}(5, 2)$ y $\vec{b}(4, -3)$, calcula la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ y la de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$.**

$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{(proy. de } \vec{b} \text{ sobre } \vec{a}) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{(proy. de } \vec{a} \text{ sobre } \vec{b}) \end{array}\right\}$

proy. de $\vec{b}$ sobre $\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = \dfrac{20 - 6}{\sqrt{29}} = \dfrac{14}{\sqrt{29}} = \dfrac{14\sqrt{29}}{29}$

proy. de $\vec{a}$ sobre $\vec{b} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{20 - 6}{\sqrt{25}} = \dfrac{14}{5}$

46 **De una base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ se sabe que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 1$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$. En esa base las coordenadas de dos vectores son $\vec{x}(1, 2)$ e $\vec{y}(-1, 1)$. Calcula $\vec{x} \cdot \vec{y}$.**

☛ ***Mira el problema resuelto número 8.***

$\vec{x} = 1\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{u} + 2\vec{v}$

$\vec{y} = -1\vec{u} + 1\vec{v} = -\vec{u} + \vec{v}$

$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) = -\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{v} =$

$= -|\vec{u}| - \vec{u} \cdot \vec{v} + 2|\vec{v}| = -2 - (-1) + 2 \cdot 1 = 1$

47 **Dados $\vec{a}(1, 2)$ y $\vec{b}(5, 5)$, expresa el vector $\vec{b}$ como suma de dos vectores: uno de la misma dirección que $\vec{a}$ y otro ortogonal a $\vec{a}$.**

☛ ***Mira el problema resuelto número 6.***

$\vec{b} = \vec{x} + \vec{y}$, donde:

- $\vec{x}$ tiene la misma dirección de $\vec{a} \rightarrow \vec{x} = k\vec{a} = k(1, 2) = (k, 2k)$
- $\vec{y} \perp \vec{a} \rightarrow \vec{y} = h(-2, 1) = (-2h, h)$

Entonces:

$(5, 5) = \vec{x} + \vec{y} = (k, 2k) + (-2h, h) = (k - 2h, 2k + h)$

$$\left.\begin{array}{l} 5 = k - 2h \\ 5 = 2k + h \end{array}\right\} \begin{array}{l} k = 3 \\ h = -1 \end{array}$$

Los vectores pedidos son $\vec{x}(3, 6)$ e $\vec{y}(2, -1)$.

48 **Se sabe que $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$ y $\vec{d} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ son perpendiculares y que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios. ¿Cuál es el ángulo que forman $\vec{a}$ y $\vec{b}$?**

☛ ***Si $\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$.***

Si $\vec{c} \perp \vec{d} \rightarrow \vec{c} \cdot \vec{d} = 0 \rightarrow (\vec{a} + 2\,\vec{b}) \cdot (5\,\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$

$5\vec{a} \cdot \vec{a} - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 10\vec{b} \cdot \vec{a} - 8\vec{b} \cdot \vec{b} = 0$

Como $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son unitarios $\rightarrow |\vec{a}| = 1 = |\vec{b}|$

$5\,|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8\,|\vec{b}|^2 = 5 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8 = 0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{-3}{6} = \dfrac{-1}{2} \rightarrow |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{-1}{2} \rightarrow (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120°$

49 **Demuestra que el vector $(\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b}$ es perpendicular al vector $\vec{c}$.**

☛ ***Debes probar que $[(\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$.***

Hay que probar que el producto escalar de ambos vectores es igual a 0.

- Veamos primero cuáles son las coordenadas del primer vector:

$$(\vec{b}\cdot\vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} = (b_1c_1 + b_2c_2)\,(a_1, a_2) - (a_1c_1 + a_2c_2)\,(b_1, b_2) =$$
$$= \big((b_1c_1 + b_2c_2)\,a_1,\ (b_1c_1 + b_2c_2)\,a_2\big) - \big((a_1c_1 + a_2c_2)\,b_1,\ (a_1c_1 + a_2c_2)\,b_2\big) =$$
$$= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2,\ a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2) - (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_2,\ a_1b_2c_1 + a_2b_2c_2) =$$
$$= (a_1b_1c_1 + a_1b_2c_2 - a_1b_1c_1 - a_2b_1c_2,\ a_2b_1c_1 + a_2b_2c_2 - a_1b_2c_1 - a_2b_2c_2) =$$
$$= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2,\ a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1)$$

- Calculamos ahora:

$$\left[(\vec{b}\cdot\vec{c})\,\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b}\right]\cdot\vec{c} =$$
$$= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2,\ a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1)\cdot(c_1, c_2) =$$
$$= (a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2)\,c_1 + (a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1)\,c_2 =$$
$$= a_1b_2c_2c_1 - a_2b_1c_2c_1 + a_2b_1c_1c_2 - a_1b_2c_1c_2 = 0$$

Página 185

CUESTIONES TEÓRICAS

50 **Indica si el resultado de las siguientes operaciones es un número o un vector:**

a) $2\vec{a}\cdot\vec{b}$ **b)** $(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}$

c) $(3\vec{a} - 2\vec{b})\cdot\vec{c}$ **d)** $(\vec{a} + \vec{b})\cdot(\vec{a} - \vec{b})$

a) Número b) Vector

c) Número d) Número

51 **Si $B(\vec{a}, \vec{b})$ es una base de los vectores del plano, señala cuáles de los siguientes pares de vectores pueden ser otra base:**

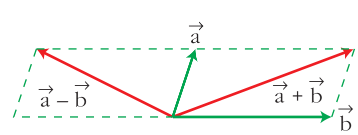
a) $(3\vec{a}, -2\vec{b})$ **b)** $(-\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$

c) $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + \vec{b})$ **d)** $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{b} - \vec{a})$

a) Sí, pues no tienen la misma dirección, ya que $3\vec{a}$ tiene la dirección de $\vec{a}$ y $-2\vec{b}$ tiene la dirección de $\vec{b}$ (que, por ser $B(\vec{a}, \vec{b})$ base, no es la misma).

b) No, pues $-\vec{a} - \vec{b} = -1\,(\vec{a} + \vec{b})$, luego los dos vectores tienen la misma dirección (y sentidos opuestos).

c) Sí, pues tienen distinta dirección.



d) No, pues tienen la misma dirección al ser $\vec{a} - \vec{b} = -1\,(\vec{b} - \vec{a})$.

52 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no nulos. Indica qué ángulo forman en los siguientes casos:**

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}|\ |\vec{b}|$

d) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0{,}5\ |\vec{a}|\ |\vec{b}|$

a) $cos\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 1 \ \rightarrow\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0°$

b) $\vec{a} \perp \vec{b} \ \rightarrow\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 90°$

c) $cos\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = -1 \ \rightarrow\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 180°$

d) $cos\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 0{,}5 \ \rightarrow\ (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$

PARA PROFUNDIZAR

53 **Dados los vectores $\vec{a}(2, 6)$ y $\vec{b}(5, 1)$, calcula:**

a) Las coordenadas de un vector unitario de la misma dirección que $\vec{b}$.

b) Un vector de la misma dirección que $\vec{b}$ y cuyo módulo sea igual a la proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$. (Vector proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$).

a) Habrá dos soluciones ($\vec{v}$ y $-\vec{v}$)

- Si $\vec{v}$ es vector unitario $\rightarrow$ $|\vec{v}| = 1$
- Si $\vec{v}$ es de la misma dirección que $\vec{b}$ $\rightarrow$ $\vec{v} = k\vec{b} = (k5, k)$

$$\sqrt{25k^2 + k^2} = 1 \ \rightarrow\ k = \pm\frac{1}{\sqrt{26}} = \pm\frac{\sqrt{26}}{26}$$

Luego las soluciones son:

$$\vec{v} = \left(\frac{5\sqrt{26}}{26}, \frac{\sqrt{26}}{26}\right) \quad y \quad -\vec{v} = \left(\frac{-5\sqrt{26}}{26}, -\frac{\sqrt{26}}{26}\right)$$

b) proy. de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ $= \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{10 + 6}{\sqrt{26}} = \dfrac{16}{\sqrt{26}} = \dfrac{16\sqrt{26}}{26} = \dfrac{8\sqrt{26}}{13}$

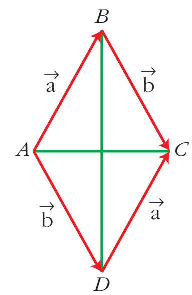
$$\left.\begin{array}{l} \text{Luego, } |\vec{v}| = \dfrac{8\sqrt{26}}{13} \\[2ex] y \ \ \vec{v} = k\vec{b} = (5k, k) \end{array}\right\} \rightarrow\ \sqrt{26k^2} = \frac{8\sqrt{26}}{13} \ \rightarrow\ k = \pm\frac{8}{13}$$

Así: $\vec{v}\left(\dfrac{40}{13}, \dfrac{8}{13}\right)$, $-\vec{v}\left(\dfrac{-40}{13}, \dfrac{-8}{13}\right)$

54 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ los vectores que definen los lados de un rombo, partiendo de uno de sus vértices (cada vector determina un par de lados paralelos):**

a) Expresa las diagonales del rombo en función de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

b) Demuestra vectorialmente que las diagonales del rombo son perpendiculares.



a) $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b}$

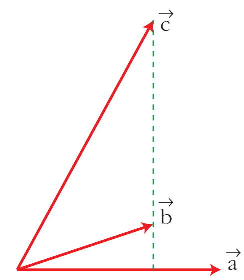
b) Hay que probar que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. Veámoslo:

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2$

Como $|\vec{b}| = |\vec{a}|$ por ser la medida de los lados, se cumple que:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$$

55 **Busca algunos ejemplos con los que se vea que $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ no implica que $\vec{b} = \vec{c}$.**



Considera los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ del dibujo de la derecha:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot$ proy. de $\vec{b}$ sobre $\vec{a}$

$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot$ proy. de $\vec{c}$ sobre $\vec{a}$

Como ambas proyecciones coinciden: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$

Y, sin embargo: $\vec{b} \neq \vec{c}$

56 **Prueba, que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp \vec{c}$, entonces: $\vec{a} \perp (m\vec{b} + n\vec{c})$, $m, n \in \mathbb{R}$.**

Hay que probar que $\vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = 0$. Veamos:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) \overset{(*)}{=} m(\vec{a} \cdot \vec{b}) + n(\vec{a} \cdot \vec{c}) \\ ^{(*)} \text{ Propiedades 6 y 7 del producto escalar.} \\ \text{Como: } \vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \qquad \vec{a} \perp \vec{c} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} \cdot (m\vec{b} + n\vec{c}) = m \cdot 0 + n \cdot 0$$

57 **Prueba que si $\vec{a} \perp \vec{b}$ y $\vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c})$ entonces se verifica que $\vec{a} \perp \vec{c}$.**

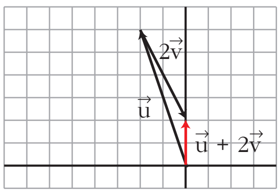
$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ \text{Si } \vec{a} \perp (\vec{b} + \vec{c}) \rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \rightarrow \vec{a} \perp \vec{c}$$

Página 185

AUTOEVALUACIÓN

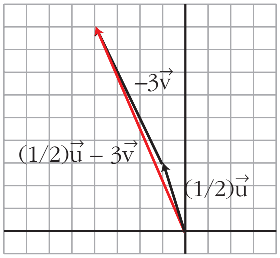
1. **Se consideran los vectores $\vec{u}(-2, 6)$ y $\vec{v}(1, -2)$.**

Calcula $\vec{u} + 2\vec{v}$ y $\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v}$ gráficamente y utilizando coordenadas.



$\vec{u} + 2\vec{v} = (-2, 6) + 2(1, -2) =$

$= (-2, 6) + (2, -4) = (0, 2)$



$\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v} = \frac{1}{2}(-2, 6) - 3(1, -2) =$

$= (-1, 3) - (3, -6) = (-4, 9)$

2. **Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores unitarios que forman un ángulo de 60°. Calcula:**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ **b) $(3\vec{u}) \cdot (-2\vec{v})$** **c) $proy_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v})$**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\, cos\ 60° = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $3\vec{u} \cdot (-2\vec{v}) = -6(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3$

c) $proy_{\vec{u}}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v}}{1} = |\vec{u}|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

3. **Expresa el vector $\vec{a}(-1, -9)$ como combinación lineal de la base $B = \{(-2, 3), (-1, 5)\}$.**

$(-1, -9) = k(-2, 3) + s(-1, 5) = (-2k - s, 3k + 5s)$

$\left.\begin{array}{l} -1 = -2k - s \\ -9 = \ \ 3k + 5s \end{array}\right\} \begin{array}{l} s = 1 - 2k \\ -9 = 3k + 5(1 - 2k) \ \to\ -9 = -7k + 5 \ \to\ k = 2 \end{array}$

$s = 1 - 4 = -3$

Por tanto: $(-1, -9) = 2(-2, 3) - 3(-1, 5)$

$\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

4. **Consideramos los vectores $\vec{u}(0, 2)$ y $\vec{v}\left(1, \sqrt{3}\right)$. Calcula:**

a) Su producto escalar.

b) El módulo de ambos vectores.

c) El ángulo que forman.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 2) \cdot \left(1, \sqrt{3}\right) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^{\,2}} = 2$

c) $\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \mathrm{arc}\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°$

5. **Sea $\vec{u}(-3, k)$, calcula k de forma que:**

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -6)$.

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a 5.

a) El producto escalar de dos vectores ortogonales es igual a 0.

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, k) \cdot (4, -6) = -12 - 6k = 0 \rightarrow k = -2$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{9 + k^2} = 5 \rightarrow 9 + k^2 = 25 \rightarrow k = \pm 4$

6. **Determina las coordenadas de un vector $\vec{a}(x, y)$ que forme con el vector $\vec{v}$ $(-1, 0)$ un ángulo de 60° y cuyo módulo sea 2.**

$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{v}}\right) = \cos 60° = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{-x}{2 \cdot 1} \rightarrow x = -1$

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + y^2} = 2 \rightarrow 1 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

Hay dos soluciones para el vector $\vec{a}$: $\begin{cases} \vec{a}\left(-1, \sqrt{3}\right) \\ \vec{a}\left(-1, -\sqrt{3}\right) \end{cases}$

7. **Obtén un vector $\vec{u}(x, y)$ ortogonal a $\vec{v}(8, 6)$ y cuyo módulo sea la mitad del de $\vec{v}$.**

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{64 + 36} = 10$

$(x, y) \cdot (8, 6) = 8x + 6y = 0$

$|\vec{u}| = \frac{1}{2}|\vec{v}| \to \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \to x^2 + y^2 = 25$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 8x + 6y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -\frac{3}{4}y \\ \frac{9}{16}y^2 + y^2 = 25 \to \frac{25}{16}y^2 = 25 \to y^2 = 16 \to y = \pm 4 \end{array}$$

$y = 4 \to x = -3$

$y = -4 \to x = 3$

Hay dos soluciones para $\vec{u}$: $\vec{u}(-3, 4)$; $\vec{u}(3, -4)$

8. Calcula la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, siendo $\vec{u}(2, 0)$ y $\vec{v}(-3, -1)$.

$$proy_{\vec{u}}\,\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{-6 + 0}{2} = -3$$

9. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores unitarios que forman un ángulo de 120°. Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 =$$

$$= 1 - 1 + 1 = 1 \to |\vec{a} + \vec{b}| = 1$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 =$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3 \to |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$$