TEMAS 4 Y 5 – TRIGONOMETRÍA

UNIDADES DE MEDIDAS DE ÁNGULOS

EJERCICIO 1

a) Pasa a radianes los siguientes ángulos: 210° y 70° b) Pasa a grados los ángulos: $\frac{7\pi}{6}$ rad y 3,5 rad

Solución:

a) $210^\circ = 210 \cdot \frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{7\pi}{6}\text{ rad}$ $\qquad 70^\circ = 70 \cdot \frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{7\pi}{18}\text{ rad}$

b) $\frac{7\pi}{6}\text{ rad} = \frac{7\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 210^\circ$ $\qquad 3{,}5\text{ rad} = 3{,}5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 200^\circ\, 32'7''$

EJERCICIO 2 : Completa la tabla:

GRADOS	130º		330º	
RADIANES		4π / 3		1,5

Solución:

$130^\circ = 130 \cdot \frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{13\pi}{18}\text{ rad}$ $\qquad \frac{4\pi}{3}\text{ rad} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 240^\circ$

$330^\circ = 330 \cdot \frac{\pi}{180}\text{ rad} = \frac{11\pi}{6}\text{ rad}$ $\qquad 1{,}5\text{ rad} = 1{,}5 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 85^\circ\, 56'37''$

Por tanto:

GRADOS	**130º**	240º	**330º**	85º56'37"
RADIANES	13π / 18	**4π / 3**	11π / 6	**1,5**

ÁNGULOS DE MEDIDAS CUALESQUIERA

EJERCICIO 3 : Si $tg\,\alpha = \frac{1}{3}$ y α es un ángulo que está en el primer cuadrante, calcula (sin hallar α):

a) $tg\,(180^\circ - \alpha)$ b) $tg\,(180^\circ + \alpha)$ c) $tg\,(360^\circ - \alpha)$ d) $tg\,(360^\circ + \alpha)$

Solución:

a) $tg(180^\circ - \alpha) = -tg\,\alpha = -\frac{1}{3}$ $\qquad$ b) $tg(180^\circ + \alpha) = tg\,\alpha = \frac{1}{3}$

c) $tg(360^\circ - \alpha) = -tg\,\alpha = -\frac{1}{3}$ $\qquad$ d) $tg(360^\circ + \alpha) = tg\,\alpha = \frac{1}{3}$

EJERCICIO 4 : Si $sen\,\alpha = 0{,}35$ y $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ halla (sin calcular α):
a) $sen\,(180^\circ - \alpha)$ b) $cos\,(180^\circ + \alpha)$

Solución:

a) $sen(180^\circ - \alpha) = sen\,\alpha = 0{,}35$

b) $cos(180^\circ + \alpha) = -cos\,\alpha$

Necesitamos saber cuánto vale $cos\,\alpha$: $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \;\rightarrow\; 0{,}35^2 + cos^2\alpha = 1$

$0{,}1225 + cos^2\alpha = 1 \;\rightarrow\; cos^2\alpha = 0{,}8775 \Rightarrow cos\,\alpha = 0{,}94$ (es positivo, pues $0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

Por tanto: $cos(180^\circ + \alpha) = -cos\alpha = -0{,}94$

EJERCICIO 5 : Sabiendo que $sen\ 50^\circ = 0{,}77$, $cos\ 50^\circ = 0{,}64$ **y** $tg\ 50^\circ = 1{,}19$, **calcula (sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora):**

a) $cos\ 130^\circ$ **b)** $tg\ 310^\circ$ **c)** $cos\ 230^\circ$ **d)** $sen\ 310^\circ$

Solución:

a) $cos 130^\circ = cos(180^\circ - 150^\circ) = -cos 50^\circ = -0{,}64$

b) $tg 310^\circ = tg(360^\circ - 50^\circ) = -tg 50^\circ = -1{,}19$

c) $cos 230^\circ = cos(180^\circ + 50^\circ) = -cos 50^\circ = -0{,}64$

d) $sen 310^\circ = sen(360^\circ - 50^\circ) = -sen 50^\circ = -0{,}77$

DEMOSTRAR IGUALDADES TRIGONOMÉTRICAS

EJERCICIO 18 : Demuestra que:

a) $\dfrac{cos\,x}{1-sen\,x} + \dfrac{1+sen\,x}{cos\,x} = \dfrac{1+cos\,2x}{cos\,x - \frac{1}{2}sen\,2x}$

b) $2\left(cos^2\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}cos\,x\right) = 1$

c) $sen(x+y)\cdot sen(x-y) = sen^2x - sen^2y$

d) $\dfrac{(sen\,x + cos\,x)\cdot cos\,2x}{cos\,x - sen\,x} = 1 + sen\,2x$

e) $\dfrac{2sen\,x}{tg\,2x} + \dfrac{sen^2x}{cos\,x} = cos\,x$

Solución:

a) $\dfrac{cos\,x}{1-sen\,x} + \dfrac{1+sen\,x}{cos\,x} = \dfrac{cos^2x + (1+sen\,x)(1-sen\,x)}{(1-sen\,x)cos\,x} = \dfrac{cos^2x + 1 - sen^2x}{cos\,x - sen\,x\ cos\,x} = \dfrac{1+cos^2x - sen^2x}{cos\,x - \dfrac{2sen\,x\ cos\,x}{2}} =$

$= \dfrac{1+cos\,2x}{cos\,x - \frac{1}{2}sen\,2x}$

b) $2\left(cos^2\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}cos\,x\right) = 2\left(\dfrac{1+cos\,x}{2} - \dfrac{1}{2}cos\,x\right) = 1 + cos\,x - cos\,x = 1$

c)

$sen(x+y)\cdot sen(x+y) = (sen\,x\cos y + cos\,x\,sen\,y)(sen\,x\cos y - cos\,x\,sen\,y) = (sen\,x\cos y)^2 - (cos\,x\,sen\,y)^2 =$

$= sen^2x cos^2y - cos^2x sen^2y = sen^2x(1-sen^2y) - cos^2x sen^2y = sen^2x - sen^2x sen^2y -$

$-(1-sen^2x)sen^2y = sen^2x - sen^2x sen^2y - sen^2y + sen^2x sen^2y = sen^2x - sen^2y$

d) $\dfrac{(sen\,x + cos\,x)\cdot cos\,2x}{cos\,x - sen\,x} = \dfrac{(sen\,x+cos\,x)\cdot(sen\,x + cos\,x)\cdot cos\,2x}{(cos\,x - sen\,x)(cos\,x + sen\,x)} =$

$= \dfrac{(sen\,x + cos\,x)^2\cdot cos\,2x}{cos^2x - sen^2x} = \dfrac{(sen^2x + cos^2x + 2sen\,x\cos x)cos\,2x}{cos\,2x} =$

$= sen^2x + cos^2x + 2sen\,x\cos x = 1 + 2sen\,x\cos x = 1 + sen\,2x$

e) $\dfrac{2sen\,x}{tg\,2x} + \dfrac{sen^2x}{cos\,x} = \dfrac{2sen\,x}{\frac{sen\,2x}{cos\,2x}} + \dfrac{sen^2x}{cos\,x} = = \dfrac{2sen\,x\cos 2x}{sen\,2x} + \dfrac{sen^2x}{cos\,x} = \dfrac{2sen\,x(cos^2x - sen^2x)}{2sen\,x\cos x} + \dfrac{sen^2x}{cos\,x} =$

$= \dfrac{cos^2x - sen^2x}{cosx} + \dfrac{sen^2x}{cosx} = \dfrac{cos^2x - sen^2x + sen^2x}{cosx} = \dfrac{cos^2x}{cosx} = cosx$

EJERCICIO 19 : Resuelve:

a) $sen\left(x+45^\circ\right)+sen\left(x-45^\circ\right)=1$

b) $sen\,2x+cos\,x=0$

c) $cos\,x\,sen\,2x-sen\,x=0$

d) $cos^3x-3cos\,x=3cos\,x\,sen\,x$

e) $4cos2x=1-3cos\,x$

f) $sen\,2x+cos\,2x-1=cos\,x-2sen^2x$

Solución:

a) $sen\left(x+45^\circ\right)+sen\left(x-45^\circ\right)=1\Rightarrow sen\,x\cdot cos\,45^\circ+cos\,x\cdot sen\,45^\circ+sen\,x\,cos45^\circ-cos\,x\,sen\,45^\circ=1$

$2sen\,x\,cos\,45^\circ=1\Rightarrow 2\frac{\sqrt{2}}{2}sen\,x=1 \rightarrow \sqrt{2}\,sen\,x=1 \rightarrow sen\,x=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$

$\begin{cases} x=45^\circ+360^\circ k \\ x=135^\circ+360^\circ k\end{cases}$ donde $k\in \mathbf{Z}$

b) $sen\,2x+cos\,x=0$
$2sen\,x\,cos\,x+cos\,x=0 \rightarrow cos\,x(2sen\,x+1)=0\Rightarrow$

$\begin{cases} cos\,x=0 \rightarrow \begin{cases} x=90^\circ+360k \\ x=270+360k\end{cases} \\ 2sen\,x+1=0 \rightarrow sen\,x=-\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x=210^\circ+360^\circ k \\ x=330^\circ+360^\circ k\end{cases}\end{cases}$ donde $k\in\mathbf{Z}$

c) $\cos x\,\text{sen}\,2x-\text{sen}\,x=0\Rightarrow \cos x\cdot 2\text{sen}\,x\cos x-\text{sen}\,x=0\Rightarrow \text{sen}\,x\left(2\cos^2x-1\right)=0$

$\begin{cases} sen\,x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0^\circ+360^\circ k \\ x=180^\circ+360^\circ k\end{cases} \\ 2cos^2x-1=0 \rightarrow cos^2x=\frac{1}{2} \rightarrow cos\,x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \begin{cases} cos\,x=\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \begin{cases} x=45^\circ+360^\circ k \\ x=315^\circ+360^\circ k\end{cases} \\ cos\,x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \begin{cases} x=135^\circ+360^\circ k \\ x=225^\circ+360^\circ k\end{cases}\end{cases}\end{cases}$

Por tanto, las soluciones son: $\begin{matrix} x=0^\circ+360^\circ k & x=45^\circ+360^\circ k & x=135^\circ+360^\circ k \\ x=180^\circ+360^\circ k & x=315^\circ+360^\circ k & x=225^\circ+360^\circ k\end{matrix}$

donde $k\in\mathbf{Z}$.

d) $cos^3x-3cos\,x=3cos\,x\,sen\,x\Rightarrow cos^3x-3cos\,x-3cos\,x\,sen\,x=0\Rightarrow cos\,x\left(cos^2x-3-3sen\,x\right)=0$

$cos\,x\left(1-sen^2x-3-3sen\,x\right)=0\Rightarrow cos\,x\left(-sen^2x-3sen\,x-2\right)=0\Rightarrow -cos\,x\left(sen^2x+3sen\,x+2\right)=0$

$\begin{cases} cos\,x=0 \rightarrow \begin{cases} x=90^\circ+360^\circ k \\ x=270^\circ+360^\circ k\end{cases} \\ sen^2x+3sen\,x+2=0\end{cases}\Rightarrow sen\,x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{-3\pm1}{2}= \rightarrow \begin{cases} -1 \\ -2 \text{ (no vale)}\end{cases}$

$sen\,x=-1 \rightarrow x=270^\circ+360^\circ k$

Por tanto las soluciones son: $\begin{cases} x=90^\circ+360^\circ k \\ x=270^\circ+360^\circ k\end{cases}$ siendo $k\in\mathbf{Z}$

e) $4\cos 2x=1-3\cos x\Rightarrow 4\left(\cos^2x-\text{sen}^2x\right)=1-3\cos x\Rightarrow 4\cos^2x-4\text{sen}^2x=1-3\cos x$

$4\cos^2x-4\left(1-\cos^2x\right)=1-3\cos x\Rightarrow 4\cos^2x-4+4\cos^2x=1-3\cos x\Rightarrow 8\cos^2x+3\cos x-5=0$

$cos\,x=\frac{-3\pm\sqrt{9+160}}{16}=\frac{-3\pm\sqrt{169}}{16}=\frac{-3\pm13}{16}=\begin{cases}\frac{5}{8} \\ -1\end{cases}$

$\begin{cases} cos\,x=\frac{5}{8} \rightarrow \begin{cases} x=51^\circ 19'4''+360^\circ k \\ x=308^\circ 40'56''+360^\circ k\end{cases} \\ cos\,x=-1 \rightarrow x=180^\circ+360^\circ k\end{cases}$ siendo $k\in\mathbf{Z}$

f) $sen\,2x + cos\,2x - 1 = cos\,x - 2sen^2\,x \Rightarrow 2sen\,x\,cos\,x + cos^2\,x - sen^2\,x - 1 = cos\,x - 2sen^2\,x$

$2sen\,x\,cos\,x + cos^2\,x - sen^2\,x - 1 - cos\,x + 2sen^2\,x = 0 \Rightarrow 2sen\,x\,cos\,x + cos^2\,x + sen^2\,x - 1 - cos\,x = 0$

$2sen\,x\,cos\,x + 1 - 1 - cos\,x = 0 \Rightarrow 2sen\,x\,cos\,x - cos\,x = 0 \Rightarrow cos\,x(2sen\,x - 1) = 0$

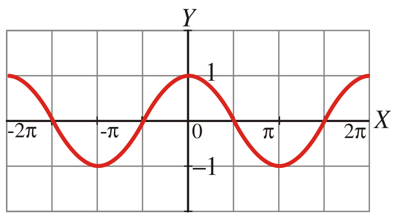
$$\begin{cases} \cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ 2\,\text{sen}\,x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{sen}\,x = \dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases} \qquad \text{siendo } k \in \mathbf{Z}$$

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

EJERCICIO 20

a) **Representa la siguiente función trigonométrica:** $y = cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

b) **Escribe la ecuación de la función cuya gráfica es la siguiente:**

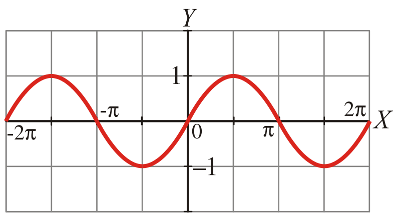


Solución:

a) Hacemos una tabla de valores:

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$x - \pi/2$	$-5\pi/2$	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
$cos\,(x - \pi/2)$	0	1	0	–1	0	1	0	–1	0

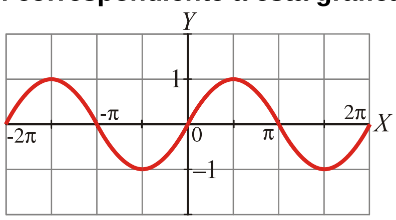
La gráfica sería:



b) La gráfica corresponde a la función $y = cos\,x$.

EJERCICIO 21

a) **Escribe la ecuación de la función correspondiente a esta gráfica:**



b) Representa la siguiente función: $y = \cos(x + \pi)$

Solución:

a) La gráfica corresponde a la función $y = sen\ x$.

b) Hacemos una tabla de valores:

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$x+\pi$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π
$y = \cos(x+\pi)$	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1

La gráfica sería: