4 RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Página 103

REFLEXIONA Y RESUELVE

Problema 1

Para calcular la altura de un árbol, podemos seguir el procedimiento que utilizó Tales de Mileto para hallar la altura de una pirámide de Egipto: comparar su sombra con la de una vara vertical cuya longitud es conocida.

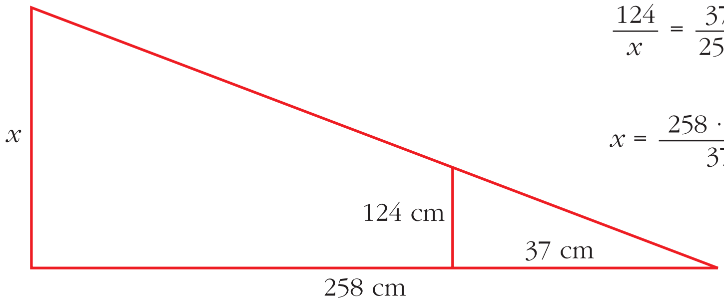
- **Hazlo tú siguiendo este método y sabiendo que:**

  — la vara mide 124 cm,

  — la sombra de la vara mide 37 cm,

  — la sombra del árbol mide 258 cm.

  Para solucionar este problema habrás utilizado la semejanza de dos triángulos.



$$\frac{124}{x} = \frac{37}{258}$$

$$x = \frac{258 \cdot 124}{37} = 864{,}65 \text{ cm}$$

La altura del árbol es de 864,65 cm.

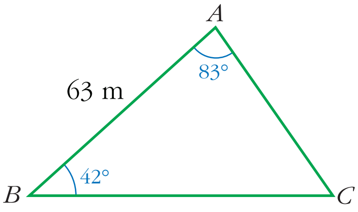
Problema 2

Bernardo conoce la distancia $\overline{AB}$ a la que está del árbol y los ángulos $\widehat{CBA}$ y $\widehat{BAC}$; y quiere calcular la distancia $\overline{BC}$ a la que está de Carmen.

Datos: **$\overline{AB}$ = 63 m; $\widehat{CBA}$ = 42°; $\widehat{BAC}$ = 83°**

- **Para resolver el problema, primero *realiza un dibujo a escala* 1:1 000 (1 m → → 1 mm). Después, mide la longitud del segmento BC y, deshaciendo la escala, obtendrás la distancia a la que Bernardo está de Carmen.**

  $\overline{BC}$ = 42 mm



Deshaciendo la escala: $\overline{BC} = 42$ m

Problema 3

- **Análogamente puedes resolver este otro:**

Bernardo ve desde su casa el castillo y la abadía. Conoce las distancias a ambos lugares, pues ha hecho el camino a pie muchas veces; y quiere averiguar la distancia del castillo a la abadía. Para ello debe, previamente, medir el ángulo $\widehat{CBA}$.

Datos: **$\overline{BC}$ = 1 200 m; $\overline{BA}$ = 700 m; $\widehat{CBA}$ = 108º.**

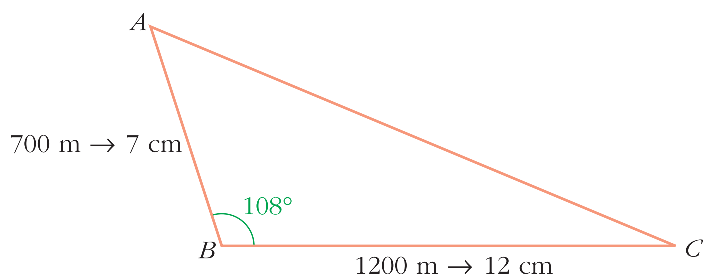
- **Utiliza ahora la escala 1:10 000 (100 m → 1 cm).**

100 m → 1 cm

1 200 m → 12 cm

700 m → 7 cm

$\overline{CA}$ = 14,7 cm ⇒ $\overline{CA}$ = 1 470 m

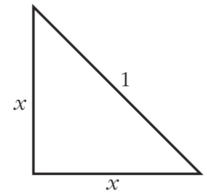


NOTA: El triángulo está construido al 50% de su tamaño.

Problema 4

- **Calcula, aplicando el teorema de Pitágoras:**

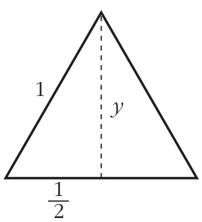
a) Los lados iguales de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 1.



b) La altura de un triángulo equilátero de lado 1.

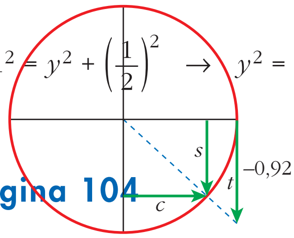
Haz todos los cálculos manteniendo los radicales. Debes llegar a las siguientes soluciones:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



a) $1^2 = x^2 + x^2 \rightarrow 1 = 2x^2 \rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $1^2 = y^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \rightarrow y^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} \rightarrow y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$



Página 104

1. Calcula *tg* α sabiendo que *sen* α = 0,39. Hazlo, también, con calculadora.

$cos\ \alpha = \sqrt{1 - (sen\ \alpha)^2} = \sqrt{1 - 0{,}39^2} = 0{,}92$

$tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = 0{,}42$

Con calculadora: SHIFT sin 0,39 = tan = 0.42353791018

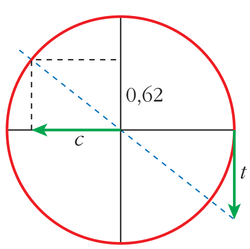
2. Calcula *cos* α sabiendo que *tg* α = 1,28. Hazlo, también, con calculadora.

$\left.\begin{array}{l} s^2 + c^2 = 1 \\ s/c = 1{,}28 \end{array}\right\}$ Resolviendo el sistema se obtiene $s = 0{,}79$ y $c = 0{,}62$.

Con calculadora: SHIFT tan 1,28 = cos = 0.61564404197

Página 105

1. Sabiendo que el ángulo α está en el segundo cuadrante (90° < α < 180°) y *sen* α = 0,62, calcula *cos* α y *tg* α.



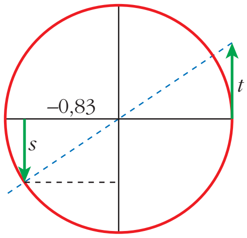
$cos\ \alpha = -\sqrt{1 - 0{,}62^2} = -0{,}78$

$tg\ \alpha = \dfrac{0{,}62}{-0{,}78} = -0{,}79$

2. Sabiendo que el ángulo α está en el tercer cuadrante (180° < α < 270°) y *cos* α = –0,83, calcula *sen* α y *tg* α.

$sen\ \alpha = -\sqrt{1 - (0{,}83)^2} = -0{,}56$

$tg\ \alpha = \dfrac{-0{,}56}{-0{,}83} = 0{,}67$


–0,83
t
s

3. **Sabiendo que el ángulo α está en el cuarto cuadrante ($270° < \alpha < 360°$) y *tg* $\alpha = -0,92$, calcula *sen* α y *cos* α.**

$$\left.\begin{array}{l} s/c = -0,92 \\ s^2 + c^2 = 1 \end{array}\right\} \text{ El sistema tiene dos soluciones:}$$

$s = -0,68; \quad c = 0,74$

$s = 0,68; \quad c = -0,74$

Teniendo en cuenta dónde está el ángulo, la solución es la primera: *sen* $\alpha = -0,68$, *cos* $\alpha = 0,74$

4. **Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y amplíala para los ángulos 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° y 360°.**

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1				
cos	1	$\sqrt{3}/2$			0				
tg	0	$\sqrt{3}/3$			–				

Ayúdate de la representación de los ángulos en una circunferencia goniométrica.

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0
cos	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tg	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

Página 106

1. **Halla las razones trigonométricas del ángulo 2 397°:**

a) Obteniendo la expresión del ángulo en el intervalo [0°, 360°).

b) Obteniendo la expresión del ángulo en el intervalo (–180°, 180°].

c) Directamente con la calculadora.

a) $2\,397° = 6 \cdot 360° + 237°$

sen $2\,397°$ = *sen* $237° = -0,84$

cos $2\,397°$ = *cos* $237° = -0,54$

tg $2\,397°$ = *tg* $237° = 1,54$

b) $2\,397° = 7 \cdot 360° - 123°$

sen $2\,397°$ = *sen* $(-123°) = -0,84$

cos $2\,397°$ = *cos* $(-123°) = -0,54$

tg $2\,397°$ = *tg* $(-123°) = 1,54$

2. **Pasa cada uno de los siguientes ángulos al intervalo [0°, 360°) y al intervalo (–180°, 180°]:**

a) 396° **b) 492°** **c) 645°** **d) 3 895°** **e) 7 612°** **f) 1 980°**

Se trata de expresar el ángulo de la siguiente forma:

$$k \text{ o } -k, \text{ donde } k \le 180°$$

a) 396° = 396° – 360° = **36°**

b) 492° = 492° – 360° = **132°**

c) 645° = 645° – 360° = **285°** = 285° – 360° = **–75°**

d) 3 895° = 3 895° – 10 · 360° = **295°** = 295° – 360° = **–65°**

e) 7 612° = 7 612° – 21 · 360° = **52°**

f) 1 980° = 1 980° – 5 · 360° = **180°**

Cuando hacemos, por ejemplo, 7 612° = 7 612° – 21 · 360°, ¿por qué tomamos 21? Porque, previamente, hemos realizado la división 7 612 ÷ 360 = 21.44... . Es el cociente entero.

Página 107

LENGUAJE MATEMÁTICO

1. **Di el valor de las siguientes razones trigonométricas sin preguntarlo a la calculadora. Después, compruébalo con su ayuda:**

a) ***sen*(37 × 360° – 30°)** **b)** ***cos*(–5 × 360° + 120°)**

c) ***tg*(11 × 360° – 135°)** **d)** ***cos*(27 × 180° + 135°)**

a) $sen\,(37 \cdot 360° - 30°) = sen\,(-30°) = -sen\;30° = -\frac{1}{2}$

b) $cos\,(-5 \cdot 360° + 120°) = cos\,(120°) = -\frac{1}{2}$

c) $tg\,(11 \cdot 360° - 135°) = tg\,(-135°) = -tg\;135° = 1$

d) $cos\,(27 \cdot 180° + 135°) = cos\,(28 \cdot 180° - 180° + 135°) =$

$$= cos\,(14 \cdot 360° - 45°) = cos\,(-45°) = cos\;45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. **Repite con la calculadora estos cálculos:**

SHIFT tan **1** EXP **10** = 89.99999999

SHIFT tan **1** EXP **20** = 90

Explica los resultados. ¿Cómo es posible que diga que el ángulo cuya tangente vale 10^{20} es 90° si 90° no tiene tangente?

Es un ángulo que difiere de 90° una cantidad tan pequeña que, a pesar de las muchas cifras que la calculadora maneja, al redondearlo da 90°.

Página 109

1. Calcula las razones trigonométricas de 55°, 125°, 145°, 215°, 235°, 305° y 325° a partir de las razones trigonométricas de 35°:

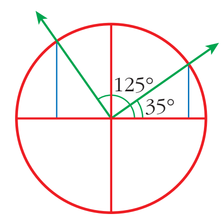
$$\boldsymbol{sen\ 35° = 0,57;\quad cos\ 35° = 0,82;\quad tg\ 35° = 0,70}$$

• $55° = 90° - 35° \Rightarrow$ 55° y 35° son complementarios.

$$\left.\begin{array}{l} sen\ 55° = cos\ 35° = 0,82 \\ cos\ 55° = sen\ 55° = 0,57 \end{array}\right\}\ tg\ 55° = \frac{sen\ 55°}{cos\ 55°} = \frac{0,82}{0,57} = 1,43$$

$$\left(\text{También}\ \ tg\ 55° = \frac{1}{tg\ 35°} = \frac{1}{0,70} \approx 1,43\right)$$

• $125° = 90° + 35°$

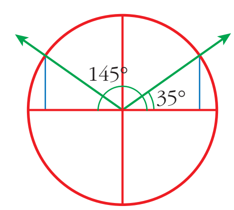


$sen\ 125° = cos\ 35° = 0,82$

$cos\ 125° = -sen\ 35° = -0,57$

$$tg\ 125° = \frac{-1}{tg\ 35°} = \frac{-1}{0,70} = -1,43$$

• $145° = 180° - 35° \Rightarrow$ 145° y 35° son suplementarios.

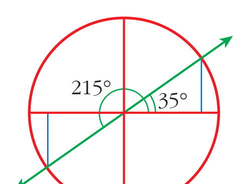


$sen\ 145° = sen\ 35° = 0,57$

$cos\ 145° = -cos\ 35° = -0,82$

$tg\ 145° = -tg\ 35° = -0,70$

• $215° = 180° + 35°$

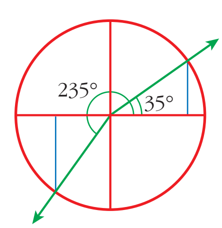


$sen\ 215° = -sen\ 35° = -0,57$

$cos\ 215° = -cos\ 35° = -0,82$

$tg\ 215° = tg\ 35° = 0,70$

• $235° = 270° - 35°$



$sen\ 235° = -cos\ 35° = -0,82$

$cos\ 235° = -sen\ 35° = -0,57$

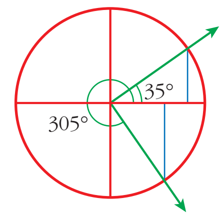
$$tg\ 235° = \frac{sen\ 235°}{cos\ 235°} = \frac{-cos\ 35°}{-sen\ 35°} = \frac{1}{tg\ 35°} = \frac{1}{0,70} = 1,43$$

- $305° = 270° + 35°$

  $sen\ 305° = -cos\ 35° = -0{,}82$

  $cos\ 305° = sen\ 35° = 0{,}57$

  $tg\ 305° = \dfrac{sen\ 305°}{cos\ 305°} = \dfrac{-cos\ 35°}{sen\ 35°} = -\dfrac{1}{tg\ 35°} = -1{,}43$

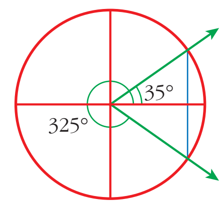


- $325° = 360° - 35°$ $(= -35°)$

  $sen\ 325° = -sen\ 35° = -0{,}57$

  $cos\ 325° = cos\ 35° = 0{,}82$

  $tg\ 325° = \dfrac{sen\ 325°}{cos\ 325°} = \dfrac{-sen\ 35°}{cos\ 35°} = -tg\ 35° = -0{,}70$



2. **Averigua las razones trigonométricas de 358°, 156° y 342°, utilizando la calculadora solo para hallar razones trigonométricas de ángulos comprendidos entre 0° y 90°.**

- $358° = 360° - 2°$

  $sen\ 358° = -sen\ 2° = -0{,}0349$

  $cos\ 358° = cos\ 2° = 0{,}9994$

  $tg\ 358° \overset{(*)}{=} -tg\ 2° = -0{,}03492$

  (*) $tg\ 358° = \dfrac{sen\ 358°}{cos\ 358°} = \dfrac{-sen\ 2°}{cos\ 2°} = -tg\ 2°$

- $156° = 180° - 24°$

  $sen\ 156° = sen\ 24° = 0{,}4067$

  $cos\ 156° = -cos\ 24° = -0{,}9135$

  $-tg\ 24° = -0{,}4452$

  OTRA FORMA DE RESOLVERLO:

  $156° = 90° + 66°$

  $sen\ 156° = cos\ 66° = 0{,}4067$

  $cos\ 156° = -sen\ 66° = -0{,}9135$

  $tg\ 156° = \dfrac{-1}{tg\ 66°} = \dfrac{-1}{2{,}2460} = -0{,}4452$

- $342° = 360° - 18°$

  $sen\ 342° = -sen\ 18° = -0{,}3090$

  $cos\ 342° = cos\ 18° = 0{,}9511$

  $tg\ 342° = -tg\ 18° = -0{,}3249$

3. **Dibuja, sobre la circunferencia goniométrica, ángulos que cumplan las siguientes condiciones y estima, en cada caso, el valor de las restantes razones trigonométricas:**

a) $\textit{sen}\ \alpha = -\frac{1}{2},\ \textit{tg}\ \alpha > 0$ **b)** $\textit{cos}\ \alpha = \frac{3}{4},\ \alpha > 90°$

c) $\textit{tg}\ \beta = -1,\ \textit{cos}\ \beta < 0$ **d)** $\textit{tg}\ \alpha = 2,\ \textit{cos}\ \alpha < 0$

a) $\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = -1/2 < 0 \\ tg\ \alpha > 0 \end{array}\right\} \rightarrow\ cos\ \alpha < 0\ \rightarrow\ \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha = -1/2 \\ cos\ \alpha \approx -0{,}86 \end{array}\right\}$$

b) $\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha = 3/4 \\ \alpha > 90° \end{array}\right\} \rightarrow\ \alpha \in 4.°$ cuadrante

$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha \approx -0{,}66 \\ cos\ \alpha = 3/4 \end{array}\right\}$$

c) $\left.\begin{array}{l} tg\ \beta = -1 < 0 \\ cos\ \beta < 0 \end{array}\right\} \rightarrow\ sen\ \beta > 0\ \rightarrow\ \beta \in 2.°$ cuadrante

$$\left.\begin{array}{l} sen\ \beta \approx 0{,}7 \\ cos\ \beta \approx -0{,}7 \end{array}\right\}$$

d) $\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = 2 > 0 \\ cos\ \alpha < 0 \end{array}\right\} \rightarrow\ sen\ \alpha < 0\ \rightarrow\ \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

$$\left.\begin{array}{l} sen\ \alpha \approx -0{,}9 \\ cos\ \alpha \approx -0{,}45 \end{array}\right\}$$

Página 111

1. **Las siguientes propuestas están referidas a triángulos rectángulos que, en todos los casos, se designan por *ABC*, siendo *C* el ángulo recto.**

a) Datos: $c = 32$ **cm,** $\hat{B} = 57°$**. Calcula** a**.**

b) Datos: $c = 32$ **cm,** $\hat{B} = 57°$**. Calcula** b**.**

c) Datos: $a = 250$ **m,** $b = 308$ **m. Calcula** c **y** $\hat{A}$**.**

d) Datos: $a = 35$ **cm,** $\hat{A} = 32°$**. Calcula** b**.**

e) Datos: $a = 35$ **cm,** $\hat{A} = 32°$**. Calcula** c**.**

a) $cos\ \hat{B} = \frac{a}{c}\ \rightarrow\ a = c\ cos\ \hat{B} = 17{,}43$ cm

b) $sen\ \hat{B} = \frac{b}{c}\ \rightarrow\ b = c\ sen\ \hat{B} = 26{,}84$ cm

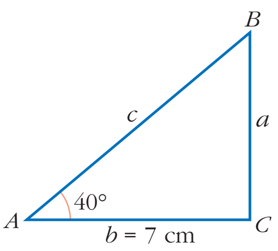
c) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 396{,}69$ m

$tg\ \hat{A} = \dfrac{a}{b} = 0{,}81 \;\rightarrow\; \hat{A} = 39°\ 3'\ 57''$ $\Big\}\rightarrow$

d) $tg\ \hat{A} = \dfrac{a}{b} \;\rightarrow\; b = \dfrac{a}{tg\ \hat{A}} = 56{,}01$ cm

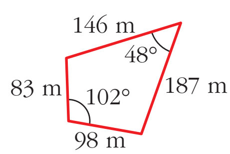
e) $sen\ \hat{A} = \dfrac{a}{c} \;\rightarrow\; c = \dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = 66{,}05$ cm

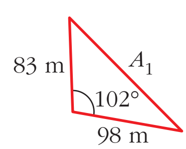
2. Para determinar la altura de un poste nos hemos alejado 7 m de su base y hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un valor de 40°. ¿Cuánto mide el poste?



$tg\ 40° = \dfrac{a}{7} \;\rightarrow\; a = 7\ tg\ 40° = 5{,}87$ m

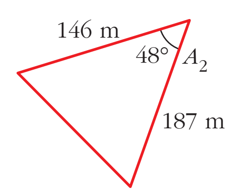
3. Halla el área de este cuadrilátero. Sugerencia: Pártelo en dos triángulos.





$A_1 = \dfrac{1}{2} 98 \cdot 83\ sen\ 102° = 3\,978{,}13\ m^2$

$A_2 = \dfrac{1}{2} 187 \cdot 146\ sen\ 48° = 10\,144{,}67\ m^2$



El área es la suma de A_1 y A_2: $14\,122{,}80\ m^2$

Página 113

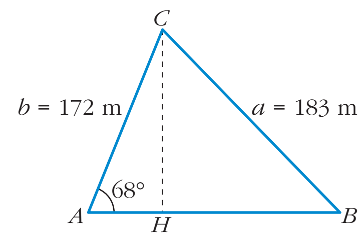
1. **En un triángulo *ABC* conocemos $\hat{A}$ = 68°, *b* = 172 m y *a* = 183 m. Calcula la longitud del lado *c*.**

$\overline{AH} = 172 \cos 68° = 64,43$ m

$\overline{CH} = 172 \text{ sen } 68° = 159,48$ m

$\overline{HB} = \sqrt{a^2 - \overline{CH}^2} = 89,75$ m

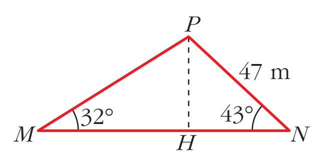
$c = \overline{AH} + \overline{HB} = 64,43 \text{ m} + 89,75 \text{ m} = 154,18$ m



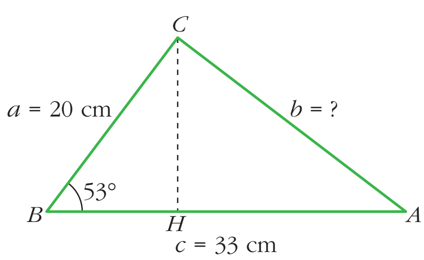
2. **En un triángulo *MNP* conocemos $\hat{M}$ = 32°, $\hat{N}$ = 43° y $\overline{NP}$ = 47 m. Calcula $\overline{MP}$.**

$\text{sen } 43° = \dfrac{\overline{PH}}{47} \rightarrow \overline{PH} = 47 \text{ sen } 43° = 32,05$ m

$\text{sen } 32° = \dfrac{\overline{PH}}{\overline{MP}} \rightarrow \overline{MP} = \dfrac{\overline{PH}}{\text{sen } 32°} = \dfrac{32,05}{\text{sen } 32°} = 60,49$ m



3. **En un triángulo *ABC* conocemos *a* = 20 cm, *c* = 33 cm y $\hat{B}$ = 53°. Calcula la longitud del lado *b*.**



$\overline{BH} = a \cos 53° = 12,04$ cm

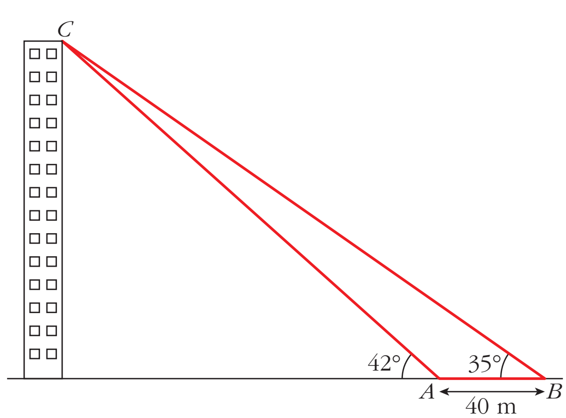
$\overline{CH} = a \text{ sen } 53° = 15,97$ cm

$\overline{HA} = c - \overline{BH} = 20,96$ cm

$b = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HA}^2} = 26,35$ cm

4. **Estamos en *A*, medimos el ángulo bajo el que se ve el edificio (42°), nos alejamos 40 m y volvemos a medir el ángulo (35°). ¿Cuál es la altura del edificio y a qué distancia nos encontramos de él?**

Observa la ilustración:



$tg\ 42° = \dfrac{h}{d} \quad \rightarrow \quad h = d\ tg\ 42°$

$tg\ 35° = \dfrac{h}{d + 40} \quad \rightarrow \quad h = (d + 40) tg\ 35°$

$\rightarrow \quad d\ tg\ 42° = (d + 40)\ tg\ 35° \quad \rightarrow \quad d = \dfrac{40\ tg\ 35°}{tg\ 42° - tg\ 35°} = 139{,}90$ m

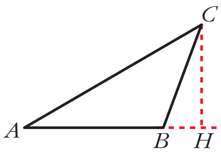
$h = d\ tg\ 42° = 125{,}97$ m

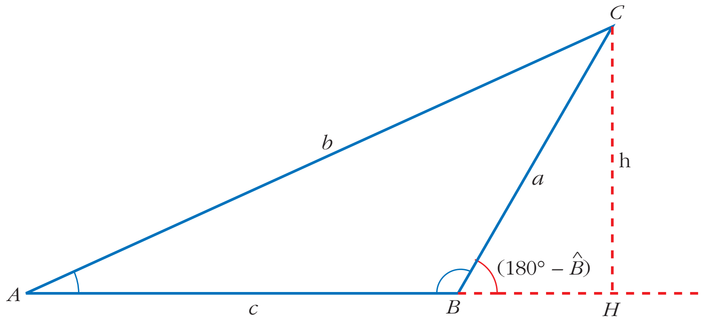
La altura es 125,97 m. La primera distancia es 139,90 m, y ahora, después de alejarnos 40 m, estamos a 179,90 m.

Página 114

1. Repite la demostración anterior en el caso de que $\hat{B}$ sea obtuso. Ten en cuenta que:

***sen* (180° – $\hat{B}$) = *sen* $\hat{B}$**





$sen\ \hat{A} = \dfrac{h}{b} \quad \rightarrow \quad h = b\ sen\ \hat{A}$

$sen\ \hat{B} = sen\,(180 - \hat{B}) = \dfrac{h}{a} \quad \rightarrow \quad h = a\ sen\ \hat{B}$

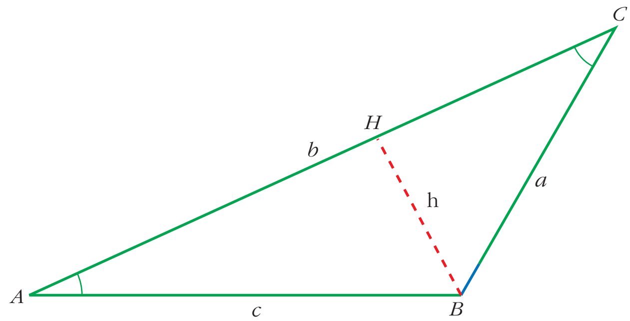
$b\ sen\ \hat{A} = a\ sen\ \hat{B} \quad \rightarrow \quad \dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}}$

2. Demuestra detalladamente, basándote en la demostración anterior, la siguiente relación:

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}$$

Lo demostramos para $\hat{C}$ ángulo agudo. (Si fuese un ángulo obtuso razonaríamos como en el ejercicio anterior).

Trazamos la altura h desde el vértice *B*. Así, los triángulos obtenidos *AHB* y *CHB* son rectángulos.



Por tanto, tenemos: $sen\ \hat{A} = \dfrac{h}{c} \;\rightarrow\; h = c\ sen\ \hat{A}$

$sen\ \hat{C} = \dfrac{h}{a} \;\rightarrow\; h = a\ sen\ \hat{C}$

$c\ sen\ \hat{A} = a\ sen\ \hat{C}$

$\dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{c}{sen\ \hat{C}}$

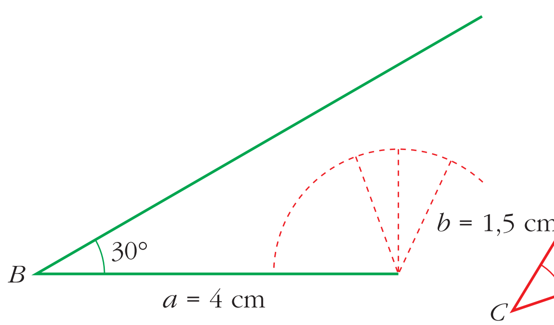
Página 115

3. Resuelve el mismo problema anterior (a = 4 cm, $\hat{B}$ = 30°) tomando para b los siguientes valores: b = 1,5 cm, b = 2 cm, b = 3 cm, b = 4 cm.

Justifica gráficamente por qué se obtienen, según los casos, ninguna solución, una solución o dos soluciones.

- b = 1,5 cm

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} \;\rightarrow\; \frac{4}{sen\ \hat{A}} = \frac{1{,}5}{sen\ 30°} \;\rightarrow\; sen\ \hat{A} = \frac{4 \cdot 0{,}5}{1{,}5} = 1{,}\hat{3}$$

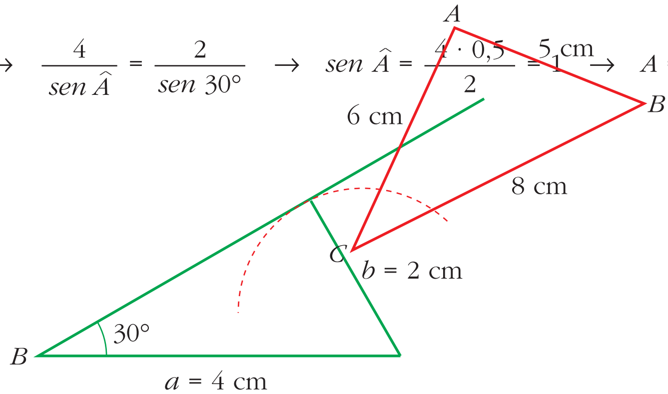


¡Imposible, pues $sen\ \hat{A} \in [-1, 1]$ siempre!

No tiene solución. Con esta medida, b = 1,5 cm, el lado b nunca podría tocar al lado c.

- $b = 2$ cm

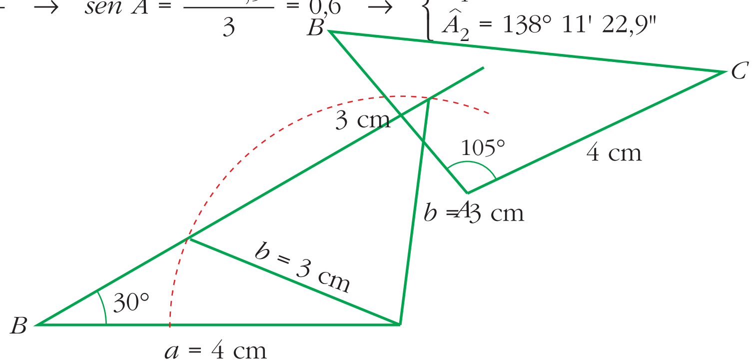
$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} \rightarrow \frac{4}{sen\ \hat{A}} = \frac{2}{sen\ 30°} \rightarrow sen\ \hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{2} = 1 \rightarrow A = 90°$$



Se obtiene una única solución.

- $b = 3$ cm

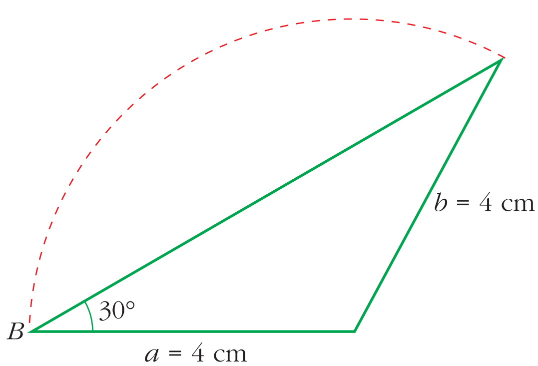
$$\frac{4}{sen\ \hat{A}} = \frac{3}{sen\ 30°} \rightarrow sen\ \hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{3} = 0,\hat{6} \rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = 41°\ 48'\ 37,1'' \\ \hat{A}_2 = 138°\ 11'\ 22,9'' \end{cases}$$



Las dos soluciones son válidas, pues en ningún caso ocurre que $\hat{A} + \hat{B} > 180°$.

- $b = 4$ cm

$$\frac{4}{sen\ \hat{A}} = \frac{4}{sen\ 30°} \rightarrow sen\ \hat{A} = \frac{4 \cdot 0,5}{4} = 0,5 \rightarrow \begin{cases} \hat{A}_1 = 30° \rightarrow \text{Una solución válida.} \\ \hat{A}_2 = 150° \end{cases}$$



La solución $\hat{A}_2 = 150°$ no es válida, pues, en tal caso, sería $\hat{A} + \hat{B} = 180°$. ¡Imposible!

Página 117

4. **Resuelve los siguientes triángulos:**

a) $a = 12$ **cm;** $b = 16$ **cm;** $c = 10$ **cm**

b) $b = 22$ **cm;** $a = 7$ **cm;** $\hat{C} = 40°$

c) $a = 8$ **m;** $b = 6$ **m;** $c = 5$ **m**

d) $b = 4$ **cm;** $c = 3$ **cm;** $\hat{A} = 105°$

e) $a = 4$ **m;** $\hat{B} = 45°$ **y** $\hat{C} = 60°$

f) $b = 5$ **m;** $\hat{A} = \hat{C} = 35°$

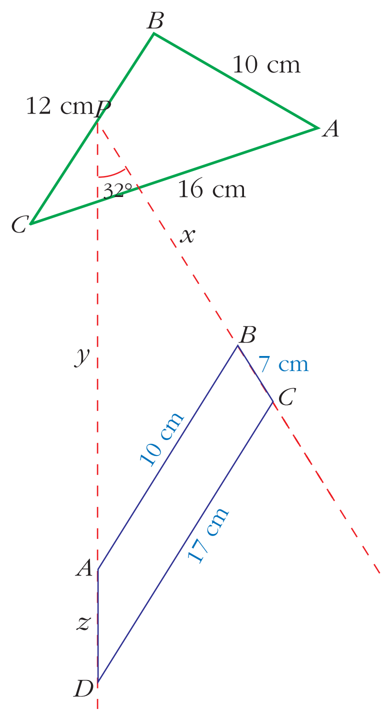
a) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

$12^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cos \hat{A}$

$144 = 256 + 100 - 320 \cos \hat{A}$

$\cos \hat{A} = \dfrac{256 + 100 - 144}{320} = 0{,}6625$

$A = 48°\ 30'\ 33''$



• $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

$256 = 144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cos \hat{B}$

$\cos \hat{B} = \dfrac{144 + 100 - 256}{240} = -0{,}05$

$B = 92°\ 51'\ 57{,}5''$

• $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180° \rightarrow \hat{C} = 180° - \hat{A} - \hat{B}$

$\hat{C} = 38°\ 37'\ 29{,}5''$

b) • $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$

$c^2 = 7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cos 40° =$

$= 49 + 484 - 235{,}94 = 297{,}06$

$c = 17{,}24$ cm

• $\dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}} \rightarrow \dfrac{7}{\text{sen } \hat{A}} = \dfrac{17{,}24}{\text{sen } 40°}$

$\text{sen } \hat{A} = \dfrac{7 \text{ sen } 40°}{17{,}24} = 0{,}26$

$A = \begin{cases} \hat{A}_1 = 15°\ 7'\ 44{,}3'' \\ \hat{A}_2 = 164°\ 52'\ 15{,}7'' \rightarrow \text{No válida} \end{cases}$

(La solución A_2 no es válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{C} > 180°$).

• $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 124°\ 52'\ 15{,}7''$

c) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \hat{A}$

$64 = 36 + 25 - 2 \cdot 6 \cdot 5\ cos\ \hat{A}$

$cos\ \hat{A} = \frac{36 + 25 - 64}{60} = -0{,}05$

$\hat{A} = 92°\ 51'\ 57{,}5''$

• $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\ \hat{B}$

$36 = 64 + 25 - 2 \cdot 8 \cdot 5\ cos\ \hat{B}$

$cos\ \hat{B} = \frac{64 + 25 - 36}{80} = 0{,}6625$

$\hat{B} = 48°\ 30'\ 33''$

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 38°\ 37'\ 29{,}5''$

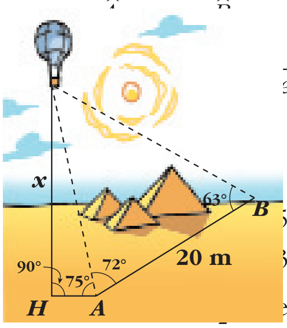
(NOTA: Compárese con el apartado a). Son triángulos semejantes).

d) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \hat{A} =$

$= 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3\ cos\ 105° = 31{,}21$

$a = 5{,}59$ m

• $\frac{a}{\ } = \frac{b}{\ }$



$\frac{5{,}59}{en\ 105°}$

$sen\ \hat{B} = \frac{4 \cdot sen\ 105°}{5{,}59} = 0{,}6912$

,3''

34,7'' → No válida

s válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{B}_2 > 180°$).

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 31°\ 16'\ 34{,}7''$

e) • $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 75°$

• $\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}}$

$\frac{4}{sen\ 75°}$

$b = \frac{4 \cdot sen\ 45°}{sen\ 75°} = 2{,}93$ m

• $\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow \frac{4}{sen\ 75°} = \frac{c}{sen\ 60°}$

$c = \frac{4 \cdot sen\ 60°}{sen\ 75°} = 3{,}59$

Página 122

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Relación entre razones trigonométricas

1 **Calcula las demás razones trigonométricas del ángulo α $(0° < \alpha < 90°)$ utilizando las relaciones fundamentales:**

a) $sen\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $tg\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $sen\ \alpha = \frac{3}{8}$ **e)** $cos\ \alpha = 0,72$ **f)** $tg\ \alpha = 3$

a) $sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + cos^2\ \alpha = 1 \rightarrow cos^2\ \alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \rightarrow$

$\rightarrow cos\ \alpha = \frac{1}{2}$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

b) $sen^2\ \alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \rightarrow sen^2\ \alpha = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$tg\ \alpha = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$$

c) $\frac{1}{cos^2\ \alpha} = 1 + tg^2\ \alpha \rightarrow \frac{1}{cos^2\ \alpha} = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{cos^2\ \alpha} = \frac{7}{4} \rightarrow$

$\rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{4}{7} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{2\sqrt{7}}{7}$

$$sen^2\ \alpha = 1 - \left(\frac{2\sqrt{7}}{7}\right)^2 = \frac{3}{7} \rightarrow sen\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

d) $cos^2\ \alpha = 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 \rightarrow cos^2\ \alpha = \frac{55}{64} \rightarrow cos\ \alpha = \frac{\sqrt{55}}{8}$

$$tg\ \alpha = \frac{3/8}{\sqrt{55}/8} = \frac{3\sqrt{55}}{55}$$

e) $sen^2\ \alpha = 1 - (0,72)^2 \rightarrow sen^2\ \alpha = 0,4816 \rightarrow sen\ \alpha = 0,69$

$$tg\ \alpha = \frac{0,69}{0,72} = 0,96$$

f) $\frac{1}{cos^2\,\alpha} = 1 + 3^2 \;\rightarrow\; cos^2\,\alpha = \frac{1}{10} \;\rightarrow\; cos\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

$sen^2\,\alpha = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} \;\rightarrow\; sen\,\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

2 **Sabiendo que el ángulo α es obtuso, completa la siguiente tabla:**

sen α	**0,92**				**0,5**	
cos α			**–0,12**	**–0,8**		
tg α		**–0,75**				**–4**

sen α	0,92	0,6	0,99	0,6	0,5	0,96
cos α	–0,39	–0,8	–0,12	–0,8	–0,87	–0,24
tg α	–2,36	–0,75	–8,25	–0,75	–0,57	–4
	a)	b)	c)	d)	e)	f)

a) $sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1 \;\rightarrow\; 0{,}92^2 + cos^2\,\alpha = 1 \;\rightarrow\; cos^2\,\alpha = 1 - 0{,}92^2$

$cos^2\,\alpha = 0{,}1536 \;\rightarrow\; cos\,\alpha = -0{,}39$

$\uparrow$

α obtuso $\rightarrow$ $cos\,\alpha < 0$

$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = -2{,}36$

(Se podrían calcular directamente con la calculadora $\alpha = sen^{-1}\,0{,}92$, teniendo en cuenta que el ángulo está en el segundo cuadrante).

b) $\frac{1}{cos^2\,\alpha} = 1 + tg^2\,\alpha \;\rightarrow\; \frac{1}{cos^2\,\alpha} = 1 + 0{,}5625 \;\rightarrow\; cos^2\,\alpha = 0{,}64 \;\rightarrow\; cos\,\alpha = -0{,}8$

$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} \;\rightarrow\; sen\,\alpha = tg\,\alpha \cdot cos\,\alpha =$

$(-0{,}75) \cdot (-0{,}8) = 0{,}6$

c) $sen^2\,\alpha = 1 - cos^2\,\alpha = 1 - 0{,}0144 = 0{,}9856 \;\rightarrow\; sen\,\alpha = 0{,}99$

$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{0{,}99}{-0{,}12} = -8{,}25$

d) $sen^2\,\alpha = 1 - cos^2\,\alpha = 1 - 0{,}64 = 0{,}36 \;\rightarrow\; sen\,\alpha = 0{,}6$

$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{0{,}6}{-0{,}8} = 0{,}75$

(NOTA: es el mismo ángulo que el del apartado b)).

e) $cos^2\,\alpha = 1 - sen^2\,\alpha = 1 - 0{,}25 = 0{,}75 \;\rightarrow\; cos\,\alpha = -0{,}87$

$tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{0{,}5}{-0{,}87} = -0{,}57$

f) $\dfrac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + tg^2\,\alpha = 1 + 16 \;\rightarrow\; \cos^2 \alpha = 0{,}059 \;\rightarrow\; \cos \alpha = -0{,}24$

$sen\,\alpha = tg\,\alpha \cdot \cos\alpha = (-4)\cdot(-0{,}24) = 0{,}96$

3 **Halla las restantes razones trigonométricas de** α**:**

a) $\boldsymbol{sen\,\alpha = -4/5 \qquad \alpha < 270°}$

b) $\boldsymbol{\cos\alpha = 2/3 \qquad tg\,\alpha < 0}$

c) $\boldsymbol{tg\,\alpha = -3 \qquad \alpha < 180°}$

a) $\left.\begin{array}{l} sen\,\alpha < 0 \\ \alpha < 270° \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 3.^{er}\text{ cuadrante} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} sen\,\alpha < 0 \\ \cos\alpha < 0 \\ tg\,\alpha > 0 \end{array}\right.$

- $\cos^2\alpha = 1 - sen^2\,\alpha = 1 - \dfrac{16}{25} = \dfrac{9}{25} \rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$

- $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{-4/5}{-3/5} = \dfrac{4}{3}$

b) $\left.\begin{array}{l} \cos\alpha > 0 \\ tg\,\alpha < 0 \end{array}\right\} \rightarrow sen\,\alpha < 0 \rightarrow \alpha \in 4.°$ cudrante

- $sen^2\,\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9} \rightarrow sen\,\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

- $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

c) $\left.\begin{array}{l} tg\,\alpha < 0 \\ \alpha < 180° \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in 2.°\text{ cuadrante}$ $\quad sen\,\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$

- $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\,\alpha + 1 = 9 + 1 = 10 \rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{10} \rightarrow \cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

- $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} \rightarrow sen\,\alpha = tg\,\alpha \cdot \cos\alpha = (-3)\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right) = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

4 **Expresa con un ángulo del primer cuadrante:**

a) ***sen*** **150°**	**b)** ***cos*** **135°**	**c)** ***tg*** **210°**
d) ***cos*** **225°**	**e)** ***sen*** **315°**	**f)** ***tg*** **120°**
g) ***tg*** **340°**	**h)** ***cos*** **200°**	**i)** ***sen*** **290°**

a) $150° = 180° - 30° \rightarrow sen\,150° = sen\,30°$

b) $135° = 180° - 45° \rightarrow \cos 135° = -\cos 45°$

c) $210° = 180° + 30° \quad \rightarrow \quad tg\ 210° = \dfrac{sen\ 210°}{cos\ 210°} = \dfrac{-sen\ 30°}{-cos\ 30°} = tg\ 30°$

d) $255° = 270° - 15° \quad \rightarrow \quad cos\ 255° = -sen\ 15°$

e) $315° = 360° - 45° \quad \rightarrow \quad sen\ 315° = -sen\ 45°$

f) $120° = 180° - 60° \quad \rightarrow \quad tg\ 120° = \dfrac{sen\ 120°}{cos\ 120°} = \dfrac{sen\ 60°}{-cos\ 60°} = -tg\ 60°$

$\left(\text{También } 120° = 90° + 30° \quad \rightarrow \quad tg\ 120° = \dfrac{sen\ 120°}{cos\ 120°} = \dfrac{-cos\ 30°}{sen\ 30°} = -\dfrac{1}{tg\ 30°}\right)$

g) $340° = 360° - 20° \quad \rightarrow \quad tg\ 340° = \dfrac{sen\ 340°}{cos\ 340°} = \dfrac{-sen\ 20°}{cos\ 20°} = -tg\ 20°$

h) $200° = 180° + 20° \quad \rightarrow \quad cos\ 200° = -cos\ 20°$

i) $290° = 270° + 20° \quad \rightarrow \quad sen\ 290° = -cos\ 20°$

(También $290° = 360° - 70° \quad \rightarrow \quad sen\ 290° = -sen\ 70°$)

5 **Si $sen\ \alpha = 0{,}35$ y $\alpha < 90°$, halla:**

a) $sen\ (180° - \alpha)$ **b)** $sen\ (\alpha + 90°)$ **c)** $sen\ (180° + \alpha)$

d) $sen\ (360° - \alpha)$ **e)** $sen\ (90° - \alpha)$ **f)** $sen\ (360° + \alpha)$

a) $sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha = 0{,}35$

b) $\left.\begin{array}{l} sen\ (\alpha + 90°) = cos\ \alpha \\ sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1 \quad \rightarrow \quad cos^2\ \alpha = 1 - 0{,}35^2 = 0{,}8775 \quad \Rightarrow \quad cos\ \alpha \approx 0{,}94 \end{array}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow \quad sen\ (\alpha + 90°) = cos\ \alpha = 0{,}94$

c) $sen\ (180° + \alpha) = -sen\ \alpha = -0{,}35$

d) $sen\ (360° - \alpha) = -sen\ \alpha = -0{,}35$

e) $sen\ (90° - \alpha) = cos\ \alpha = 0{,}94$ (calculado en el apartado b))

f) $sen\ (360° + \alpha) = sen\ \alpha = 0{,}35$

6 **Si $tg\ \alpha = 2/3$ y $0 < \alpha < 90°$, halla:**

a) $sen\ \alpha$ **b)** $cos\ \alpha$ **c)** $tg\ (90° - \alpha)$

d) $sen\ (180° - \alpha)$ **e)** $cos\ (180° + \alpha)$ **f)** $tg\ (360° - \alpha)$

a) $tg\ \alpha = \dfrac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \quad \rightarrow \quad sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot cos\ \alpha$

$\dfrac{1}{cos^2\ \alpha} \qquad \dfrac{1}{cos^2\ \alpha} = tg^2\ \alpha + 1 \quad \rightarrow \quad =$

$$\rightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{9}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$sen\ \alpha = tg\ \alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

b) Calculado en el apartado anterior: $cos\ \alpha = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

c) $tg\ (90° - \alpha) = \dfrac{sen\ (90° - \alpha)}{cos\ (90° - \alpha)} = \dfrac{cos\ \alpha}{sen\ \alpha} = \dfrac{3}{2}$

d) $sen\ (180° - \alpha) = sen\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$

e) $cos\ (180° + \alpha) = -cos\ \alpha = \dfrac{-3\sqrt{13}}{13}$

f) $tg\ (360° - \alpha) = \dfrac{sen\ (360° - \alpha)}{cos\ (360° - \alpha)} = \dfrac{-sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = -tg\ \alpha = -\dfrac{2}{3}$

7 Halla con la calculadora el ángulo α:

a) $sen\ \alpha = -0,75 \quad \alpha < 270°$

b) $cos\ \alpha = -0,37 \quad \alpha > 180°$

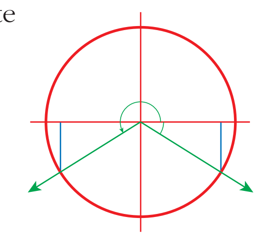
c) $tg\ \alpha = 1,38 \quad sen\ \alpha < 0$

d) $cos\ \alpha = 0,23 \quad sen\ \alpha < 0$

a) Con la calculadora $\rightarrow \alpha = -48°\ 35'\ 25'' \in$ 4.° cuadrante

Como debe ser $\left.\begin{cases} sen\ \alpha < 0 \\ \alpha < 270° \end{cases}\right\} \rightarrow \alpha \in$ 3.^er cuadrante

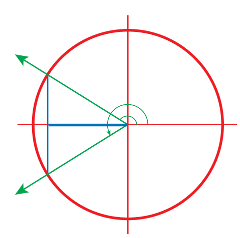
Luego $\alpha = 180° + 48°\ 35'\ 25'' = 228°\ 35'\ 25''$



b) Con la calculadora: $111°\ 42'\ 56,3''$

$\left.\begin{array}{l} cos\ \alpha < 0 \\ \alpha > 180° \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha \in 3.^{er} \text{ cuadrante} \\ \alpha = 360° - 111°\ 42'\ 56,3'' \end{array}\right\} \rightarrow$

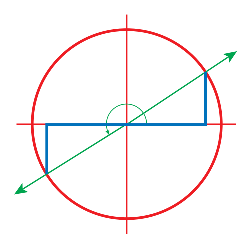
$\rightarrow \alpha = 248°\ 17'\ 3,7''$



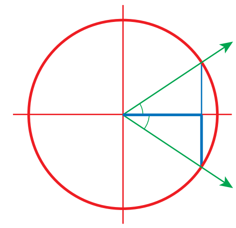
c) $\left.\begin{array}{l} tg\ \alpha = 1,38 > 0 \\ sen\ \alpha < 0 \end{array}\right\} cos < 0 \rightarrow \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

Con la calculadora: $tg^{-1}\ 1,38 = 54°\ 4'\ 17,39''$

$\alpha = 180° + 54°\ 4'\ 17,39'' = 234°\ 4'\ 17,4''$



d) $\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = 0{,}23 > 0 \\ \operatorname{sen}\alpha < 0 \end{array}\right\} \rightarrow \alpha \in$ 4.° cuadrante



Con la calculadora: $\cos^{-1} 0{,}23 = 76° \ 42' \ 10{,}5''$

$\alpha = -76° \ 42' \ 10{,}5'' = 283° \ 17' \ 49{,}6''$

Resolución de triángulos rectángulos

8 **Resuelve los siguientes triángulos rectángulos ($\hat{C}$ = 90°) hallando la medida de todos los elementos desconocidos:**

a) $a = 5$ **cm,** $b = 12$ **cm.** **Halla** c, $\hat{A}$, $\hat{B}$.

b) $a = 43$ **m,** $\hat{A} = 37°$. **Halla** b, c, $\hat{B}$.

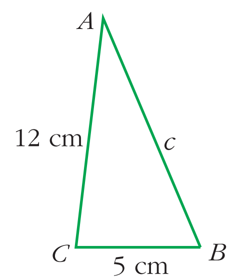
c) $a = 7$ **m,** $\hat{B} = 58°$. **Halla** b, c, $\hat{A}$.

d) $c = 5{,}8$ **km,** $\hat{A} = 71°$. **Halla** a, b, $\hat{B}$.

a) $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \rightarrow c = 13$ cm

$tg\ \hat{A} = \dfrac{5}{12} = 0{,}416 \rightarrow A = 22° \ 37' \ 11{,}5°$

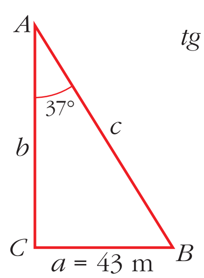
$\hat{B} = 90° - \hat{A} = 67° \ 22' \ 48{,}5''$

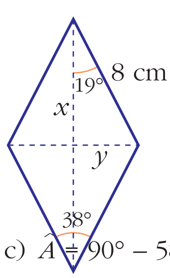


b) $\hat{B} = 90° - 37° = 53°$

$\operatorname{sen}\ \hat{A} = \dfrac{43}{c} \rightarrow c = \dfrac{43}{\operatorname{sen} 37°} = 71{,}45$ m

$tg\ \hat{A} = \dfrac{43}{b} \rightarrow b = \dfrac{43}{tg\ 37°} = 57{,}06$ m

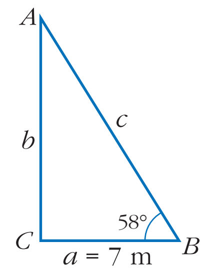




c) $\hat{A} = 90° - 58° = 32°$

$\cos\ \hat{B} = \dfrac{7}{c} \rightarrow c = \dfrac{7}{\cos 58°} = 13{,}2$ m

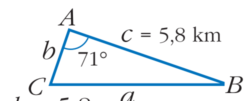
$tg\ \hat{B} = \dfrac{b}{7} \rightarrow b = 7 \cdot tg\ 58° = 11{,}2$ m


A
b
c
58°
C
B
a = 7 m

d) $\hat{B} = 90° - 71° = 19°$

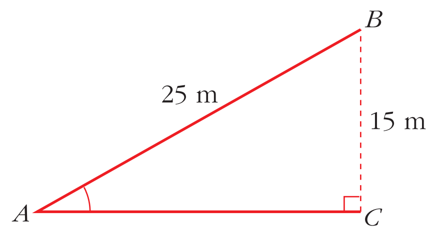
$sen\ \hat{A} = \frac{a}{5,8} \to a = 5,8 \cdot sen\ 71° = 5,48$ km

$cos\ \hat{A} = \frac{b}{5,8} \to b = 5,8$

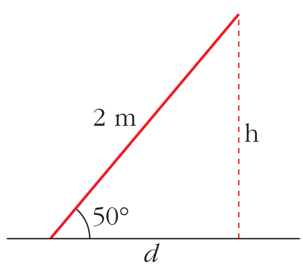


9 **Si queremos que una cinta transportadora de 25 metros eleve la carga hasta una altura de 15 metros, ¿qué ángulo se deberá inclinar la cinta?**

$sen\ \hat{A} = \frac{15}{25} = 0,6 \to \hat{A} = 36°\ 52'\ 11,6''$



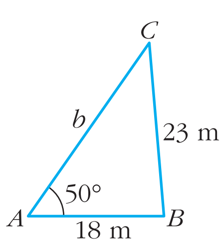
10 **Una escalera de 2 m está apoyada en una pared formando un ángulo de 50° con el suelo. Halla la altura a la que llega y la distancia que separa su base de la pared.**



$sen\ 50° = \frac{h}{2} \to h = 1,53$ m

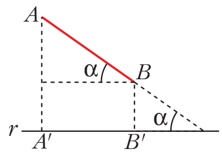
$cos\ 50° = \frac{d}{2} \to d = 1,29$ m

11 **El lado de un rombo mide 8 cm y el ángulo menor es de 38°. ¿Cuánto miden las diagonales del rombo?**



$sen\ 19° = \frac{y}{8} \to y = 8 \cdot sen\ 19° = 2,6$ cm $\to d = 5,2$ cm

$cos\ 38° = \frac{x}{8} \to x = 8 \cdot cos\ 19° = 7,6$ cm $\to D = 15,2$ cm

12 

Calcula la proyección del segmento $\overline{AB}$ = 15 cm sobre la recta *r* en los siguientes casos:

a) $\alpha = 72°$ **b)** $\alpha = 50°$

c) $\alpha = 15°$ **d)** $\alpha = 90°$

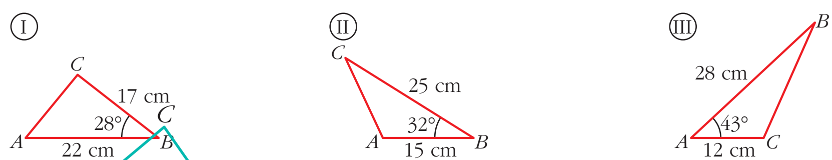
a) $\cos\alpha = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \quad \rightarrow \quad \overline{A'B'} = 15 \cos 72° = 4{,}64$ cm

b) $\overline{A'B'} = 15 \cos 5° = 9{,}64$ cm

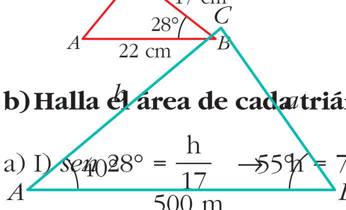
c) $\overline{A'B'} = 15 \cos 15° = 14{,}49$ cm

d) $\overline{A'B'} = 15 \cos 90° = 0$ cm

13 **a) Halla la altura correspondiente al lado *AB* en cada uno de los siguientes triángulos:**



b) Halla el área de cada triángulo.



a) I) $\operatorname{sen} 28° = \dfrac{h}{17} \quad \rightarrow \quad h = 7{,}98$ cm

II) $\operatorname{sen} 32° = \dfrac{h}{25} \quad \rightarrow \quad h = 13{,}25$ cm

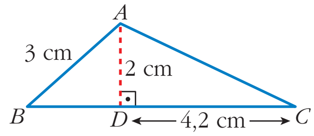
III) $\operatorname{sen} 43° = \dfrac{h}{12} \quad \rightarrow \quad h = 8{,}18$ cm

b) I) $A = \dfrac{22 \cdot 7{,}98}{2} = 87{,}78 \text{ cm}^2$

II) $A = \dfrac{15 \cdot 13{,}25}{2}\ 99{,}38 \text{ cm}^2$

III) $A = \dfrac{28 \cdot 8{,}18}{2} = 114{,}52 \text{ cm}^2$

14 **En el triángulo *ABC*, *AD* es la altura relativa al lado *BC*. Con los datos de la figura, halla los ángulos del triángulo *ABC*.**



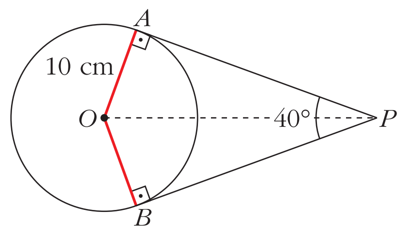
En $\widehat{ABD}$: $\operatorname{sen} \hat{B} = \dfrac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \hat{B} = 41°\ 48'\ 37''$; $\widehat{BAD} = 90° - \hat{B} = 48°\ 11'\ 23''$

En $\widehat{ADC}$: $\operatorname{tg} \hat{C} = \dfrac{2}{4{,}2} \quad \rightarrow \quad \hat{C} = 25°\ 27'\ 48''$; $\widehat{DAC} = 64°\ 32'\ 12''$

Ángulos: $\hat{A} = 112°\ 43'\ 35''$; $\hat{B} = 41°\ 48'\ 37''$; $\hat{C} = 25°\ 27'\ 48''$

15 **Desde un punto P exterior a una circunferencia de 10 cm de radio, se trazan las tangentes a dicha circunferencia que forman estre sí un ángulo de 40°.**

Calcula la distancia de P a cada uno de los puntos de tangencia.



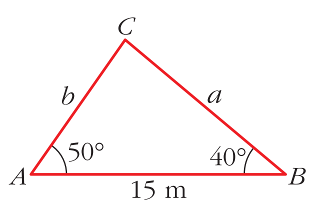
En $\widehat{OAP}$: $tg\ 20° = \dfrac{10}{\overline{AP}} \rightarrow \overline{AP} = 27{,}47$ cm

Distancia de P a cada uno de los puntos de tangencia: 27,47 cm

Página 123

Teorema de los senos

16 **Calcula a y b en el triángulo ABC en el que: $\hat{A} = 55°$, $\hat{B} = 40°$, $c = 15$ m.**



$\hat{C} = 180° - (55° + 40°) = 85°$

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow \frac{a}{sen\ 55°} = \frac{15}{sen\ 85°} \rightarrow a = 12{,}33 \text{ m}$$

$$\frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow \frac{b}{sen\ 40°} = \frac{15}{sen\ 85°} \rightarrow b = 9{,}68 \text{ m}$$

17 **Halla el ángulo $\hat{C}$ y el lado b en el triángulo ABC en el que: $\hat{A} = 50°$, $a = 23$ m, $c = 18$ m.**

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow \frac{23}{sen\ 50°} = \frac{18}{sen\ \hat{C}} \rightarrow$$

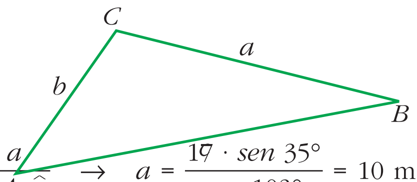
$$\rightarrow sen\ \hat{C} = \frac{18 \cdot sen\ 50°}{23} \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{C} = 36°\ 50'\ 6'' \text{ (Tiene que ser } \hat{C} < \hat{A}\text{)}$$

$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 93°\ 9'\ 54''$

$$\frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{a}{sen\ \hat{A}} \rightarrow b = \frac{23 \cdot sen\ 93°\ 9'\ 54''}{sen\ 50°} \rightarrow b = 29{,}98 \text{ m}$$

18 **Resuelve los siguientes triángulos:**



a) $\hat{A} = 35°$ $\quad \hat{C} = 42°$ $\quad b = 17$ **m**

b) $\hat{B} = 105°$ $\quad b = 30$ **m** $\quad a = 18$ **m**

a) $\hat{B} = 180° - (35° + 42°) = 103°; \quad \dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} \;\rightarrow\; a = \dfrac{17 \cdot \text{sen } 35°}{\text{sen } 103°} = 10 \text{ m}$

$\dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}} \;\rightarrow\; c = \dfrac{17 \cdot \text{sen } 42°}{\text{sen } 103°} \;\rightarrow\; c = 11{,}67 \text{ m}$

b) $\dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \dfrac{a}{\text{sen } \hat{A}} \;\rightarrow\; \text{sen } \hat{A} = \dfrac{18 \cdot \text{sen } 105°}{30} \;\rightarrow\; \hat{A} = 35°\ 25'\ 9''; \;\; \hat{C} = 39°\ 34'\ 51''$

$\dfrac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \dfrac{c}{\text{sen } \hat{C}} \;\rightarrow\; c = \dfrac{30 \cdot \text{sen } 39°\ 34'\ 51''}{\text{sen } 105°} \;\rightarrow\; c = 19{,}79 \text{ m}$

19 **Dos amigos situados en dos puntos, *A* y *B*, que distan 500 m, ven la torre de una iglesia, *C*, bajo los ángulos** $\widehat{BAC} = 40°$ **y** $\widehat{ABC} = 55°$**. ¿Qué distancia hay entre cada uno de ellos y la iglesia?**

$\hat{C} = 180° - (40° + 55°) = 85°$

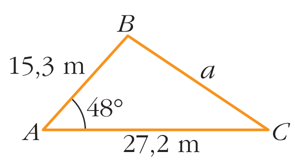
$\dfrac{a}{\text{sen } 40°} = \dfrac{500}{\text{sen } 85°} \;\rightarrow\; a = 322{,}62 \text{ m}$

$\dfrac{b}{\text{sen } 55°} = \dfrac{500}{\text{sen } 85°} \;\rightarrow\; b = 411{,}14 \text{ m}$

La distancia de A a la iglesia es de 411,14 m, y la de B a la iglesia, 322,62 m.

Teorema del coseno

20 **Calcula *a* en el triángulo *ABC*, en el que:** $\hat{A} = 48°$, $b = 27{,}2$ **m,** $c = 15{,}3$ **m.**

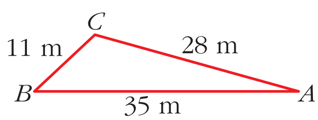


$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

$a^2 = 27{,}2^2 + 15{,}3^2 - 2 \cdot 27{,}2 \cdot 15{,}3 \cos 48° \;\rightarrow$

$\rightarrow\; a = 20{,}42 \text{ m}$

21 **Halla los ángulos del triángulo *ABC* en el que** $a = 11$ **m,** $b = 28$ **m,** $c = 35$ **m.**



$11^2 = 28^2 + 35^2 - 2 \cdot 28 \cdot 35 \cos \hat{A} \;\rightarrow$

$\rightarrow\; \cos \hat{A} = \dfrac{28^2 + 35^2 - 11^2}{2 \cdot 28 \cdot 35} \;\rightarrow\; \hat{A} = 15°\ 34'\ 41''$

$28^2 = 11^2 + 35^2 - 2 \cdot 11 \cdot 35 \cos \hat{B} \;\rightarrow\; \cos \hat{B} = \dfrac{11^2 + 35^2 - 28^2}{2 \cdot 11 \cdot 35} \;\rightarrow\; \hat{B} = 43°\ 7'\ 28''$

$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) \;\rightarrow\; \hat{C} = 121°\ 17'\ 51''$

22 **Resuelve los siguientes triángulos:**

a) $\boldsymbol{b = 32}$ **cm** $\quad$ $\boldsymbol{a = 17}$ **cm** $\quad$ $\boldsymbol{\hat{C} = 40°}$

b) $\boldsymbol{a = 85}$ **cm** $\quad$ $\boldsymbol{c = 57}$ **cm** $\quad$ $\boldsymbol{\hat{B} = 65°}$

c) $\boldsymbol{a = 23}$ **cm** $\quad$ $\boldsymbol{b = 14}$ **cm** $\quad$ $\boldsymbol{c = 34}$ **cm**

a) $c^2 = 32^2 + 17^2 - 2 \cdot 32 \cdot 17 \cos 40° \quad \rightarrow \quad c = 21{,}9$ cm

$17^2 = 32^2 + 21{,}9^2 - 2 \cdot 32 \cdot 21{,}9 \cos \hat{A} \quad \rightarrow \quad \hat{A} = 29° \; 56' \; 8''$

$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) \quad \rightarrow \quad \hat{B} = 110° \; 3' \; 52''$

b) $b^2 = 85^2 + 57^2 - 2 \cdot 85 \cdot 57 \cos 65° \quad \rightarrow \quad b = 79{,}87$ cm

$57^2 = 85^2 + 79{,}87^2 - 2 \cdot 85 \cdot 79{,}87 \cos \hat{C} \quad \rightarrow \quad \hat{C} = 40° \; 18' \; 5''$

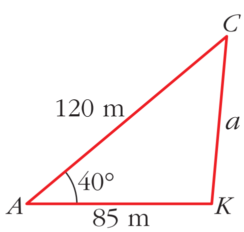
$\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) \quad \rightarrow \quad \hat{A} = 74° \; 41' \; 55''$

c) $23^2 = 14^2 + 34^2 - 2 \cdot 14 \cdot 34 \cos \hat{A} \quad \rightarrow \quad \hat{A} = 30° \; 10' \; 29''$

$14^2 = 23^2 + 34^2 - 2 \cdot 23 \cdot 34 \cos \hat{B} \quad \rightarrow \quad \hat{B} = 17° \; 48' \; 56''$

$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) \quad \rightarrow \quad \hat{C} = 133° \; 0' \; 35''$

23 **Desde la puerta de mi casa, *A*, veo el cine, *C*, que está a 120 m, y el kiosko, *K*, que está a 85 m, bajo un ángulo** $\boldsymbol{\widehat{CAK} = 40°}$**. ¿Qué distancia hay entre el cine y el kiosko?**



$a^2 = 120^2 + 85^2 - 2 \cdot 120 \cdot 85 \cos 40°$

$a = 77{,}44$ m es la distancia entre el cine y el kiosko.

$\rightarrow \dfrac{x}{tg\, 15°} = \dfrac{2{,}5 + x}{tg\, 55°} \rightarrow$

Resolución de triángulos cualesquiera

24 **Resuelve los siguientes triángulos:**

a) $\boldsymbol{a = 100}$ **m** $\quad$ $\boldsymbol{\hat{B} = 47°}$ $\quad$ $\boldsymbol{\hat{C} = 63°}$

b) $\boldsymbol{b = 17}$ **m** $\quad$ $\boldsymbol{\hat{A} = 70°}$ $\quad$ $\boldsymbol{\hat{C} = 35°}$

c) $\boldsymbol{a = 70}$ **m** $\quad$ $\boldsymbol{b = 55}$ **m** $\quad$ $\boldsymbol{\hat{C} = 73°}$

d) $\boldsymbol{a = 122}$ **m** $\quad$ $\boldsymbol{c = 200}$ **m** $\quad$ $\boldsymbol{\hat{B} = 120°}$

e) $\boldsymbol{a = 25}$ **m** $\quad$ $\boldsymbol{b = 30}$ **m** $\quad$ $\boldsymbol{c = 40}$ **m**

f) $\boldsymbol{a = 100}$ **m** $\quad$ $\boldsymbol{b = 185}$ **m** $\quad$ $\boldsymbol{c = 150}$ **m**

g) $\boldsymbol{a = 15}$ **m** $\quad$ $\boldsymbol{b = 9}$ **m** $\quad$ $\boldsymbol{\hat{A} = 130°}$

h) $\boldsymbol{b = 6}$ **m** $\quad$ $\boldsymbol{c = 8}$ **m** $\quad$ $\boldsymbol{\hat{C} = 57°}$

a) • $\widehat{A} = 180° - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 70°$

• $\dfrac{a}{sen\ \widehat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \widehat{B}} \rightarrow$

$\dfrac{100}{sen\ 70°} \rightarrow \dfrac{b}{sen\ 47°} =$

$\rightarrow b = \dfrac{100 \cdot sen\ 47°}{sen\ 70°} =$

77,83 m

• $\dfrac{100}{sen\ 70°} = \dfrac{c}{sen\ 63°} \rightarrow c = \dfrac{100 \cdot sen\ 63°}{sen\ 70°} = 94{,}82$ m

b) • $\widehat{B} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 75°$

• $\dfrac{17}{sen\ 75°} = \dfrac{a}{sen\ 70°} \rightarrow a = \dfrac{17 \cdot sen\ 70°}{sen\ 75°} = 16{,}54$ m

• $\dfrac{17}{sen\ 75°} = \dfrac{c}{sen\ 35°} \rightarrow c =$

$\dfrac{17 \cdot sen\ 35°}{sen\ 75°} = 10{,}09$ m

c) • $c^2 = 70^2 + 55^2 - 2 \cdot 70 \cdot 55 \cdot cos\ 73° = 5\,673{,}74 \rightarrow c = 75{,}3$ m

• $70^2 = 55^2 + 75{,}3^2 - 2 \cdot 55 \cdot 75{,}3 \cdot cos\ \widehat{A} \rightarrow$

$\rightarrow cos\ \widehat{A} = \dfrac{55^2 + 75{,}3^2 - 70^2}{2 \cdot 55 \cdot 75{,}3} = 0{,}4582 \rightarrow \widehat{A} = 62°\ 43'\ 49{,}4''$

• $\widehat{B} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 44°\ 16'\ 10{,}6''$

d) • $b^2 = 122^2 + 200^2 - 2 \cdot 122 \cdot 200 \cdot cos\ 120° = 79\,284 \rightarrow b = 281{,}6$ m

• $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \widehat{A} \rightarrow cos\ \widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \rightarrow$

$\rightarrow cos\ \widehat{A} = \dfrac{281{,}6^2 + 200^2 - 122^2}{2 \cdot 281{,}6 \cdot 200} =$

$0{,}92698 \rightarrow \widehat{A} = 22°\ 1'\ 54{,}45''$

• $\widehat{C} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 37°\ 58'\ 55{,}5''$

e) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \widehat{A} \rightarrow$

$\rightarrow cos\ \widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{30^2 + 40^2 - 25^2}{2 \cdot 30 \cdot 40} = 0{,}7812 \rightarrow \widehat{A} = 38°\ 37'\ 29{,}4''$

• $cos\ \widehat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} =$

$\dfrac{25^2 + 40^2 - 30^2}{2 \cdot 25 \cdot 40} = 0{,}6625 \rightarrow \widehat{B} = 48°\ 30'\ 33''$

• $\widehat{C} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 92°\ 51'\ 57{,}6''$

f) • $cos\ \widehat{A} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{185^2 + 150^2 - 100^2}{2 \cdot 185 \cdot 150} = 0{,}84189 \rightarrow \widehat{A} = 32°\ 39'\ 34{,}4''$

- $cos\ \hat{B} = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{100^2 + 150^2 - 185^2}{2 \cdot 100 \cdot 150} = -0{,}0575 \quad \to \quad \hat{B} = 93°\ 17'\ 46{,}7''$
- $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 54°\ 2'\ 38{,}9''$

g) • $\dfrac{15}{sen\ 130°} = \dfrac{9}{sen\ \hat{B}} \rightarrow sen\ \hat{B} = \dfrac{9 \cdot sen\ 130°}{15} = 0{,}4596 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = 27°\ 21'\ 46{,}8'' \\ \hat{B}_2 = 152°\ 38'\ 13{,}2'' \end{cases}$$

La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180°$.

• $\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 22°\ 38'\ 13{,}2''$

• $\dfrac{15}{sen\ 130°} = \dfrac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow c = \dfrac{15 \cdot sen\ \hat{C}}{sen\ 130°} = 7{,}54$ m

h) • $\dfrac{8}{sen\ 57°} = \dfrac{6}{sen\ \hat{B}} \rightarrow sen\ \hat{B} = \dfrac{6 \cdot sen\ 57°}{8} = 0{,}6290 \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = 38°\ 58'\ 35{,}7'' \\ \hat{B}_2 = 141°\ 1'\ 24{,}3'' \end{cases}$$

La solución $\hat{B}_2$ no es válida, pues $\hat{C} + \hat{B}_2 > 180°$.

• $\hat{A} = 180° - (\hat{B} + \hat{C}) = 84°\ 1'\ 24{,}3''$

• $\dfrac{8}{sen\ 57°} = \dfrac{a}{sen\ \hat{A}} \rightarrow a = \dfrac{8 \cdot sen\ \hat{A}}{sen\ 57°} = 9{,}5$ m

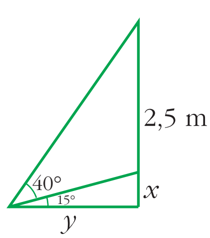
PARA RESOLVER

25 **Una estatua de 2,5 m de alto está colocada sobre un pedestal. Desde un punto del suelo se ve el pedestal bajo un ángulo de 15° y la estatua, bajo un ángulo de 40°. Calcula la altura del pedestal.**

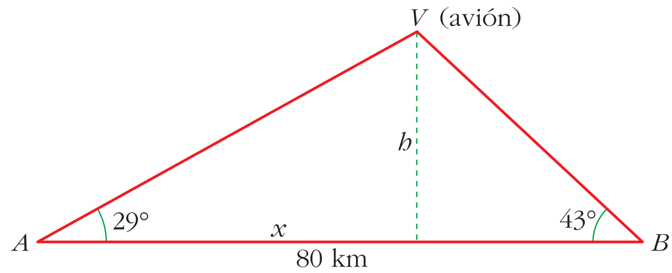
$tg\ 15° = \dfrac{x}{y} \rightarrow y = \dfrac{x}{tg\ 15°}$

$tg\ 55° = \dfrac{2{,}5 + x}{y} \rightarrow y = \dfrac{2{,}5 + x}{tg\ 55°}$

$\rightarrow x\ tg\ 55° = 2{,}5\ tg\ 15° + x\ tg\ 15° \rightarrow x = \dfrac{2{,}5 \cdot tg\ 15°}{tg\ 55° - tg\ 15°} = 0{,}58$ m (el pedestal)



26 **Un avión vuela entre dos ciudades, *A* y *B*, que distan 80 km. Las visuales desde el avión a *A* y a *B* forman ángulos de 29° y 43° con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión?**



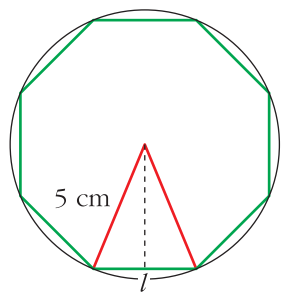
$$tg\ 29° = \frac{h}{x} \quad \to \quad x = \frac{h}{tg\ 29°}$$

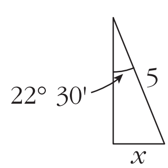
$$tg\ 43° = \frac{h}{80 - x} \quad \to \quad x = \frac{80\ tg\ 43° - h}{tg\ 43°}$$

$$\frac{h}{tg\ 29°} = \frac{80\ tg\ 43° - h}{tg\ 43°} \quad \to \quad h\ tg\ 43° = 80\ tg\ 43°\ tg\ 29° - h\ tg\ 29° \quad \to$$

$$\to \quad h = \frac{80\ tg\ 43°\ tg\ 29°}{tg\ 43° + tg\ 29°} = 27{,}8 \text{ km}$$

27 **Halla el lado del octógono inscrito y del octógono circunscrito en una circunferencia de radio 5 cm.**



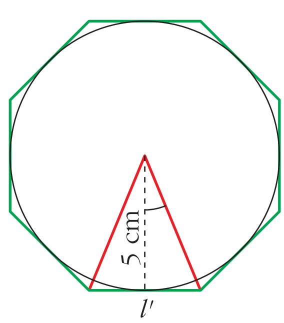


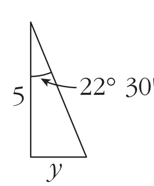
$$\frac{360°}{8} = 45°$$

$$sen\ 22°\ 30' = \frac{x}{5} \quad \to \quad x = 1{,}91 \text{ cm}$$

Lado del octógono inscrito:

$l = 3{,}82$ cm



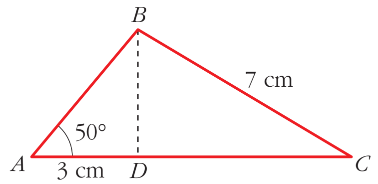


$$tg\ 22°\ 30' = \frac{y}{5} \quad \to \quad y = 2{,}07 \text{ cm}$$

Lado del octógono circunscrito:

$l' = 4{,}14$ cm

28 **Calcula los lados y los ángulos del triángulo *ABC*.**



En el triángulo rectángulo ABD, halla $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$. En BDC, halla $\hat{C}$ y $\overline{DC}$. Para hallar $\hat{B}$, sabes que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$.

- En $\widehat{ABD}$:

$$\cos 50° = \frac{3}{\overline{AB}} \rightarrow$$

$$tg\ 50° = \frac{\overline{BD}}{3} \rightarrow \overline{BD} = 3\ tg\ 50° = 3{,}6 \text{ cm}$$

- En $\widehat{BDC}$:

$$sen\ \hat{C} = \frac{\overline{BD}}{7} = \frac{3{,}6}{7} \approx 0{,}51$$

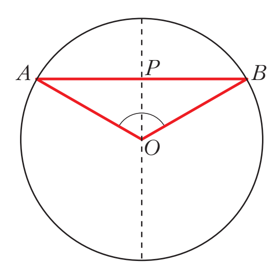
$$\cos \hat{C} = \frac{\overline{DC}}{7} \rightarrow \overline{DC} = 7 \cdot \cos \hat{C} \approx 6 \text{ c}$$

- Así, ya tenemos:

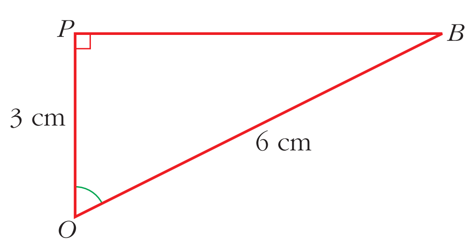
$\hat{A} = 50°$	$a = 7$ cm
$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 99°\ 3'\ 1''$	$b = \overline{AD} + \overline{DC} = 9$ cm
$\hat{C} = 30°\ 56'\ 59''$	$c = 4{,}7$ cm

29 **En una circunferencia de radio 6 cm trazamos una cuerda *AB* a 3 cm del centro.**

Halla el ángulo $\widehat{AOB}$.



El triángulo AOB es isósceles.

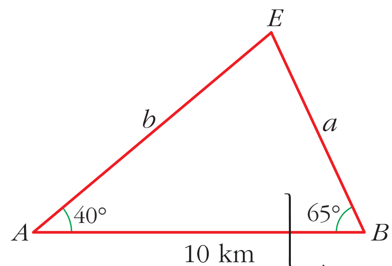


$$\left.\begin{array}{l} \overline{OP} = 3 \text{ cm} \\ \overline{OB} = 6 \text{ cm} \\ \widehat{OPB} = 90° \end{array}\right\} \rightarrow \cos \widehat{POB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow \widehat{POB} = 60° \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \widehat{AOB} = 2 \cdot \widehat{POB} = 2 \cdot 60° = 120°$$

$$\Big\} \rightarrow$$

30 **Para localizar una emisora clandestina, dos receptores, *A* y *B*, que distan entre sí 10 km, orientan sus antenas hacia el punto donde está la emisora. Estas direcciones forman con *AB* ángulos de 40° y 65°. ¿A qué distancia de *A* y *B* se encuentra la emisora?**



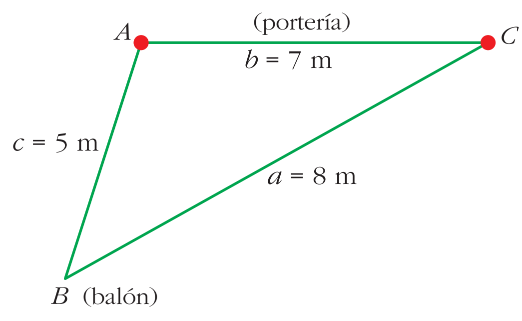
$\hat{E} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 75°$

Aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{sen\ 40°} = \frac{10}{sen\ 75°} \rightarrow a = \frac{10 \cdot sen\ 40°}{sen\ 75°} = 6{,}65 \text{ km} \text{ dista de } B.$$

$$\frac{b}{sen\ 65°} = \frac{10}{sen\ 75°} \rightarrow b = \frac{10 \cdot sen\ 65°}{sen\ 75°} = 9{,}38 \text{ km} \text{ dista de } A.$$

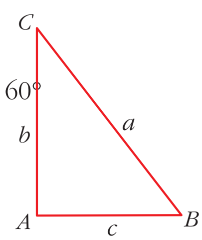
31 **En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?**



Aplicando el teorema del coseno:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot cos\ \hat{B} \rightarrow$

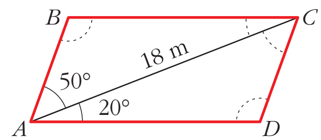
$$\rightarrow cos\ \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = 0{,}5 \rightarrow B = 60°$$



Página 124

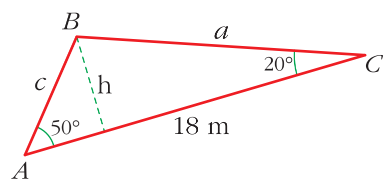
32 **Calcula el área y las longitudes de los lados y de la otra diagonal:**

☛ ***$\widehat{BAC} = \widehat{ACD} = 50°$. Calcula los lados del triángulo ACD y su área. Para hallar la otra diagonal, considera el triángulo ABD.***



- Los dos triángulos en que la diagonal divide al paralelogramo son iguales.

  Luego bastará resolver uno de ellos para calcular los lados:



$\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 110°$

$$\frac{a}{sen\ 50°} = \frac{18}{sen\ 110°} \rightarrow a = \frac{18 \cdot sen\ 50°}{sen\ 110°} = 14,7 \text{ m}$$

$$\frac{c}{sen\ 20°} = \frac{18}{sen\ 110°} \rightarrow c = \frac{18 \cdot sen\ 20°}{sen\ 110°} = 6,6 \text{ m}$$

Así: $\overline{AB} = \overline{CD} = c = 6,6$ m

$\overline{BC} = \overline{AD} = a = 14,7$ m

Para calcular el área del triángulo ABC:

$$sen\ 50° = \frac{h}{c} \rightarrow h = c \cdot sen\ 50° \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Área}_{ABC} = \frac{18 \cdot h}{2} = \frac{18 \cdot c \cdot sen\ 50°}{2} = \frac{18 \cdot 6,6 \cdot sen\ 50°}{2} = 45,5 \text{ m}^2$$

El área del paralelogramo será:

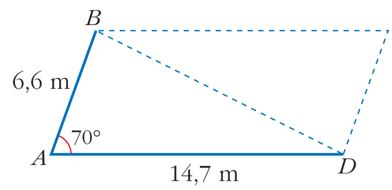
$$\text{Área}_{ABCD} = 2 \cdot \text{Área}_{ABC} = 2 \cdot 45,5 = 91 \text{ m}^2$$

- Para calcular la otra diagonal, consideremos el triángulo ABD:

  Aplicando el teorema del coseno:

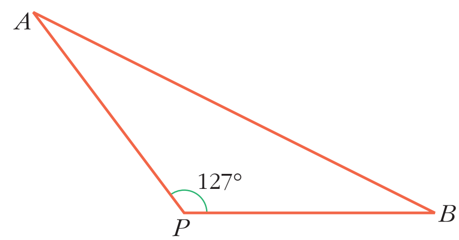
$$\overline{BD}^2 = 6,6^2 + 14,7^2 - 2 \cdot 6,6 \cdot 14,7 \cdot cos\ 70° \approx 193,28 \rightarrow \overline{BD} = 13,9 \text{ m}$$

$\widehat{A} = 50° + 20° = 70°$



33 **Dos barcos parten de un puerto con rumbos distintos que forman un ángulo de 127°. El primero sale a las 10 h de la mañana con una velocidad de 17 nudos, y el segundo sale a las 11 h 30 min, con una velocidad de 26 nudos. Si el alcance de sus equipos de radio es de 150 km, ¿podrán ponerse en contacto a las 3 de la tarde?**

(Nudo = milla / hora; milla = 1 850 m).



La distancia que recorre cada uno en ese tiempo es:

Barco A $\rightarrow$ $\overline{PA} = 17 \cdot 1\,850 \text{ m/h} \cdot 5 \text{ h} = 157\,250 \text{ m}$

Barco B $\rightarrow$ $\overline{PB} = 26 \cdot 1\,850 \text{ m/h} \cdot 3{,}5 \text{ h} = 168\,350 \text{ m}$

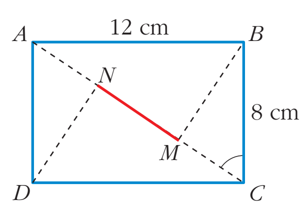
Necesariamente, $\overline{AB} > \overline{PA}$ y $\overline{AB} > \overline{PB}$, luego:

$$\overline{AB} > 168\,350 \text{ m}$$

Como el alcance de sus equipos de radio es 150 000 m, no podrán ponerse en contacto.

(NOTA: Puede calcularse $\overline{AB}$ con el teorema del coseno $\rightarrow$ $\overline{AB} = 291\,432{,}7$ m).

34 **En un rectángulo *ABCD* de lados 8 cm y 12 cm, se traza desde *B* una perpendicular a la diagonal *AC*, y desde *D*, otra perpendicular a la misma diagonal. Sean *M* y *N* los puntos donde esas perpendiculares cortan a la diagonal. Halla la longitud del segmento *MN*.**



☛ ***En el triángulo ABC, halla $\hat{C}$. En el triángulo BMC, halla $\overline{MC}$. Ten en cuenta que:***

$$\overline{MN} = \overline{AC} - 2\,\overline{MC}$$

Los triángulos *AND* y *BMC* son iguales, luego $\overline{AN} = \overline{MC}$

Como $\overline{MN} = \overline{AC} - \overline{AN} - \overline{MC}$, entonces:

$$\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC}$$

Por tanto, basta con calcular $\overline{AC}$ en el triángulo *ABC* y $\overline{MC}$ en el triángulo *BMC*.

• En $\widehat{ABC}$:

$$\overline{AC}^2 = 8^2 + 12^2 = 208 \text{ (por el teorema de Pitágoras)} \;\rightarrow\; \overline{AC} = 14,4 \text{ cm}$$

Calculamos $\hat{C}$ (en $\widehat{ABC}$):

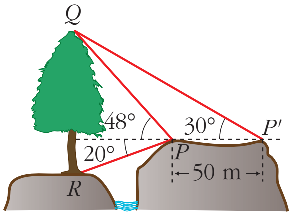
$$tg\ \hat{C} = \frac{12}{8} = 1,5 \;\rightarrow\; \hat{C} = 56°\ 18'\ 35,8''$$

• En $\widehat{BMC}$:

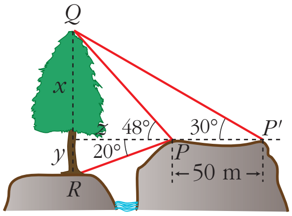
$$cos\ \hat{C} = \frac{\overline{MC}}{8} \;\rightarrow\; \overline{MC} = 8 \cdot cos\ (56°\ 18'\ 35,8'') = 4,4 \text{ cm}$$

Por último: $\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC} = 14,4 - 2 \cdot 4,4 = 5,6$ cm

35 **Halla la altura del árbol *QR* de pie inaccesible y más bajo que el punto de observación, con los datos de la figura.**



Llamemos x e y a las medidas de la altura de las dos partes en que queda dividida la torre según la figura dada; y llamemos z a la distancia de P a la torre.



$$tg\ 48° = \frac{x}{z} \;\rightarrow\; x = z \cdot tg\ 48°$$

$$tg\ 30° = \frac{x}{z + 50} \;\rightarrow\; x = (z + 50)\ tg\ 30°$$

$$\rightarrow\; z \cdot tg\ 48° = (z + 50)\ tg\ 30° \;\rightarrow$$

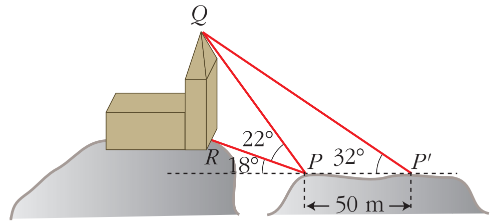
$$\rightarrow\; z \cdot tg\ 48° = z \cdot tg\ 30° + 50 \cdot tg\ 30° \;\rightarrow\; z = \frac{50\ tg\ 30°}{tg\ 48° - tg\ 30°} = 54,13 \text{ m}$$

Sustituyendo en $x = z \cdot tg\ 48° = 54,13 \cdot tg\ 48° = 60,12 \text{ m} = x$

Para calcular y: $tg\ 20° = \dfrac{y}{z} \;\rightarrow\; y = z \cdot tg\ 20° = 54,13 \cdot tg\ 20° = 19,7$ m

Luego: $\overline{QR} = x + y = 79,82$ m mide la altura de la torre.

36 **Calcula la altura de QR, cuyo pie es inaccesible y más alto que el punto donde se encuentra el observador, con los datos de la figura.**



Llamemos x a la distancia del punto más alto a la línea horizontal del observador; y, a la distancia de la base de la torre a la misma línea; y z, a la distancia $\overline{R'P}$, como se indica en la figura.

$$tg\,(18° + 22°) = tg\,40° = \frac{x}{z} \;\rightarrow\; x = z \cdot tg\,40°$$

$$tg\,32° = \frac{x}{z + 50} \;\rightarrow\; x = (z + 50)\,tg\,32°$$

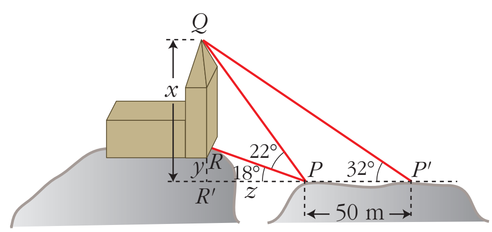
$$\rightarrow\; z \cdot tg\,40° = (z + 50)\,tg\,32° \;\rightarrow\; z = \frac{50\,tg\,32°}{tg\,40° - tg\,32°} = 145{,}84$$

Sustituyendo en $x = z \cdot tg\,40° = 145{,}84 \cdot tg\,40° = 122{,}37$ m

Para calcular y:

$$tg\,18° = \frac{y}{z} \;\rightarrow\; y = z \cdot tg\,18° =$$

$$= 145{,}84 \cdot tg\,18° = 47{,}4 \text{ m}$$

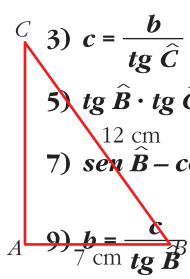


Por tanto:

$\overline{QR} = x - y = 74{,}97$ m mide la altura de la torre.

CUESTIONES TEÓRICAS

37 **Explica si las siguientes igualdades referidas al triángulo ABC son verdaderas o falsas:**



1) $a = \dfrac{b}{sen\,\hat{A}}$ 2) $c = a\cos\hat{B}$

3) $c = \dfrac{b}{tg\,\hat{C}}$ 4) $b = a\,sen\,\hat{C}$

5) $tg\,\hat{B} \cdot tg\,\hat{C} = 1$ 6) $c\,tg\,\hat{B} = b$

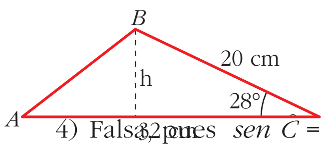
7) $sen\,\hat{B} - \cos\hat{C} = 0$ 8) $a = \dfrac{b}{\cos\hat{C}}$

9) $b = \dfrac{c}{tg\,\hat{B}}$ 10) $\sqrt{1 - sen^2\,\hat{B}} = \dfrac{c}{a}$

11) $sen\ \hat{B} \cdot cos\ \hat{C} = 1$ 12) $\dfrac{sen\ \hat{B}}{cos\ \hat{C}} = 1$

1) Verdadera, pues $sen\ \hat{B} = \dfrac{b}{a} \rightarrow a = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}}$

2) Verdadera, pues $cos\ \hat{B} = \dfrac{c}{a} \rightarrow a \cdot cos\ \hat{B} = c$

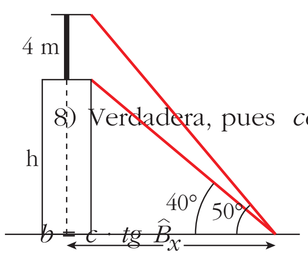


3) Falsa, pues $tg\ \hat{C} = \dfrac{c}{b} \rightarrow c = b \cdot$

4) Falsa, pues $sen\ \hat{C} = \dfrac{c}{a} \rightarrow a \cdot sen\ \hat{C} = c \neq b$

5) Verdadera, pues $tg\ \hat{B} \cdot tg\ \hat{C} = \dfrac{b}{c}$

6) Verdadera, pues $tg\ \hat{B} = \dfrac{b}{c} \rightarrow b = c \cdot tg\ \hat{B}$



7) Verdadera, pues $sen\ \hat{B} - cos\ \hat{C} = \dfrac{b}{a} - \dfrac{b}{a}$ –

8) Verdadera, pues $cos\ \hat{C} = \dfrac{b}{a} \rightarrow a = \dfrac{b}{sen\ \hat{C}}$

9) Falsa, pues $tg\ \hat{B} = \dfrac{b}{c} \rightarrow b = c \cdot tg\ \hat{B}$

10) Verdadera, pues $sen^2\,\hat{B} + cos^2\,\hat{B} = 1 \rightarrow cos\ \hat{B} = \sqrt{1 - sen^2\,\hat{B}}$

Como $cos\ \hat{B} = \dfrac{c}{a} \rightarrow \sqrt{1 - sen^2\,\hat{B}} = \dfrac{c}{a}$

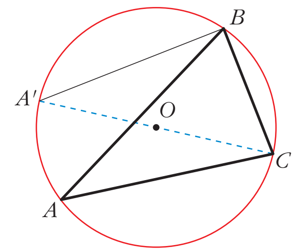
11) Falsa, pues $sen\ \hat{B} \cdot cos$ $\cdot \dfrac{b}{a} = \dfrac{b^2}{a^2} \neq 1$ (porque $b \neq a$)

12) Verdadera, pues $\dfrac{sen\ \hat{B}}{cos\ \hat{C}} =$

38 Prueba que en un triángulo cualquiera se verifica:

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} = 2R$$

R **es el radio de la circunferencia circunscrita.**

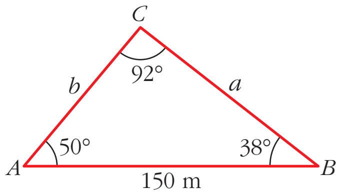


☛ ***Traza el diámetro desde uno de los vértices del triángulo ABC. Aplica el teorema de los senos en los triángulos ABC y A'BC.***

Aplicamos el teorema de los senos en los triángulos ABC y $A'BC$:

• En $\widehat{ABC} \rightarrow \dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{c}{sen\ \hat{C}}$

• En $\widehat{A'BC} \rightarrow \dfrac{\overline{BC}}{sen\ \hat{A}'} = \dfrac{\overline{A'C}}{sen\ A'BC}$



Sucede que:

$\overline{BC} = a$

$\hat{A}' = \hat{A}$ (ángulos inscritos en una circunferencia que abarcan el mismo arco)

$\overline{A'C} = 2R$

$\widehat{A'BC} = 90°$ (medida de ángulos inscritos en una circunferencia)

La igualdad queda: $\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{2R}{sen\ 90°}$ → $\frac{a}{sen\ \hat{A}} =$ →

- Por último, sustituyendo en la primera expresión, se obtiene el resultado:

$$2R = \frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}$$

39 **Prueba que solo existe un triángulo con estos datos:**

$$\boldsymbol{b = \sqrt{3}\ \text{m}, \quad a = 1{,}5\ \text{m}, \quad \hat{A} = 60°}$$

¿Existe algún triángulo con estos datos?:

$$\boldsymbol{\hat{C} = 135°, \quad b = 3\sqrt{2}\ \text{cm}, \quad c = 3\ \text{cm}}$$

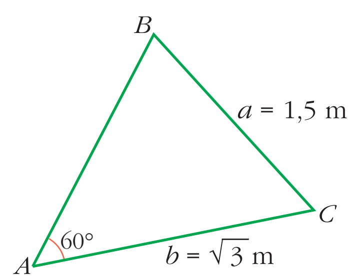
- $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ \hat{A}$

$1{,}5^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + c^2 - 2\sqrt{3}\ c\ cos\ 60°$

$2{,}25 = 3 + c^2 - 2$

$c^2 - \sqrt{3}\,c + 0{,}75 = 0$

$c =$



La ecuación de segundo grado solo tiene una raíz. Solo hay una solución.

(NOTA: También se pueden estudiar las dos soluciones que salen para B con el teorema del seno y ver que una de ellas no es válida, pues quedaría $\hat{A} + \hat{B} > 180°$).

- Podemos resolverlo con el teorema del coseno, como antes, o con el teorema del seno. Resolvemos este apartado con el segundo método mencionado:

$$\frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}} \rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{sen\ \hat{B}} = \frac{3}{sen\ 135°} \rightarrow$$

$$\rightarrow\ sen\ \hat{B} = \frac{3\sqrt{2}\ sen\ 135°}{3} =$$

$$= \sqrt{2}\ sen\ 135° = 1 \quad \rightarrow \quad \hat{B} = 90°$$

Pero: $\hat{C} + \hat{B} = 135° + 90° > 180°$ ¡Imposible!

Luego la solución no es válida y, por tanto, concluimos que no hay ningún triángulo con esos datos.

f) • $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C}) = 110°$

• $\dfrac{b}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{a}{sen\ \hat{A}} \rightarrow \dfrac{5}{sen\ 110°} = \dfrac{a}{sen\ 35°}$

$$a = \frac{5 \cdot sen\ 35°}{sen\ 110°} = 3{,}05 \text{ m}$$

• Como $\hat{A} = \hat{C} \rightarrow a = c \rightarrow c = 3{,}05$ m

5. **Las bases de un trapecio miden 17 cm y 10 cm, y uno de sus lados, 7 cm. El ángulo que forman las rectas sobre las que se encuentran los lados no paralelos es de 32°. Calcula lo que mide el otro lado y el área del trapecio.**

• Los triángulos *APB* y *DPC* son semejantes, luego:

$$\frac{x}{10} = \frac{x+7}{17} \rightarrow 17x = 10(x+7) \rightarrow x = 10$$

Aplicando el teorema del coseno en el triángulo *APB* tenemos:

$\overline{AB}^2 = x^2 + y^2 - 2xy\ cos\ 32°$

$10^2 = 10^2 + y^2 - 2 \cdot 10y \cdot cos\ 32°$

$0 = y^2 - 16{,}96y$

$\begin{cases} y = 0 \rightarrow \text{No válido} \\ y = 16{,}96 \text{ cm} \end{cases}$

De nuevo, por semejanza de triángulos, tenemos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DP}} \rightarrow \frac{10}{16{,}96} = \frac{17}{z + 16{,}96} \rightarrow 10(z + 16{,}96) = 17 \cdot 16{,}96$$

$10z = 118{,}72 \rightarrow z = 11{,}872$ cm mide el otro lado, $\overline{AD}$, del trapecio.

• Como *PDC* es un triángulo isósceles donde $\overline{DC} = \overline{CP} = 17$ cm, entonces:

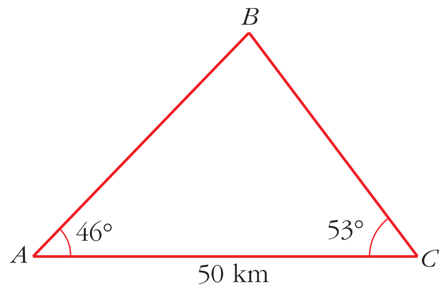
$$\hat{D} = 32° \rightarrow sen\ 32° = \frac{h}{z} \Rightarrow h = z \cdot sen\ 32° = 11{,}872 \cdot sen\ 32° \approx 6{,}291$$

Así:

$$\text{Área}_{ABCD} = \frac{B+b}{2} \cdot h = \frac{17+10}{2} \cdot 6{,}291 = 84{,}93 \text{ cm}^2$$

6. **Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: $\widehat{BAC} = 46°$ y $\widehat{BCA} = 53°$. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?**

$\hat{B} = 180° - 46° - 53° = 81°$

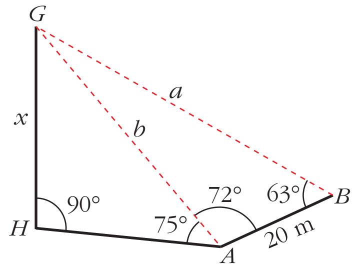


- $\dfrac{a}{sen\ \hat{A}} = \dfrac{b}{sen\ \hat{B}} \rightarrow a = \dfrac{b\ sen\ \hat{A}}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{50 \cdot sen\ 46°}{sen\ 81°} = 36{,}4$ km

$\dfrac{b\ sen\ \hat{C}}{sen\ \hat{B}} = \dfrac{50 \cdot sen\ 53°}{sen\ 81°} = 40{,}4$ km

- $\dfrac{c}{sen\ \hat{C}}$ $\dfrac{b}{sen\ \hat{B}}$ $\rightarrow c$

7. **Para hallar la altura de un globo, realizamos las mediciones indicadas en la figura. ¿Cuánto dista el globo del punto A? ¿Cuánto del punto B? ¿A qué altura está el globo?**



$\widehat{AGB} = 180° - 72° - 63° = 45°$

- $\dfrac{b}{sen\ 63°}$ $\dfrac{20}{sen\ 45°}$ $\dfrac{20 \cdot sen\ 63°}{sen\ 45°}$ $\rightarrow b =$ $=$

to A.

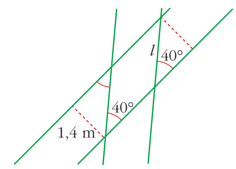
- $\dfrac{a}{sen\ 72°} = \dfrac{20}{sen\ 45°} \rightarrow a = \dfrac{20 \cdot sen\ 72°}{sen\ 45°} = 26{,}9$ m dista el globo del punto B.

Página 125

PARA PROFUNDIZAR

40 **Dos vías de tren de 1,4 m de ancho se cruzan formando un rombo. Si un ángulo de corte es de 40°, ¿cuánto valdrá el lado del rombo?**

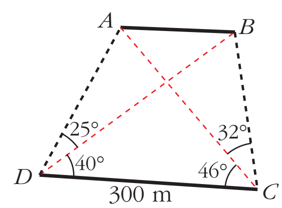
$$sen\ 40° = \frac{1{,}4}{l} \ \rightarrow\ l = \frac{1{,}4}{sen\ 40°} = 2{,}18 \text{ m}$$



41 **Para hallar la distancia entre dos puntos inaccesibles A y B, fijamos dos puntos C y D tales que $\overline{CD} = 300$ m, y medimos los siguientes ángulos:**

$$\widehat{ADB} = 25° \qquad \widehat{BDC} = 40°$$

$$\widehat{ACD} = 46° \qquad \widehat{ACB} = 32°$$



Calcula $\overline{AB}$.

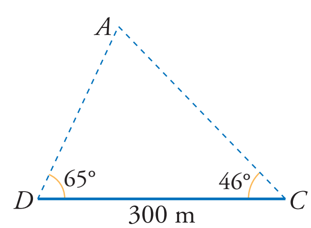
Si conociésemos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, podríamos hallar $\overline{AB}$ con el teorema del coseno en $\widehat{ABC}$.

Calculemos, pues, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$:

- En el triángulo ADC:

$$\hat{A} = 180° - 65° - 46° = 69°$$

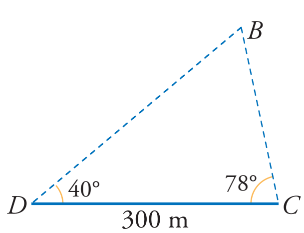
Por el teorema del seno:



$$\frac{300}{sen\ 69°} = \frac{\overline{AC}}{sen\ 65°} \ \rightarrow\ \overline{AC} = \frac{300 \cdot sen\ 65°}{sen\ 69°} = 291{,}24 \text{ m}$$

- En el triángulo BCD:

$$\hat{B} = 180° - 40° - 78° = 62°$$



Por el teorema del seno:

$$\frac{300}{sen\ 62°} = \frac{\overline{BC}}{sen\ 40°} \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{BC} = \frac{300 \cdot sen\ 40°}{sen\ 62°} = 218{,}40 \text{ m}$$

- $sen\ 75° = \dfrac{x}{b} = \dfrac{x}{25{,}2} \quad \rightarrow \quad x = 25{,}2 \cdot sen\ 75° = 24{,}3$ m es la altura del globo.