Ejercicios de sucesiones.

1.- Cuando escribimos a_n queremos decir: término n-ésimo o toda la sucesión? ¿Qué diferencia hay entre a_n y (a_n)?

a).-Cuando escribimos a_n nos referimos a término enésimo.
b).-Cuando escribimos (a_n) nos referimos a la representación de toda la sucesión.

La diferencia es que a_n representa un término de la sucesión y (a_n) indica toda la sucesión.

2.- ¿Qué nombre recibe la sucesión tal que cada término se obtiene del anterior sumándole una cantidad constante?

Es una progresión aritmética.

3.- ¿Existe siempre la sucesión opuesta de una sucesión dada? Escribir la sucesión opuesta de:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$$

Sí, existe siempre sucesión opuesta.

La sucesión pedida es: $-1, \left(-\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{3}\right), \left(-\frac{1}{4}\right), \left(-\frac{1}{5}\right)$

4.- ¿Una sucesión puede considerarse como una función? ¿Cuál será su dominio?

Dominio de una función o campo de existencia es el conjunto de valores de la variable independiente.

El dominio será el conjunto de los números naturales.

5.- ¿Puede ser una sucesión estrictamente creciente y decreciente a la vez? ¿Y creciente y decreciente a la vez? Poner un ejemplo.

Ninguna sucesión puede ser a la vez “estrictamente” creciente y decreciente.

Para ser “estrictamente” creciente y decreciente “no puede” repetirse ningún término de la sucesión.

Si, puede ser a la vez creciente y decreciente.

Ejemplo: (6,6,6,6,6,6,6,6,6).

6.- Es correcta la siguiente afirmación: ¿Una sucesión es decreciente cuando sus términos se aproximan a cero?

No es correcta.

Una sucesión es decreciente cuando cada término es mayor o igual que el siguiente

$\boxed{a_n \leq a_{n+1}}$ cualquiera que sea el número natural n.

Además una sucesión decreciente, puede tener por primer término -1, con lo cual los términos siguientes ya son menores que -1, por tanto se van alejando de 0.

7.- Si una sucesión verifica una condición como que: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ ¿se puede decir cuánto vale el término cuarto de la sucesión?

No, porque los datos que nos facilitan son:

a.- El término anterior del primero: a_{n-1}

b.- El término anterior del primero: a_{n-2}

Para poder calcular cualquier término en una sucesión, necesitamos conocer el primer término de la misma.

8.- Si una sucesión dada por su término general del siguiente modo: $a_n = a_{n-1} - 3$ ¿Qué se puede decir de la sucesión?

1°.- Que es decreciente.
2°.- Que su diferencia es – 3

9.- Calcular el término general de las siguientes sucesiones aritméticas:

a) 1, 5, 9, 13

d = 4 $\quad a_n = a_1 + (n-1)\,d \quad a_n = 4n - 3$

b) 2, 0, -2, -4

d = -2 $\quad a_n = a_1 + (n-1)\,d \quad a_n = 2 + (n-1)(-2) \quad a_n = -2n + 4 = 2(-n+2)$

c) $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}$

$$d = \frac{1}{8} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{8} \Rightarrow a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{8n} - \frac{1}{8} \Rightarrow a_n = \frac{n+3}{8}$$

10.- Calcular el término general de las siguientes sucesiones geométricas:

a) 3, 6, 12, 24, 48

r = 2 $a_n = a_1 . r^{n-1} \Rightarrow a_n = 3.2^{n-1} \Rightarrow a_n = 6^{n-1}$

b) 4, -4, 4, -4, 4, -4

r = -1 $a_n = a_1 . r^{n-1} \Rightarrow a_n = 4 \,.\, -1^{n-1}$

11.- Calcular la suma de los n primeros términos de las siguientes sucesiones:

a) 1, 5, 9, 13

d = 4 $$S - n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_n = \frac{4(1+13)}{2} \Rightarrow S_n = 28$$

b) 2, 0, -2, -4

d= -2 $$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_n = \frac{4(2-4)}{2} \Rightarrow S_n = -4$$

c) $\frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$d = \frac{1}{8} \Rightarrow S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \Rightarrow S_n = \frac{3\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)}{2} \Rightarrow S_n = \frac{15}{8}$$

d) 3, 6, 12, 24, 48, ...

r = 2 $$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r - 1} \Rightarrow S_n = \frac{48.2 - 3}{2 - 1} \Rightarrow S_n = 93$$

e) 4, - 4, 4, - 4, 4, -4, 4, -4, ...

r = - 1 $$S_n = \frac{a_n r - a_1}{r - 1} \Rightarrow S_n = \frac{-4. -1 - 4}{-1. -1} \Rightarrow S_n = 0$$

f) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\ldots\ldots$ $\quad a_n = \frac{n}{n+1}$

g) $4, \frac{4}{2}, \frac{16}{3}, \frac{25}{4}, \ldots\ldots\ldots$ $\quad a_n = \frac{(n+1)^2}{n}$

h) $\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, \frac{25}{32}, \ldots\ldots\ldots$ $\quad a_n = \frac{n^2}{2^n}$

12.- Calcular el termino a_{20} de la sucesión: 5, 10, 15, 20, ……………..

$$d = 5 \quad \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{20} = 5 + (20-1).5 \Rightarrow a_{20} = 100$$

13.- Averiguar si las siguientes sucesiones son aritméticas, geométricas o de ninguno de los dos tipos:

a) 5, 7, 9, 11, …………….

Es una sucesión aritmética y la razón d = 2

b) 1, 4, 9, 16, 25, …………………..

No es una sucesión ni aritmética ni geométrica.

c) 1, 2, 4, 8, 16, 32, …………………………..

Es una sucesión geométrica y la razón r = 2

d) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

Es una sucesión geométrica y la razón es r = 1/3.

e) 0,1 , 0,11 , 0, 111, …………………

No es ninguna de las dos.

14.- Dada la sucesión: $a_n = \frac{2n^2+1}{n+3}$ Calcular a_1, a_5, y a_{11}.

$$a_1 = \frac{2.1+1}{1+3} \Rightarrow \qquad a_1 = \frac{3}{4}$$

$$a_5 = \frac{2.5^2 + 1}{5 + 3} \Rightarrow \qquad a_1 = \frac{51}{8}$$

$$a_{11} = \frac{2.11^2 + 1}{11 + 3} \Rightarrow \qquad a_{11} = \frac{243}{14}$$

15.- Si $a_n = (-1)^n (n + 1)$

a) Calcula los términos a_2, a_7 y a_{10}.

$$a_2 = (-1)^2 (2 + 1) \Rightarrow a_2 = 1.\ 3 \Rightarrow \quad a_2 = 3$$

$$a_7 = (-1)^7 (7 + 1) \Rightarrow a_7 = -1.\ 8 \Rightarrow \quad a_7 = -8$$

$$a_{10} = (-1)^{10} (10 + 1) \Rightarrow a_{10} = 1.\ 11 \Rightarrow \quad a_{10} = 11$$

b) ¿Cuál es el término sexagésimo de la sucesión: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\ldots$

El término general de la sucesión es: $a_n = \frac{n}{n + 1}$

Entonces el término: $a_{60} = \frac{n}{n + 1} = \frac{60}{60 + 1} = \frac{60}{61}$

c) Escribir los seis primeros términos de la sucesión: $a_n = 3.2^{n - 1}$

$a_1 = 3.2^{1 - 1} = 3.1 = 3$

$a_2 = 3.2^{2 - 1} = 3.2^1 = 6$

$a_3 = 3.2^{3 - 1} = 3.2^2 = 12$

$a_4 = 3.2^{4 - 1} = 3.2^3 = 24$

$a_5 = 3.2^{5 - 1} = 3.2^4 = 48$

$a_6 = 3.2^{6 - 1} = 3.2^5 = 96$

16.- Dada la sucesión de término general: $a_n = \frac{2n^2 + n + 3}{n + 1}$ calcular h sabiendo que $a_h = \frac{108}{8}$

Lo primero que haremos, será establecer la igualdad del enunciado:

$$\frac{108}{8} = \frac{2h^2 + h + 3}{h + 1} \Rightarrow \textit{Vamos a sustituir el valor de n por h}$$

$$108(h+1) = 8\,(2h^2 + h + 3) \Rightarrow \textit{Simplificamos} \Rightarrow 27(h+1) = 2(2h^2 + h + 3)$$

$$27h + 27 = 4h^2 + 2h + 6 \Rightarrow \textit{Ordenando} \quad 4h^2 - 25h - 21 = 0$$

$$h = \frac{25 \pm \sqrt{625 + 4.4.21}}{8} = \frac{25 \pm 31}{8} = 7 \Rightarrow \textit{Portanto } h = 7$$

17.- Calcular la expresión del término general de las siguientes sucesiones:

a) 1, -3, 5, -7 , 9, ...

$$a_n = (-1)^{n-1}\,(1 + (n-1).2) \Rightarrow a_n = (-1)^{n-1}(2n - 1)$$

b) 1, 4, 9, 16, 25

$$a_n = n^2$$

c) 1, 2, 4, 8, 16, ...

$$r = 2 \quad a_n = a_1 . r^{n-1} \Rightarrow a_n = 1.2^{n-1} \Rightarrow a_n = 2^{n-1}$$

d) 1, 4, 7, 10, ...

$$d = 3 \quad a_n = a_1 + (n-1).d \Rightarrow a_n = 1.(n-1).3 \Rightarrow a_n = 3n - 2$$

e) $$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow a_n = \frac{n}{n+1}$$

f) $$\frac{5}{3}, \frac{10}{9}, \frac{15}{27}, \frac{20}{81}, \ldots\ldots\ldots\ldots \Rightarrow a_n = \frac{5n}{a_1 . 3^{n-1}}$$

g) 2, 5, 10, 17, 26, 37, ... $a_n = n^2 + 1$

h) $$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots\ldots \quad r = \frac{1}{2} \Rightarrow \quad a_n = a_1 . r^{n-1} = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

18.-Demostrar si crecen o decrecen las siguientes sucesiones:

a) $C_n = \dfrac{2^n}{2^{n+1}}$

Para ser creciente tiene que cumplirse la siguiente condición: $a_n \leq a_n + 1$

$$C_n = \frac{2^n}{2^{n+1}} \leq \frac{2^{n+1}}{2^{n+2}} \Rightarrow 2^n.2^{n+2} \leq 2^{n+1}.2^{n+1} \Rightarrow 2^{n+2} \leq 2^{n+2}$$

La sucesión es creciente y decreciente al mismo tiempo.

b) $D_n = \dfrac{n^2 + 2n - 3}{n + 1}$

Para ser decreciente tiene que cumplirse la siguiente condición: $a_n \geq a_n + 1$

$$a_n = \frac{n^2 + 2n - 3}{n + 1} \Rightarrow Término(a_n + 1) = \frac{(n+1)^2 + 2(n+1) - 3}{(n+1) + 1}$$

$$\frac{n^2 + 2n - 3}{n + 1} \geq \frac{(n+1)^2 + 2(n+1) - 3}{(n+1) + 1} \Rightarrow \frac{n^2 + 2n - 3}{n + 1} \geq \frac{n^2 + 4n}{n + 2}$$

Vamos a efectuar operaciones:

$$(n^2 + 2n - 3).(n + 2) = (n^2 + 4n).(n + 1) \Rightarrow n^3 + 2n^2 + n^2 + 4n - 3n - 6 \geq n^3 + 4n^2 + n^2 + 4n$$

Simplificando, obtenemos:

$$n^3 + 4n^2 + n - 6 \geq n^3 + 5n^2 + 4n \qquad -6 \geq n^2 + 3n$$

No se cumple para ningún valor de n, siendo n cualquier número natural, por tanto la sucesión es creciente.

c) $a_n = n^2$

Vamos a demostrar si la sucesión crece:

Para ser una sucesión creciente, tiene que cumplirse: $a_n \leq a_n + 1$

$$a_n \Rightarrow \text{ término } n^2 \qquad a_n + 1 \Rightarrow \text{ término } (n+1)^2$$

$$n^2 \leq (n+1)^2 \Rightarrow n^2 \leq n^2 + 2n + 1$$ haciendo operaciones:

$$0 \leq 2n + 1$$

Se cumple para cualquier valor de n, siendo n cualquier número natural, por tanto la sucesión es creciente.

d) $a_n \leq 2^{n-1}$

Vamos a demostrar si decrece.

Para ser una sucesión decreciente, tiene que cumplirse: $a_n \geq a_n + 1$

$$a_n \text{ término } 2^{n-1} \qquad a_n + 1 \text{ término } 2^{n-1+1} = 2^n$$

$$2^{n-1} \geq 2^n$$

No se cumple para ningún valor de n, siendo n cualquier número natural, por tanto la sucesión es creciente.

e) $a_n = n^2 + 1$

Vamos a demostrar si la sucesión crece:

Para ser una sucesión creciente, tiene que cumplirse: $a_n \leq a_n + 1$

$$\text{Término } a_n = n^2 + 1 \qquad \text{Término } a_n + 1 = (n+1)^2 + 1$$

Establecemos la condición de crecimiento y sustituimos valores:

$$n^2 + 1 = (n+1)^2 + 1 \Rightarrow n^2 + 1 = n^2 + 2n + 2$$ haciendo operaciones:

$$0 \leq 2n + 1$$

Se cumple para cualquier valor de n, siendo n cualquier número natural, por tanto la sucesión es creciente.

f) $a_n = \dfrac{2n^2 + n + 3}{n + 1}$

Vamos a demostrar si decrece.

Para ser una sucesión decreciente, tiene que cumplirse: $a_n \geq a_n + 1$

$$Término \;\; a_n = \frac{2n^2 + n + 3}{n + 1}$$

Ahora vamos a sustituir n por n+1:

$$Término \;\; a_n + 1 = \frac{2(n+1)^2 + n + 1 + 3}{(n+1) + 1}$$

A continuación establecemos la inecuación:

$$\frac{2n^2 + n + 3}{n + 1} = \frac{2(n+1)^2 + (n+1) + 3}{(n+1) + 1}$$

Hacemos operaciones, para sacar denominadores, y obtenemos:

$$(2n^2 + n + 3).(n + 2) = (2n^2 + 5n + 6).(n + 1)$$

$$2n^3 + 4n^2 + n^2 + 2n + 3n + 6 \geq 2n^3 + 2n^2 + 5n^2 + 5n + 6n + 6$$

$$2n^3 + 5n^2 + 5n + 6 \geq 2n^3 + 7n^2 + 11n + 6$$

$$0 \geq 2n^2 + 6n$$

No se cumple para ningún valor de n, siendo n cualquier número natural, por tanto la sucesión es <u>creciente.</u>

g) $a_n = \dfrac{n + 1}{2n}$

Vamos a demostrar si la sucesión crece:

Para ser una sucesión creciente, tiene que cumplirse: $a_n \leq a_n + 1$

$$Término \;\; a_n \;\; \frac{n + 1}{2n}$$

sustituimos n por n+1

$$Término \, a_n + 1 = \frac{(n+1) + 1}{2(n+1)}$$

Establecemos la inecuación, y obtenemos:

$\frac{n+1}{2n} = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)}$ hacemos operaciones: $2n^2 + 2n + 2n + 2 \leq 2n^2 + 4n$

$$2 \leq 0$$

No se cumple para ningún valor de n, siendo n cualquier número natural, por tanto la sucesión es <u>decreciente.</u>

h) $a_n = \frac{3+2n}{n}$

Vamos a demostrar si la sucesión crece:

Para ser una sucesión creciente, tiene que cumplirse: $a_n \leq a_n + 1$

$\textit{Término } a_n = \frac{3+2n}{n}$ $\textit{Término } a_n + 1 \textit{ sustituimos } n \textit{ por } (n+1) = \frac{3+2(n+1)}{n+1}$

A continuación establecemos la inecuación, y obtenemos:

$$\frac{3+2n}{n} \leq \frac{3+2(n+1)}{n+1} \Leftrightarrow \frac{3+2n}{n} \leq \frac{3+2n+2}{n+1}$$

$$\frac{3+2n}{n} \leq \frac{5+2n}{n+1} \Leftrightarrow (n+1).(3+2n) \leq n(5+2n) \Rightarrow 3n + 3 + 2n^2 + 2n \leq 5n + 2n^2$$

$$3 \leq 0$$

No se cumple para ningún valor de n, siendo n cualquier número natural, por tanto la sucesión es <u>decreciente.</u>

i) $a_n = \frac{3n}{n+1}$

Vamos a demostrar si la sucesión crece:

Para ser una sucesión creciente, tiene que cumplirse: $a_n \leq a_n + 1$

$$Término\ a_n = \frac{3n}{n+1} \qquad Término\ a_n + 1 sutituimos\ n\ por\ (n+1) = \frac{3(n+1)}{(n+1)+1}$$

Establecemos la inecuación correspondiente y obtenemos:

$$\frac{3n}{n+1} = \frac{3(n+1)}{(n+1)+1} \Rightarrow 3n(n+2) \leq (n+1).(3n+3) \Leftrightarrow 3n^2 + 6n \leq 3n^2 + 3n + 3n + 3$$

$$0 \leq 3$$

Se cumple para cualquier valor de n, siendo n cualquier número natural, por tanto la sucesión es <u>creciente.</u>

19.- Demostrar si son creciente o decrecientes las siguientes sucesiones:

a) 1, 4, 9, 16, 25, ……………..

El término a_n de la sucesión es $a_n = n^2$ Vamos a demostrar si crece.

Para ser una sucesión creciente, tiene que cumplirse: $a_n \leq a_n + 1$

$$Término\, a_n = n^2 \qquad Término\, a_n + 1 sustituimos\, n\, por (n+1) = (n+1)^2$$

Estableciendo la inecuación correspondiente, obtenemos:

$$n^2 \leq (n+1)^2 \Rightarrow n^2 \leq n^2 + 2n + 1$$

Por tanto: $0 \leq 2n + 1$

Se cumple para cualquier valor de n, siendo n cualquier número natural, por tanto la sucesión es <u>creciente.</u>

b) 1, 4, 7, 10, ………………………..

El término general de la sucesión es $a_n = 3n - 2$

Vamos a demostrar si la sucesión crece:

Para ser una sucesión creciente, tiene que cumplirse: $a_n \leq a_n + 1$

$Término\ a_n = 3n - 2 \quad \Rightarrow \quad Término\ a_n + 1\ sustituimos\ n\ por (n+1) a_n + 1 = 3(n+1) - 2$

Establecemos la inecuación correspondiente y obtenemos:

$3n - 2 \quad \leq \quad 3n + 1 \qquad\qquad -2 \leq 1$

Se cumple para cualquier valor de n, siendo n cualquier número natural, por tanto la sucesión es <u>creciente.</u>

c) $\frac{5}{3}, \frac{10}{9}, \frac{20}{27}, \frac{40}{81}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

Es una progresión geométrica $a_n = a_1 . r^{n-1}$

El término $a_n\ de\ la\ sucesión\ es\ a_n = \frac{5}{3} . \frac{2^{n-1}}{3}$

Vamos a demostrar si la sucesión crece:

Para ser una sucesión creciente, tiene que cumplirse: $a_n \leq a_n + 1$

$Término\ a_n = \frac{5}{3} . \frac{2^{n-1}}{3} \qquad Término\ a_n + 1 sustituimos\ n\ por\ (n+1) = \frac{5}{3} . \frac{2^{n+1-1}}{3}$

Establecemos la inecuación correspondiente y obtenemos:

$\frac{5}{3} . \frac{2^{n-1}}{3} \leq \frac{5}{3} . \frac{2^{n+1-1}}{3} \qquad\qquad \frac{10^{n-1}}{9} \leq \frac{10^n}{9}$

Se cumple para cualquier valor de n, siendo n cualquier número natural, por tanto la sucesión es <u>creciente.</u>

d) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots\ldots\ldots$

Es una progresión geométrica $a_n = a_1 . r^{n-1}$

El término general $a_n de\ la\ sucesión\ es: a_n = 1 . \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Vamos a demostrar si la sucesión crece:

Para ser una sucesión creciente, tiene que cumplirse: $a_n \leq a_n + 1$

$$Término\ a_n = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad Término\ a_n + 1 sustituimos\ n\ por\ (n+1)\ = 1.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-1}$$

Establecemos la inecuación correspondiente y obtenemos:

$$1.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 1.\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-1} \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

Se cumple para cualquier valor de n, siendo n cualquier número natural, por tanto la sucesión es <u>creciente.</u>

20.- Siendo

$$a_n = \frac{3+2n}{n} \quad y \quad b_n = \frac{n^2+1}{n}\ realizar\ la\ suma\ de\ a_n + b_n$$

$$\frac{3+2n}{n} + \frac{n^2+1}{n} = \frac{(3+2n)+(n^2+1)}{n} = \frac{n^2+2n+4}{n}$$

20 a) Siendo

$$Cn = \frac{2^n}{2^{n+1}} \quad y \quad D_n = \frac{(n^2+2n-3)}{(n+1)} \quad realizar\ la\ diferencia\ (C_n) - (D_n)$$

$$\frac{2^n}{2^{n+1}} - \frac{(n^2+2n-3)}{(n+1)} = \frac{2^n(n+1) - (n^2+2n-3)2^{n+1}}{2^{n+1}\ (n+1)}$$

$$= \frac{(2n+2)^n - (2n^2+4n-6)^{n+1}}{(2n+2)^{n+1}}$$

20 b) Siendo:

$$C_n = \frac{2^n}{2^{n+1}} \quad y \quad E_n = \frac{n}{n^2} \quad Calcular\ la\ diferencia\ (C_n) - (E_n)$$

$$\frac{2^n}{2^{n+1}} - \frac{n}{n^2} = \frac{2^n n^2 - 2n^{n+1}}{2n^{n+1+2}}$$

$$= \frac{2n^{n+2} - 2n^{n+1}}{2n^{n+3}} \qquad = \frac{2n^{n+1}}{2n^{n+3}} \Rightarrow \textit{simplificando} \Rightarrow \frac{n^{n+1}}{n^{n+3}}$$

$$n^{n-2}$$

20 c) Siendo:

$$A_n = \frac{3+2n}{n} \quad y \; C_n = \frac{2n}{2^{n+1}} \quad \textit{Calcular el producto } (A_n).\,(C_n)$$

$$\frac{3+2n}{n} \cdot \frac{2n}{2^{n+1}} = \frac{6n+4n^n}{2^{n+1}} = \frac{2(3^n+2n^n)}{2n^{n+1}} = \frac{3^n+2n^n}{n(n+1)}$$

20 d) Siendo:

$$C_n = \frac{2^n}{2^{n+1}} \quad \textit{Calcular el producto} 3.(C_n)$$

$$3.\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{6^n}{2^{n+1}} = 3^{n-n+1} = 3^1 = 3$$

20 e) Siendo:

$$F_n = \frac{2^n}{n} \quad y \quad A_n = \frac{3+2n}{n} \quad \textit{Calcular el cociente} (F_n):(A_n)$$

$$\frac{2^n}{n} : \frac{3+2n}{n} = \frac{n.2^n}{n(3+2n)} \; \textit{simplificando} = \frac{2^n}{3+2n}$$

21.- Decir cuales son las cotas superior e inferior en cada caso:

a) 1, -3 , 5, - 7 , 0 , …………………………………………..

Cota Superior: No existe
Cota Inferior: No existe

b) 1, 2, 4, 8, 16 , ……………………………………………………

Cota Superior: No Existe
Cota Inferior: 1

c) 1, 4, 9, 16, 25, ……………………………………………………….

Cota Superior: No Existe
Cota Inferior: 1

d) 1, 4, 7, 10, ………………………………………………..

Cota Superior: No existe
Cota Inferior: 1

e) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots\ldots\ldots$

Cota Superior: 1
Cota Inferior: ½ Está acotada

f) $\frac{5}{3}, \frac{10}{9}, \frac{15}{27}, \frac{20}{81}, \ldots\ldots\ldots$

Cota Superior: 5/3
Cota Inferior: 0 Está acotada

g) 2, 5, 10, 17, 26, 37 , ……………………..

Cota superior: No existe
Cota Inferior: 2

h) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots\ldots$

Cota Superior: 1
Cota Inferior: 0 Está acotada

22.- Das las sucesiones

$$a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n, b_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^n, c_n = -\left(\frac{3}{2}\right)^n, d_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n, e_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^n \text{ y } f_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

con estos términos generales, responder:

1°.- ¿Cuáles están acotadas superiormente?

Si le damos valores a n:

Están acotadas C_n, D_n, E_n y F_n.

2º.- ¿Cuáles están acotadas inferiormente?

Le damos valores a n:

Están acotadas A_n, D_n, E_n y F_n.

3º.- ¿Cuáles están acotadas?

Le damos valores a n:

Están acotadas D_n y E_n.

23.- Demostrar que 3 o cualquier número mayor que 3 es una cota de la sucesión de término general $a_n = \frac{3n - 1}{n + 1}$

Vamos a demostrar si es una cota superior.

Para ello tiene que cumplirse que $a_n \leq k$

$$\frac{3n - 1}{n + 1} \leq 3 \Rightarrow 3n - 1 \leq 3n + 3 \Rightarrow -1 \leq 3$$

Se cumple siempre, por tanto 3 es una cota superior de la sucesión

24.- Probar que la sucesión de término general $a_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2}$ está acotada inferiormente por 2 y superiormente por 3.

Vamos a demostrar si 2 es una cota inferior.

Para ello tiene que cumplirse que $a_n \geq 2$

$$\frac{2n^2 + 1}{n^2} \geq 2 \Rightarrow 2n^2 + 1 \geq 2n^2 \Rightarrow 1 \geq 0$$

Se cumple siempre, por tanto 2 es una cota inferior de la sucesión.

Vamos a demostrar si 3 es una cota superior.

Para ello tiene que cumplirse que $a_n \leq k$

$$\frac{2n^2+1}{n^2} \leq 3 \quad \Rightarrow \quad 2n^2+1 \leq 3n^2 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq n^2$$

Se cumple siempre, por tanto 3 es una cota superior de la sucesión.

Por tanto estamos en condiciones de afirmar que la sucesión está acotada, siendo

Cota Superior: 3
Cota Inferior: 2