Ejercicios de cónicas 1º bachillerato C

1) Clasifica las siguientes cónicas y expresa sus focos y su excentricidad:
   a) $x^2 + y^2 + 4x - 11y - 12 = 0$
   b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
   c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$
   d) $2x^2 - 3y^2 = 108$
   e) $y^2 - \frac{x^2}{4} = 1$
   f) $x^2 = 20\,y$
   g) $x^2 = -10\,y$
   h) $y^2 = 8x$
   i) $y^2 = -16x$

Soluciones:

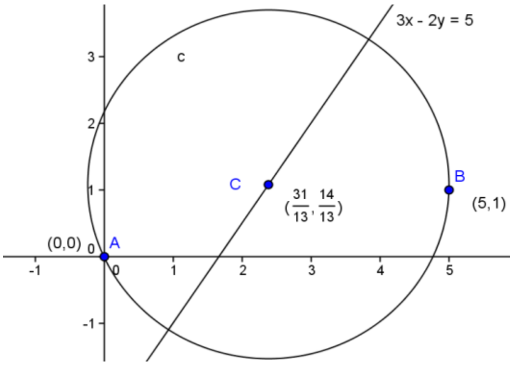
a) Circunferencia de centro $((-2, \frac{11}{2})$ y radio $3\sqrt{2}$. Excentricidad e = 0
b) Elipse con los focos en el eje X. Focos: F(4, 0), F'(- 4, 0), e = $\frac{4}{5}$
c) Elipse con los focos en el eje Y. Focos: F(0, $2\sqrt{3}$), F'(0, - $2\sqrt{3}$), e = $\frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
d) Hipérbola con los focos en el eje X. Focos: F($3\sqrt{10}$, 0), F'($-3\sqrt{10}$, 0), e = $\frac{\sqrt{15}}{3}$
e) Hipérbola con los focos en el eje Y. Focos: F(0, $\sqrt{5}$), F'(0, - $\sqrt{5}$), e = $\sqrt{5}$
f) Parábola de eje el eje de ordenadas. Foco F(0, 5) directriz y = - 5; e = 1
g) Parábola de eje el eje de ordenadas. Foco F(0, $\frac{-5}{2}$) directriz y = $\frac{5}{2}$; e = 1
h) Parábola de eje el eje de abscisas. Foco F(2,0) directriz x = - 2; e = 1
i) Parábola de eje el eje de abscisas, Foco F(- 4, 0) directriz x = 4; e = 1

2) Hallar la ecuación de una circunferencia que tiene su centro en la recta 3x – 2y = 5, y que pasa por los puntos (0,0) y (5, 1)

Ecuación de la circunferencia de centro C(a , b) y radio r : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

- C(a , b) ∈ 3x – 2y = 5 → 3 a – 2b = 5
- (0, 0) ∈ $circunferencia$ → $(0-a)^2 + (0 - b)^2 = r^2$ Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas
- (5, 1) ∈ $circunferencia$ → $(5-a)^2 + (1 - b)^2 = r^2$

$$\begin{cases} 3a - 2b = 5 \\ a^2 + b^2 = r^2 \\ 25 - 10a + 1 - 2b + a^2 + b^2 = r^2 \end{cases} \to \begin{cases} 3a - 2b = 5 \\ 10a + 2b = 26 \end{cases} \quad a = \frac{31}{13} \quad b = \frac{14}{13}$$



Ecuación de la circunferencia:

$(x - \frac{31}{13})^2 + (y - \frac{14}{13})^2 = \frac{89}{13}$

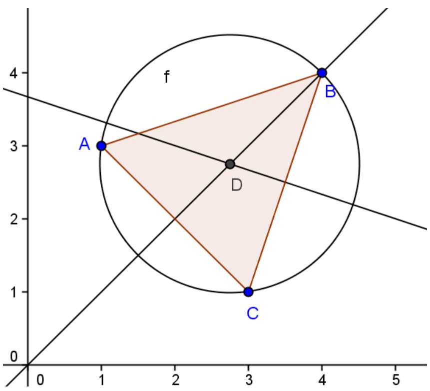
3) Dados los puntos A(1,3), B(4,4), C(3, 1), hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo que determinan.

Método 1: Calcular el circuncentro del triángulo

$$\begin{cases} \text{Mediatriz correspondiente al lado } AC: \quad x = y \\ \text{Mediatriz correspondiente lado } BC: \; y - \frac{5}{2} = \frac{-1}{3}x + \frac{7}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y - \frac{5}{2} = \frac{-1}{3}x + \frac{7}{6} \end{cases} \quad \text{Circuncentro } \left(\frac{11}{4}, \frac{11}{4}\right)$$

$$Radio \; = \text{distancia de un vértice al circuncentro} = \sqrt{\left(4 - \frac{11}{4}\right)^2 + \left(4 - \frac{11}{4}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$



Ecuación circunferencia: $\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{4}\right)^2 = \frac{25}{8}$

Método 2 (este es el método más idóneo): Por la ecuación general de la circunferencia

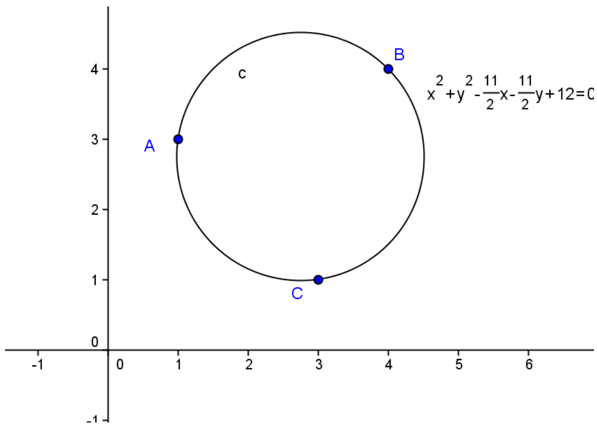
$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

- $(1,3) \in circunferencia \rightarrow 1 + 9 + A + 3B + C = 0$
- $(4,4) \in circunferencia \rightarrow 16 + 16 + 4A + 4B + C = 0$
- $(3,1) \in circunferencia \rightarrow 9 + 1 + 3A + B + C = 0$

$$\begin{cases} A+3B+C=-10 \\ 4A+4B+C=-32 \\ 3A+B+C=-10 \end{cases}$$ sistema que se resuelve por método de Gauss

Solución: $\left(A=\frac{-11}{2}, B=\frac{-11}{2}, C=12\right)$

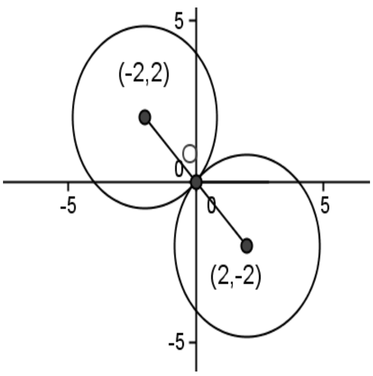
Ecuación de la circunferencia en forma general: $x^2+y^2-\frac{11}{2}x-\frac{11}{2}y+12=0$



4) Determinar la ecuación de la circunferencia de radio $2\sqrt{2}$ que pasa por el origen de coordenadas y cuyo centro está situado en la bisectriz del 2º cuadrante.

$$\begin{cases} radio\ 2\sqrt{2} \rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=8 \\ pasa\ por\ (0,0) \rightarrow a^2+b^2=8 \\ centro\ en\ la\ bisectriz\ del\ 2º\ cuadrante \rightarrow a=-b \end{cases}$$ Sistema que tiene dos soluciones

$$b=\pm 2 \rightarrow \begin{array}{l} b=2\ entonces\ \ a=-2 \rightarrow Centro\ (-2{,}2) \\ b=-2\ entonces\ a=2 \rightarrow Centro\ (2,-2) \end{array}$$



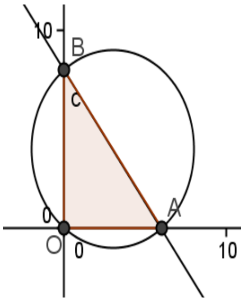
$Existen\ dos\ circunferencias:$ $\begin{array}{l} c_1: \ (x+2)^2+(y-2)^2=8 \\ c_2: \ (x-2)^2+(y+2)^2=8 \end{array}$

5) La recta $\frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1$ forma un triángulo con los ejes coordenados. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita.

Punto de corte con eje X: $\begin{cases} \frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow (6{,}0)$

Punto de corte con eje y: $\begin{cases} \frac{x}{6}+\frac{y}{8}=1 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow (0{,}8)$

Triángulo O(0,0); A(6,0); B(0,8)



Ecuación general de la circunferencia :

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

- $(0,0) \in circunferencia \rightarrow \ 0 + 0 + 0 + 0 + C = 0 \rightarrow C = 0$
- $(6,0) \ \in circunferencia \rightarrow \ 36 + 0 + 6A + C = 0$
- $(0,8) \ \in circunferencia \rightarrow \ 0 + 64 + 8B + C = 0$

$\begin{cases} C = 0 \\ 6A + 36 = 0 \\ 8B + 64 = 0 \end{cases}$ Solución: $(A = -6, \ B = \ -8, \ C = 0)$

Ecuación de la circunferencia en forma general: $x^2 + y^2 - 6x \ - \ 8y = 0$

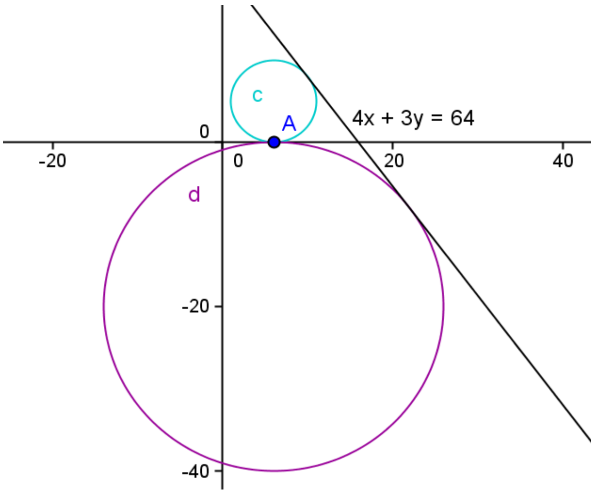
6) Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje de abscisas en el punto A(6,0) y es tangente también a la recta de ecuación 4x + 3y = 64

Ecuación de la circunferencia de centro C(a , b) y radio r : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

- La recta y = 0 es tangente a la circunferencia en A(6,0) y como el radio y la tangente son perpendiculares en el punto de tangencia → el centro es un punto de la recta X = 6 , luego el centro es C(6,b)
- El radio es la distancia del centro a las rectas tangentes → $|b| = \frac{|4.6+3b-64|}{5}$

  ecuación que tiene dos soluciones: $b = \frac{3b-40}{5}; \quad b = \ -20$

  $b = -\ \frac{3b-40}{5}; \ \ b = 5$

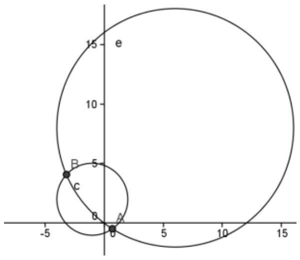


Existen dos circunferencias:

$c_1 : \ \ (x-6)^2 + \ (y-5)^2 = 25$

$c_2 : \ \ (x-6)^2 + \ (y+20)^2 = 400$

7) Determina la posición relativa que ocupan las circunferencias: $x^2 + y^2 - 12x - 16y = 0$; $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$;



$\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x - 16y = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \end{cases}$ → 7x + 6y =2; x = $\frac{2-6y}{7}$

Sustituimos el valor de x en cualquiera de las dos circunferencias

$$\left(\frac{2-6y}{7}\right)^2 + y^2 - 12\frac{2-6y}{7} - 16y = 0$$

$85y^2 - 304y - 164 = 0$ ecuación que tiene dos soluciones por tanto las dos circunferencias se cortan en dos puntos, es decir: <u>son secantes</u>

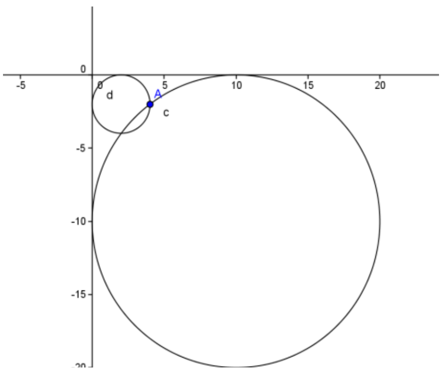
8) Determinar la ecuación de una circunferencia que pasa por (4, -2) y es tangente a los ejes coordenados.

Ecuación de la circunferencia de centro C(a , b) y radio r : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

- (4, -2) ∈ $circunferencia$ → $(4-a)^2 + (-2-b)^2 = r^2$
- La recta y = 0 es tangente a la circunferencia→ $|b|$ =r
- La recta x = 0 es tangente a la circunferencia → $|a|$ =r

  Por tanto $|b|$ =$|a|$ =r ecuación que tiene dos soluciones: $\begin{matrix} b = a \\ b = -a \end{matrix}$

  - Si b = a → $(4-a)^2 + (-2-a)^2 = a^2$ esta ecuación no tiene solución real
  - Si b = - a → $(4-a)^2 + (-2+a)^2 = a^2$ ecuación con dos soluciones: $\begin{matrix} a = 10 \\ a = 2 \end{matrix}$

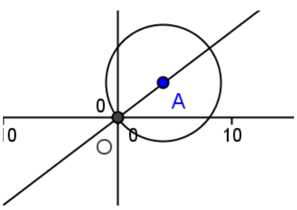


Existen dos circunferencias:

$c_1 : \ (x-10)^2 + (y+10)^2 = 100$

$c_2 : \ (x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$

9) Hallar la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ que pasa por el origen.



Un diámetro siempre pasa por el centro de la circunferencia y por un punto de la circunferencia.

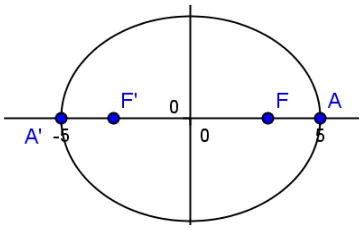
Centro de la circunferencia $\begin{cases} -8 = -2a; \ a = 4 \\ -6 = -2b; \ b = 3 \end{cases}$ C(4, 3)

Ecuación diámetro: $\frac{x-0}{4-0} = \frac{y-0}{3-0} \rightarrow y = \frac{3}{4}x$

10) Un punto de una elipse dista de cada uno de sus focos 2 y 8 cm. Sabiendo que la distancia focal es 6 m. Se pide:

a) La ecuación reducida de la elipse

b) Los focos y la excentricidad



Como en la elipse la suma de distancias es constante e igual a 2a → 2+8 =2a; a = 5

Distancia focal = 2c; 2c =6; c = 3

En la elipse se verifica $a^2 = b^2 + c^2$; 25 = $b^2 + 9$;

b = 4

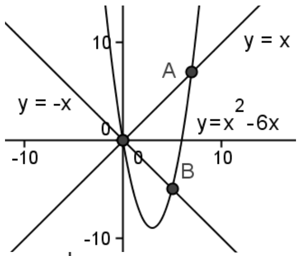
Ecuación reducida de la elipse: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Focos: F(3,0); F'(-3,0); excentricidad e =$\frac{c}{a} = \frac{3}{5}$

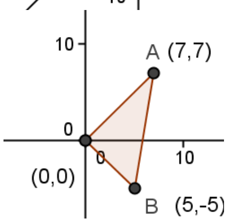
11) Hallar las coordenadas de los puntos en que las bisectrices de los ángulos formados por los ejes coordenados cortan a la parábola $y = x^2$ - 6x. Los puntos de intersección son vértices de un triángulo. Se pide calcular el área del mismo.

$\begin{cases} y = x^2 - 6x \\ y = x \end{cases}$ solución: O(0,0); A(7,7)

$\begin{cases} y = x^2 - 6x \\ y = -x \end{cases}$ solución: O(0,0); B(5,-5)



$Triángulo$: O(0,0); A(7,7); B(5,-5)



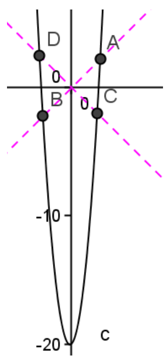
El triángulo es rectángulo porque el lado OA y el lado OB son perpendiculares por pertenecer a las bisectrices que son rectas perpendiculares.

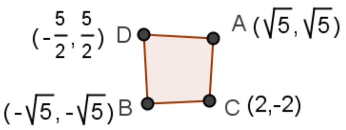
Área = $\frac{1}{2} \cdot \overline{OB} \cdot \overline{OA}$ = $\frac{1}{2} \cdot 7\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}$ = 35 u^2

12) Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de la parábola $y = 4x^2$ + x – 20 con las bisectrices de los cuatro cuadrantes formados por los ejes coordenados. Dichos puntos son vértices de un cuadrilátero. Se pide hallar el área del mismo.

$\begin{cases} y = 4x^2 + x - 20 \\ y = x \end{cases}$ solución: A($\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$); B(- $\sqrt{5}$, - $\sqrt{5}$)

$\begin{cases} y = 4x^2 + x - 20 \\ y = -x \end{cases}$ solución: : C(2, -2); D($\frac{-5}{2}$, $\frac{5}{2}$)





Cuadrilátero: A($\sqrt{5}, \sqrt{5}$); D($\frac{-5}{2}$, $\frac{5}{2}$); B(- $\sqrt{5}$, - $\sqrt{5}$); C($2, -2$)

Se descompone el cuadrilátero en dos triángulos: $\begin{matrix} ADB \\ ABC \end{matrix}$

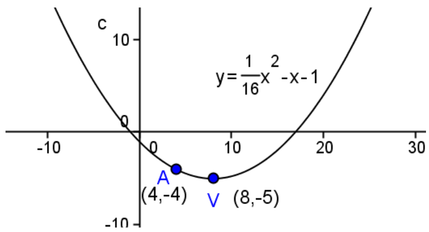
Área triángulo ADB: $\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot distancia(D, recta\ AB) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{[5]}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{5}$

Área triángulo ABC: $\frac{1}{2}\overline{AB} \cdot distancia(C, recta\ AB) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{[4]}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{5}$

Área del cuadrilátero = $9\sqrt{5}\ u^2$

13) Hallar la ecuación de la parábola $y = ax^2$ +b x + c sabiendo que pasa por los puntos P(4, -4) y V(8, -5); siendo este último el vértice de la misma.

- $(4, -4) \in parábola \rightarrow -4 = 16a + 4b + c$
- $(8, -5) \in parábola \rightarrow -5 = 64a + 8b + c$
- $(8, -5)$ *es el vértice* $\rightarrow 8 = \frac{-b}{2a}$

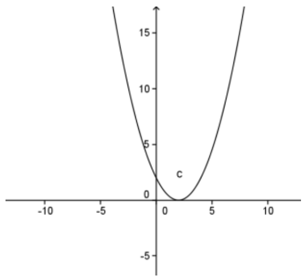


$\begin{cases} -4 = 16a + 4b + c \\ -5 = 64a + 8b + c \\ 8 = \frac{-b}{2a} \end{cases}$ Sistema que se resuelve por Gauss;

solución: (a = $\frac{1}{16}$, $b = -1, c = -1) \rightarrow y = \frac{1}{16}x^2 - x - 1$

14) Dibujar la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ - 2 x + 2

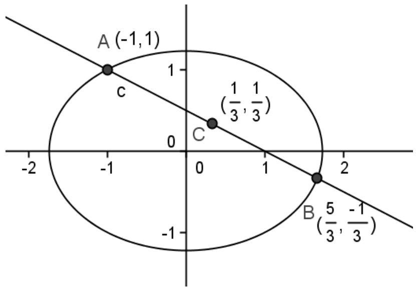
- Curvatura
- Puntos de corte con eje X; corta en el punto (2, 0)
- Vértice (2, 0)
- Punto de corte con eje Y: (0,2)



15) Hallar las coordenadas del punto medio de la cuerda que intercepta la recta x + 2y – 1 = 0 en la elipse $x^2 + 2y^2 = 3$

$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ sistema con dos soluciones: $\begin{matrix} A(-1,1) \\ B(\frac{5}{3}, \frac{-1}{3}) \end{matrix}$

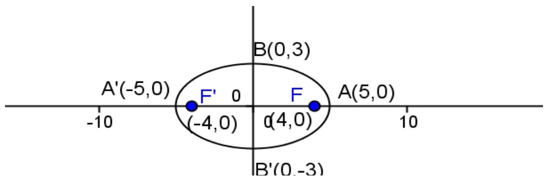
Punto medio de la cuerda AB $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$



16) Calcular la excentricidad de la cónica $9x^2$ + $25y^2$ = 225

Ecuación reducida: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

a = 5; b = 3; c = 4; excentricidad: e = $\frac{4}{5}$

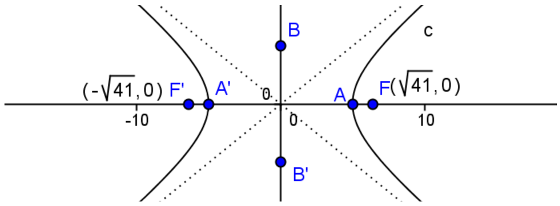


17) Dada la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$, hallar su excentricidad , las coordenadas de los focos y la ecuación de sus asíntotas.

a =5 b = 4 como en la hipérbola $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{41}$; excentricidad e = $\frac{\sqrt{41}}{5}$

Focos: F $(\sqrt{41}, 0)$ F' (- $\sqrt{41}, 0)$

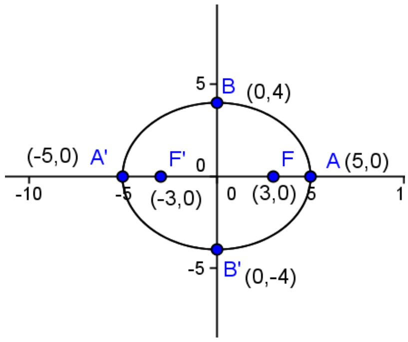
Asíntotas: $y = \frac{4}{5}x$
$y = \frac{-4}{5}x$



18) Si los ejes de una elipse miden 10 cm y 8 cm, respectivamente calcula su excentricidad

$$10 = 2a \rightarrow a = 5$$
$$8 = 2b \rightarrow b = 4$$

En la elipse se verifica $c^2 + b^2 = a^2 \rightarrow$ c = 3; excentricidad e = $\frac{3}{5}$

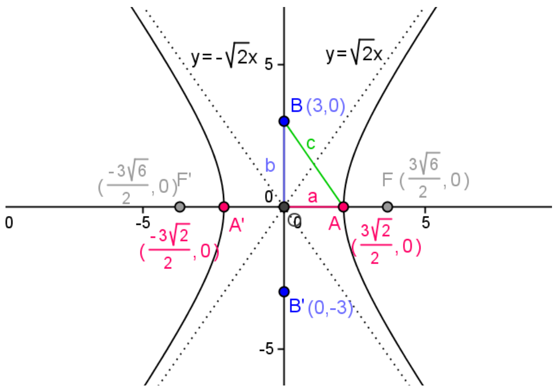


19) Dibujar la hipérbola $2x^2 - y^2 = 9$ previo cálculo de vértices, focos y asíntotas.

Ecuación de una hipérbola con el eje transverso en el eje X, los focos están en el eje X.

$$\frac{x^2}{\frac{9}{2}} - \frac{y^2}{9} = 1 \,;$$

semiejes: $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ $b = 3$ *en* la hipérbola se cumple: $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow$ c = $\frac{3\sqrt{6}}{2}$



vértices: $A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ $B(0,3)$
$A'\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ $B'(0,-3)$

Focos: $F(\frac{3\sqrt{6}}{2}, 0)$
$F'(\frac{-3\sqrt{6}}{2}, 0)$

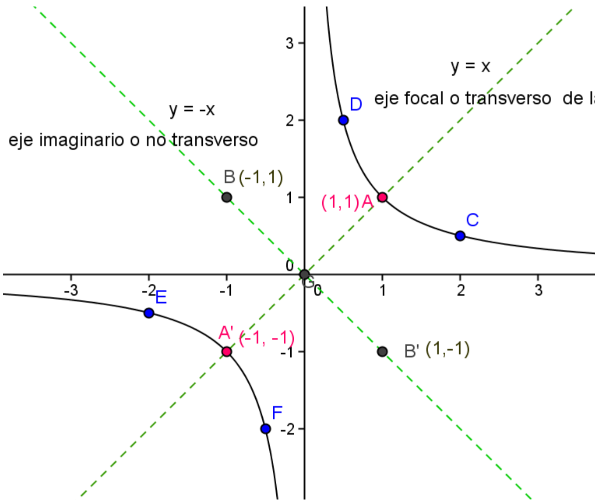
Asíntotas: $y = \sqrt{2}\,x$
$y = -\sqrt{2}\,x$

20) Representa, dando valores a x, la hipérbola de ecuación xy = 1. ¿Cuáles son las ecuaciones de sus asíntotas? ¿y las de los ejes de la cónica? ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices?

xy = 1 es la ecuación de la hipérbola equilátera (ejes iguales) referida a sus asíntotas (y = x ; y = -x) .

Despejando $y = \frac{1}{x}$ resulta la ecuación explícita de la función ya conocida como función de proporcionalidad inversa.

- Las asíntotas son los ejes coordenados $\begin{matrix} eje\ \ X:\ y = 0 \\ eje\ Y:\ x = 0 \end{matrix}$
- Los ejes de la cónica son las rectas y = x e y = -x
- Vértices: $\begin{matrix} A(1,1);\ A'(-1,-1) \\ B(-1,1);\ B'(1,-1); \end{matrix}$



x	$Y = \frac{1}{x}$
1	1
2	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	2
-1	-1
$\frac{-1}{2}$	-2
-2	$\frac{-1}{2}$