RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

EJERCICIO 5 : Sabiendo que $sen\ 50^\circ = 0{,}77$, $cos\ 50^\circ = 0{,}64$ y $tg\ 50^\circ = 1{,}19$, calcula (sin utilizar las teclas trigonométricas de la calculadora):

a) $cos\,130^\circ$ b) $tg\,310^\circ$ c) $cos\,230^\circ$ d) $sen\,310^\circ$

Solución:

$$\text{a) } cos130^\circ = cos\left(180^\circ - 150^\circ\right) = -cos50^\circ = -0{,}64$$

$$\text{b) } tg310^\circ = tg\left(360^\circ - 50^\circ\right) = -tg50^\circ = -1{,}19$$

$$\text{c) } cos230^\circ = cos\left(180^\circ + 50^\circ\right) = -cos50^\circ = -0{,}64$$

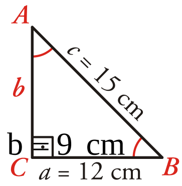
$$\text{d) } sen310^\circ = sen\left(360^\circ - 50^\circ\right) = -sen50^\circ = -0{,}77$$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

EJERCICIO 6 : En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 15 cm y uno de los catetos mide 12 cm. Calcula la longitud del otro cateto y la medida de sus ángulos.

Solución:

Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el otro cateto:

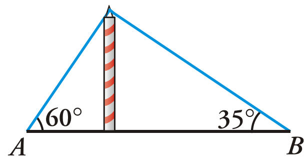


$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 12^2 + b^2 = 15^2 \quad \rightarrow \quad 144 + b^2 = 225 \Rightarrow b^2 = 225 - 144 = 81 \quad \rightarrow \quad b = 9 \text{ cm}$$

Hallamos los ángulos: $sen\,\hat{B} = \frac{b}{c} \quad \rightarrow \quad sen\,\hat{B} = \frac{9}{15} = 0{,}6 \quad \rightarrow \hat{B} = 36^\circ\,52'12'' \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ - \hat{B} = 53^\circ\,7'48''$

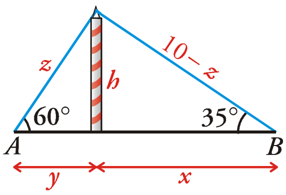
Por tanto: $a = 12 \text{ cm};\ \hat{A} = 53^\circ\,7'48'';\ b = 9 \text{ cm};\ \hat{B} = 36^\circ\,52'12'';\ c = 15 \text{ cm};\ \hat{C} = 90^\circ$

EJERCICIO 7 : Para sujetar un mástil al suelo como indica la figura hemos necesitado 10 metros de cable.



Halla la altura del mástil y la distancia entre los puntos *A* y *B*.

Solución:



$$\left.\begin{array}{l} sen\,60^\circ = \dfrac{h}{z} \\ sen\,35^\circ = \dfrac{h}{10-z} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} z\,sen\,60^\circ = h \\ (10-z)\,sen\,35^\circ = h \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$z\,sen\,60^\circ = (10-z)\,sen\,35^\circ \quad \rightarrow \quad z\,sen\,60^\circ = 10\,sen\,35^\circ - z\,sen\,35^\circ$$

$$z\,sen\,60^\circ + z\,sen\,35^\circ = 10\,sen\,35^\circ \quad \rightarrow \quad z\left(sen\,60^\circ + sen\,35^\circ\right) = 10\,sen\,35^\circ \Rightarrow z = \frac{10\,sen\,35^\circ}{sen\,60^\circ + sen\,35^\circ} = 3{,}98 \text{ m}$$

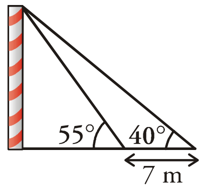
$h = z\,sen\,60^\circ = \dfrac{10\,sen\,35^\circ\,sen\,60^\circ}{sen\,60^\circ + sen\,35^\circ} = 3{,}45 \text{ m} \Rightarrow$ La altura del mástil es de 3,45 m

Para hallar la distancia entre *A* y *B*, tenemos que hallar *x* e *y*:

$$tg\,60^\circ = \frac{h}{y} \quad \rightarrow \quad y = \frac{h}{tg\,60^\circ} = \frac{3{,}45}{tg\,60^\circ} = 1{,}99 \text{ m}$$

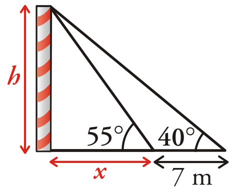
$$tg\,35^\circ = \frac{h}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{h}{tg\,35^\circ} = \frac{3{,}45}{tg\,35^\circ} = 4{,}93 \text{ m}$$

Por tanto, la distancia entre *A* y *B* es de $x + y = 4{,}93 + 1{,}99 = 6{,}92$ m.



<u>EJERCICIO 8</u> : Raquel ve el punto más alto de una antena bajo un ángulo de 55°. Alejándose 7 metros en línea recta, el ángulo es de 40°. ¿Cuál es la altura de la antena?

Solución:

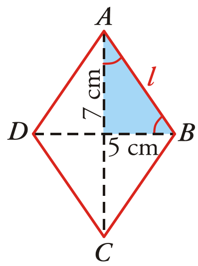


$$\left.\begin{array}{l} tg\,55^\circ = \dfrac{h}{x} \\ tg\,40^\circ = \dfrac{h}{x+7} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x\,tg\,55^\circ = h \\ (x+7)tg\,40^\circ = h \end{array}\right\} \Rightarrow x\,tg\,55^\circ = (x+7)tg\,40^\circ \quad \rightarrow \quad x\,tg\,55^\circ = x\,tg\,40^\circ + 7\,tg\,40^\circ$$

$$x\,tg\,55^\circ - x\,tg\,40^\circ = 7\,tg\,40^\circ \quad \rightarrow \quad x(tg\,55^\circ - tg\,40^\circ) = 7\,tg\,40^\circ \Rightarrow x = \frac{7\,tg\,40^\circ}{tg\,55^\circ - tg\,40^\circ} = 9{,}97 \text{ m}$$

$h = x\,tg\,55^\circ = \dfrac{7\,tg\,40^\circ\,tg\,55^\circ}{tg\,55^\circ - tg\,40^\circ} = 14{,}24 \text{ m} \Rightarrow$ La altura de la antena es de 14,24 metros.

<u>EJERCICIO 9</u> : Las diagonales de un rombo miden 10 y 14 cm, respectivamente. Calcula el lado del rombo y sus ángulos.



Solución:

Hallamos la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras: $7^2 + 5^2 = l^2 \quad \rightarrow \quad l^2 = 74 \quad \rightarrow \quad l = 8{,}6 \text{ cm}$

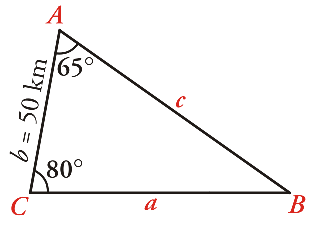
Hallamos los ángulos: $tg\hat{A} = \dfrac{5}{7} \quad \rightarrow \quad \hat{A} = 35^\circ\,32'16'' \quad \rightarrow \quad \hat{B} = 90^\circ - \hat{A} = 54^\circ\,27'44''$

Los ángulos del rombo miden: $\begin{array}{l} 2\hat{A} = 71^\circ\,4'31'' \\ 2\hat{B} = 108^\circ\,55'29'' \end{array}$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

<u>EJERCICIO 10</u> : En dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km, son recibidas señales que manda un barco, B. Si consideramos el triángulo de vértices A, B y C, el ángulo en A es de 65° y el ángulo en C es de 80°. ¿A qué distancia se encuentra el barco de cada una de las dos estaciones de radio?

Solución



Hallamos el ángulo $\hat{B}$: $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 35^\circ$

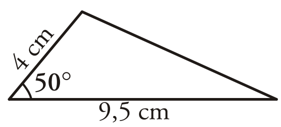
Hallamos los valores de a y c aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{sen\,65^\circ} = \frac{50}{sen\,35^\circ} \quad \rightarrow \quad a = \frac{50\,sen\,65^\circ}{sen\,35^\circ} = 79 \text{ km}$$

$$\frac{c}{sen\,80^\circ} = \frac{50}{sen\,35^\circ} \quad \rightarrow \quad c = \frac{50\,sen\,80^\circ}{sen\,35^\circ} = 85{,}85 \text{ km}$$

Por tanto, el barco está a 79 km de la estación C y a 85,85 km de la estación A.

Los metros de valla necesarios serían: $a + b + c = 20 + 15 + 20{,}49 = 55{,}49 \text{ m}$



EJERCICIO 11 : Resuelve este triángulo, es decir, halla sus lados y sus ángulos:

Solución:
Hallamos el lado c con el teorema del coseno:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

$c^2 = 9{,}5^2 + 4^2 - 2\cdot 9{,}5\cdot 4\cdot \cos 50^\circ \Rightarrow c^2 = 57{,}4 \quad \rightarrow \quad c = 7{,}58 \text{ cm} \Rightarrow$

$c^2 = 90{,}25 + 16 - 48{,}85$

Como conocemos los tres lados, la solución es única.

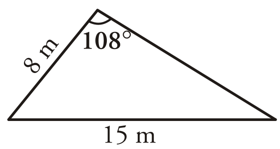
Hallamos el ángulo $\hat{A}$:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} \quad \rightarrow \quad \frac{9{,}5}{sen\,\hat{A}} = \frac{7{,}58}{sen\,50^\circ} \quad \rightarrow \quad sen\,\hat{A} = \frac{9{,}5\,sen\,50^\circ}{7{,}58} \Rightarrow sen\,\hat{A} = 0{,}96 \quad \rightarrow \quad \hat{A} = 73^\circ\,45'24''$$

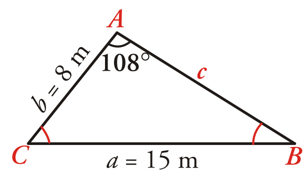
$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 56^\circ\,14'36''$

Por tanto: $a = 9{,}5$ cm; $\hat{A} = 73^\circ\,45'24''$; $b = 4$ cm; $\hat{B} = 56^\circ\,14'36''$; $c = 7{,}58$ cm; $\hat{C} = 50^\circ$

EJERCICIO 12 : Halla los lados y los ángulos de este triángulo:



Solución:



Hallamos el ángulo $\hat{B}$ con el teorema de los senos:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} \quad \rightarrow \quad \frac{15}{sen\,108^\circ} = \frac{8}{sen\,\hat{B}} \Rightarrow$$

$$sen\,\hat{B} = \frac{8\,sen\,108^\circ}{15} = 0{,}507 \quad \rightarrow \quad \hat{B} = 30^\circ\,28'46''$$

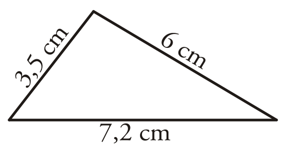
(Como $\hat{A}$ es obtuso, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ han de ser agudos, solo hay una relación).

Hallamos el ángulo $\hat{C}$: $\Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 41^\circ\,31'14''$

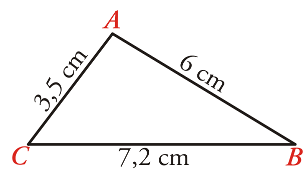
Calculamos el lado c: $\dfrac{c}{sen\,\hat{C}} = \dfrac{a}{sen\,\hat{A}} \quad \rightarrow \quad \dfrac{c}{sen(41^\circ\,31'14'')} = \dfrac{15}{sen\,108^\circ} \quad \rightarrow \quad c = 10{,}46 \text{ m}$

Por tanto: $a = 15$ m; $\hat{A} = 108^\circ$; $b = 8$ m; $\hat{B} = 30^\circ\,28'46''$; $c = 10{,}46$ m; $\hat{C} = 41^\circ\,31'14''$

EJERCICIO 13 : Calcula los lados y los ángulos del siguiente triángulo:



Solución:



Como conocemos los tres lados (y cada lado es menor que la suma de los otros dos), existe solución única. Hallamos los ángulos A y B con el teorema del coseno:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A} \Rightarrow 51{,}84 = 12{,}25 + 36 - 42\cos\hat{A} \Rightarrow$

$42\cos A = 12{,}25 + 36 - 51{,}84 \Rightarrow 42\cos\hat{A} = -3{,}59$

$\cos\hat{A} = -0{,}085 \quad \rightarrow \quad \hat{A} = 94^\circ\,54'12''$

$b^2 = a^2 + c^2 - ac\cos\hat{B} \quad \rightarrow \quad 12{,}25 = 51{,}84 + 36 - 86{,}4\cos\hat{B} \Rightarrow$

$86{,}4\cos\hat{B} = 51{,}84 + 36 - 12{,}25 \quad \rightarrow \quad \cos\hat{B} = 0{,}875 \Rightarrow \hat{B} = 28^\circ\,58'7''$

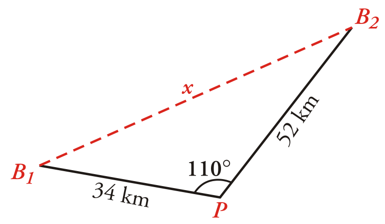
$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 56^\circ\,7'41''$

Por tanto: $a = 7{,}2$ cm; $\hat{A} = 94^\circ\,54'12''$; $b = 3{,}5$ cm; $\hat{B} = 28^\circ\,58'7''$; $c = 6$ cm; $\hat{C} = 56^\circ\,7'41''$

EJERCICIO 14 : Dos barcos salen de un puerto a la misma hora con rumbos distintos, formando un ángulo de 110°. Al cabo de 2 horas, el primer barco está a 34 km del punto inicial y el segundo barco, a 52 km de dicho punto. En ese mismo instante, ¿a qué distancia se encuentra un barco del otro?

Solución:

Hallamos la distancia, x, aplicando el teorema del coseno:

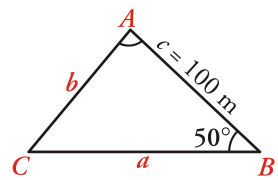


$$\left.\begin{array}{l} x^2 = 34^2 + 52^2 - 2 \cdot 34 \cdot 52 \cdot \cos 110^\circ \\ x^2 = 1156 + 2704 + 1\,209{,}38 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 = 5069{,}38 \\ x = 71{,}20 \text{ km} \end{array}$$

Por tanto, la distancia entre los dos barcos es de 71,20 km.

<u>EJERCICIO 15</u> : Se desea unir tres puntos, A, B y C, mediante caminos rectos que unan A con B, B con C y C con A. La distancia de A a B es de 100 metros, el ángulo correspondiente a B es de 50°, y el ángulo en A es de 75°. ¿Cuál es la distancia entre B y C? ¿Y entre A y C?

Solución:



Hallamos el ángulo $\hat{C}$: $\hat{C} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 55^\circ$

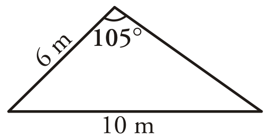
Calculamos a y b aplicando el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} 75^\circ} = \frac{100}{\operatorname{sen} 55^\circ} \rightarrow a = \frac{100 \cdot \operatorname{sen} 75^\circ}{\operatorname{sen} 55^\circ} = 117{,}92 \text{ m}$$

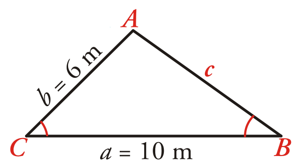
$$\frac{b}{\operatorname{sen} 50^\circ} = \frac{100}{\operatorname{sen} 55^\circ} \rightarrow b = \frac{100 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ}{\operatorname{sen} 55^\circ} = 93{,}52 \text{ m}$$

Por tanto, la distancia entre B y C es de 117,92 m y la distancia entre A y C es de 93,52 m.

<u>EJERCICIO 16</u> : Resuelve el siguiente triángulo, es decir, halla el valor de sus lados y de sus ángulos:



Solución:



Hallamos el ángulo $\hat{B}$ con el teorema de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow \frac{10}{\operatorname{sen} 105^\circ} = \frac{6}{\operatorname{sen} \hat{B}} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{6 \operatorname{sen} 105^\circ}{10} = 0{,}58 \rightarrow \hat{B} = 35^\circ\, 25'9''$$

(Como $\hat{A}$ es obtuso, $\hat{B}$ y $\hat{C}$ han de ser agudos; solo hay una solución).

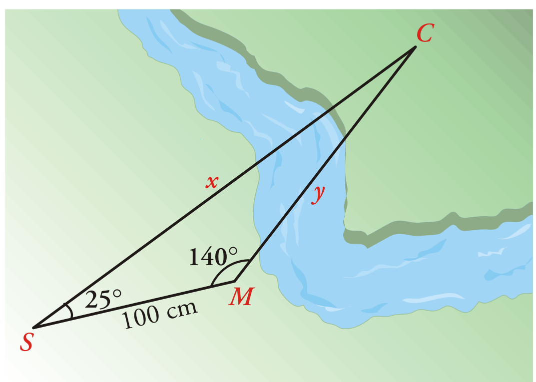
Hallamos el ángulo de $\hat{C}$: $\hat{C} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{B}\right) = 39^\circ\, 34'51''$

Calculamos el lado c: $\dfrac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \dfrac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} \rightarrow \dfrac{c}{\operatorname{sen}\left(39^\circ\, 34'51''\right)} = \dfrac{10}{\operatorname{sen} 105^\circ} \rightarrow c = 6{,}6 \text{ m}$

Por tanto: $a = 10$ m; $\hat{A} = 105^\circ$; $b = 6$ m; $\hat{B} = 35^\circ\, 25'9''$; $c = 6{,}6$ m; $\hat{C} = 39^\circ\, 34'51''$

<u>EJERCICIO 17</u> : Sara y Manolo quieren saber a qué distancia se encuentra un castillo que está en la orilla opuesta de un río. Se colocan a 100 metros de distancia el uno del otro y consideran el triángulo en cuyos vértices están cada uno de los dos, y el castillo. El ángulo correspon-diente al vértice en el que está Sara es de 25° y el ángulo del vértice en el que está Manolo es de 140°. ¿A qué distancia se encuentra Sara del castillo? ¿Y Manolo?

Solución:



El ángulo $\hat{C}$ será: $\hat{C} = 180^\circ - \left(25^\circ + 140^\circ\right) = 15^\circ$

Con el teorema de los senos hallamos los lados x e y:

$$\frac{x}{\operatorname{sen} 140^\circ} = \frac{100}{\operatorname{sen} 15^\circ} \rightarrow x = \frac{100 \operatorname{sen} 140^\circ}{\operatorname{sen} 15^\circ} = 248{,}35 \text{ m}$$

$$\frac{y}{\operatorname{sen} 25^\circ} = \frac{100}{\operatorname{sen} 15^\circ} \rightarrow y = \frac{100 \operatorname{sen} 25^\circ}{\operatorname{sen} 15^\circ} = 163{,}29 \text{ m}$$

Por tanto: Sara está a 248,35 m del castillo y Manolo, a 163,29 m.