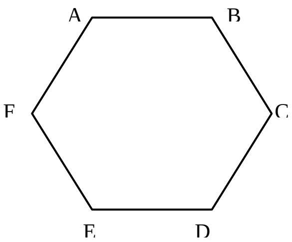
VECTORES

<u>EJERCICIO 1</u> : ABCDEF son los vértices de un hexágono regular de centro O. En los siguientes pares de vectores compara sus módulos, direcciones y sentidos:



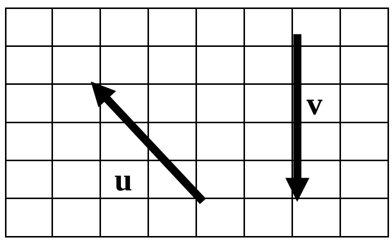
a) AB y BC

b) BC y EF

c) AB y FC

a) *AB y BC : Tienen el mismo módulo y distinta dirección. No se puede comparar el sentido.*
b) *BC y EF: Tienen el mismo módulo y dirección, y sentidos opuestos.*
c) *AB y FC: Tienen la misma dirección y sentido, pero distinto módulo.*

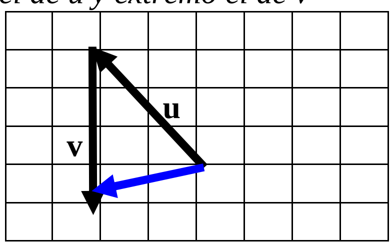
<u>EJERCICIO 2</u> : Dados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, representa los vectores:



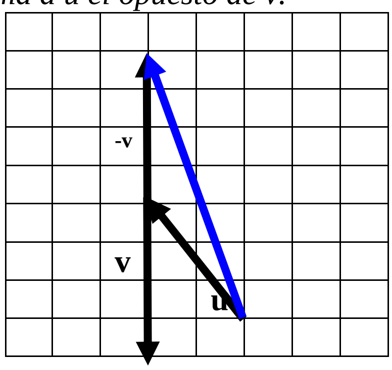
a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{u} - \vec{v}$

a) *Para sumar u y v, colocamos v de modo que su origen coincida con el extremo de u. u + v es el vector cuyo origen es el de u y extremo el de v*



b) *Para obtener u – v se le suma a u el opuesto de v.*



<u>EJERCICIO 3</u> : Dados los vectores u (2,1), v(1,-2). Calcular las coordenadas de los vectores:

a) u + v **b) u – v** **c)** $\mathbf{2u + \frac{1}{2}v}$

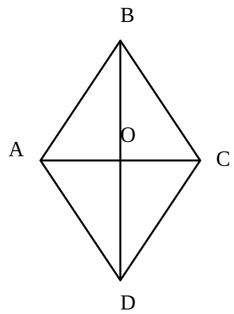
a) $u + v = (2,1) + (1,-2) = (2+1, 1-2) = (3,-1)$
b) $u – v = (2,1) – (1,-2) = (2-1, 1-(-2)) = (1,3)$
c) $2u + \frac{1}{2}v = 2(2,1) + \frac{1}{2}(1,-2) = (4,2) + (\frac{1}{2},-1) = (\frac{9}{2},1)$

<u>EJERCICIO 4</u> : Calcular m y n para que se verifique w = mu+nv, siendo u(4,-8),v(0,2),w(2,-1)

(2,-1) = m(4,-8) + n(0,2) $\Rightarrow \begin{cases} 2 = 4m \\ -1 = -8m + 2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{1}{2} \\ -1 = -4 + 2n \rightarrow n = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

w = $\frac{1}{2}u + \frac{3}{2}v$. *Así expresamos w como combinación lineal de u y v*

<u>EJERCICIO 5</u> : La figura ABCD es un rombo de lado 6 cm y ángulos 60º y 120º. Halla:



a) AB. AD

b) DA.DC

c) OB.OC

d) AO.OC

a) AB.AD = |AB|.|AD|.cos 120º = 6.6.$\left(-\frac{1}{2}\right)$ *= -18*

b) DA.DC = |DA|.|DC|.cos 60º = 6.6.$\frac{1}{2}$ *= 18*

c) OB.OC = |OB|.|OC|.cos 90º = (3$\sqrt{3}$*).3.0 = 0*

d) AO.OC = |AO|.|OC|.cos 0º = 3.3.1= 9

<u>EJERCICIO 6</u> : Dados los vectores a(-3,4), b(5,-1), hallar:
a) a.b b) |a| c) |b| d) ángulo que forman a y b

a) *a.b = -3,5 + 4.(-1) = -15-4 = -19*
b) *|a| =* $\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$
c) *|b| =* $\sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$
d) *Cos (a,b) =* $\frac{a.b}{|a|.|b|} = \frac{-19}{5.\sqrt{26}} = -0{,}7452$

Utilizando la calculadora: INV + COS 0,7452 +/- = 138º 10' 35''

<u>EJERCICIO 7</u> : Dado el vector v(-5,3), calcula las coordenadas de los siguientes vectores:

a) unitarios y de la misma dirección que v
b) ortogonales a v y del mismo módulo
c) Ortonormales a v

a) *Para convertir un vector en unitario, lo dividimos por su módulo:*

|v| = $\sqrt{25+9} = \sqrt{34} \Rightarrow$ *v_1 =* $\pm\left(-\frac{5}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}}\right)$

Como queremos que tenga la misma dirección que u, nos quedamos con la solución positiva: v_1 = $\left(-\frac{5}{\sqrt{34}}, \frac{3}{\sqrt{34}}\right)$

b) *Se permutan las coordenadas y se cambia una de signo: w_1 = (3,5) y w_2 = (-3,-5)*

Ortogonal y unitario: Dividimos los vectores w_1 y w_2 que son ortogonales entre su módulo para convertirlos en unitarios: $|w_1| = |w_2| = |v| = \sqrt{34}$

$$z_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}}\right) \ \ y \ \ z_2 = \left(\frac{-3}{\sqrt{34}}, \frac{-5}{\sqrt{34}}\right)$$

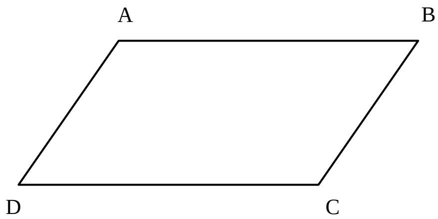
<u>EJERCICIO 8</u> : Halla un vector v de módulo $\sqrt{5}$ y que forme con u(2,-4) un ángulo de 60º

$$\textit{Sea } v(x,y) \Rightarrow \begin{cases} |v| = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5} \Rightarrow x^2+y^2 = 5 \\ \cos 60º = \dfrac{u.v}{|u|.|v|} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{2x-4y}{\sqrt{5}\sqrt{20}} \Rightarrow 2x-4y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ 2x-4y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5+4y}{2} \\ \dfrac{25+40y+16y^2}{4} + y^2 = 5 \Rightarrow 4y^2+8y+1 = 0 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} y = -0{,}13 \rightarrow x = 2{,}24 \\ y = -1{,}86 \rightarrow x = -1{,}22 \end{matrix} \right. \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $v_1(2{,}24;-0{,}13)$ y $v_2(-1{,}22;-1{,}86)$

<u>EJERCICIO 9</u> : Dados los puntos A(3,-2), B(1,3), C(-6,0), halla el punto D de modo que ABCD sea un paralelogramo:

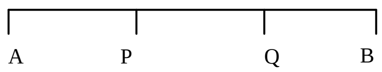


AD = BC

(x,y) – (3,-2) = (-6,0) – (1,3)

$$\begin{cases} x-3 = -7 \rightarrow x = -4 \\ y+2 = -3 \rightarrow y = -5 \end{cases} \Rightarrow D(-4,-5)$$

<u>EJERCICIO 10</u> : Halla los puntos que dividen al segmento de extremos A(-2,3) y B(6,2) en tres partes iguales



$$AB = 3(AP) \Rightarrow (6+2,2-3) = 3.(x+2,y-3) \Rightarrow \begin{cases} 8 = 3x+6 \rightarrow x = \dfrac{2}{3} \\ -1 = 3y-9 \rightarrow y = \dfrac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$$\textit{Q es el punto medio entre P y B} \Rightarrow Q = \left(\frac{\frac{2}{3}+6}{2}, \frac{\frac{8}{3}+2}{2}\right) = \left(\frac{20}{6}, \frac{14}{6}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

EJERCICIO 11 : Sabiendo que $|\vec{u}| = 4$ y $\dfrac{\vec{u}}{\vec{v}} = \dfrac{3}{2}$ calcula $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Solución:

Puesto que $\dfrac{\vec{u}}{\vec{v}} = \dfrac{3}{2} \rightarrow \vec{u} = \dfrac{3}{2}\vec{v} \rightarrow \vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores que tienen la misma dirección y sentido $\rightarrow \left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 0°$.

$$\left.\begin{aligned} &\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \underbrace{\cos 0°}_{1} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = 4|\vec{v}| \\ &\vec{u} = \frac{3}{2}\vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \left(\frac{3}{2}\vec{v}\right) \cdot \vec{v} = \frac{3|\vec{v}|^2}{2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{3}{2}|\vec{v}|^2 = 4|\vec{v}| \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3}{2}|\vec{v}|^2 - 4|\vec{v}| = 0 \rightarrow |\vec{v}|\left(\frac{3}{2}|\vec{v}| - 4\right) = 0 \rightarrow \frac{3}{2}|\vec{v}| - 4 = 0 \rightarrow |\vec{v}| = \frac{8}{3}$$

$|\vec{v}| \neq 0$ ya que $|\vec{u}| = 4$ y $\vec{u} = \dfrac{3}{2}\vec{v}$.

Por tanto, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 4|\vec{v}| = 4 \cdot \dfrac{8}{3} = \dfrac{32}{3}$.

EJERCICIO 12 :

Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ tales que $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2$ y el ángulo que forman es de 30°, halla $|\vec{a} - \vec{b}|$ y $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Solución:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 30° = 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

Luego:

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 3^2 - 2 \cdot 3\sqrt{3} + 2^2 = 9 - 6\sqrt{3} + 4 \approx 2{,}61 \rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2{,}61} \approx 1{,}62$$

Análogamente:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 =$$

$$= 3^2 + 2 \cdot 3\sqrt{3} + 2^2 = 9 + 6\sqrt{3} + 4 \approx 23{,}39 \rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{23{,}39} \approx 4{,}84$$

EJERCICIO 13 : Sabiendo que |u| = 3 y u = -5v. Calcular u.v

Solución:

Puesto que $\vec{u} = -5\vec{v}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores que tienen la misma dirección pero sentido opuesto $\rightarrow \left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right) = 180°$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \underbrace{\cos 180°}_{-1} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = -3|\vec{v}| \\ &\vec{u} = -5\vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = (-5\vec{v}) \cdot \vec{v} = -5|\vec{v}|^2 \end{aligned}\right\} \rightarrow -3|\vec{v}| = -5|\vec{v}|^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 5|\vec{v}|^2 - 3|\vec{v}| = 0 \rightarrow |\vec{v}|(5|\vec{v}| - 3) = 0 \rightarrow 5|\vec{v}| - 3 = 0 \rightarrow |\vec{v}| = \frac{3}{5}$$

$|\vec{v}| \neq 0$ puesto que $|\vec{u}| = 3 \neq 0$ y $\vec{u} = -5\vec{v}$

Por tanto: $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3|\vec{v}| = -3 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{-9}{5}$