EJERCICIOS PROPUESTOS

9.1 Con una calculadora, forma términos de las siguientes sucesiones y estudia a qué valores tienden.

a) $a_n = \dfrac{2n^2}{n^2 + 1}$ **b)** $b_n = \dfrac{-3n}{n + 1}$ **c)** $c_n = \dfrac{1}{5n}$

a) $a_1 = 1$ $a_2 = \dfrac{8}{5} = 1{,}6$ $a_{10} = \dfrac{200}{101} = 1{,}98\ldots$ $a_{100} = \dfrac{20\,000}{10\,001} = 1{,}9998$

Se observa que tiende a 2.

b) $b_1 = -\dfrac{3}{2} = -1{,}5$ $b_{10} = -\dfrac{30}{11} = -2{,}757\ldots$ $b_{100} = -\dfrac{300}{101} = -2{,}97\ldots$ $b_{1000} = -\dfrac{3000}{1001} = -2{,}997\ldots$

Se observa que tiende a -3.

c) $c_1 = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$ $c_2 = 0{,}1$ $c_{10} = 0{,}02$ $c_{100} = 0{,}002$ $c_{1000} = 0{,}0002$ $c_{10\,000} = 0{,}00002$

Se observa que tiende a 0.

9.2 Calcula términos de las siguientes sucesiones y observa si tienen límite.

a) $a_n = n^2 + 1$ **b)** $b_n = -n^3$ **c)** $c_n = \dfrac{n^2}{n + 2}$

a) $a_1 = 2$ $a_2 = 5$ $a_{10} = 101$ $a_{1000} = 1\,000\,001$

La sucesión no parece tender a ningún número real; por tanto, no tiene límite.

b) $b_1 = -1$ $b_2 = -8$ $b_{10} = -1000$ $b_{100} = -1\,000\,000$

La sucesión no parece tender a ningún número real; por tanto, no tiene límite.

c) $c_1 = \dfrac{1}{3}$ $c_2 = 1$ $c_{10} = 8{,}33\ldots$ $c_{100} = 98{,}039\ldots$ $c_{1000} = 998{,}004$ $c_{10\,000} = 9998$

La sucesión no parece tender a ningún número real; por tanto, no tiene límite.

9.3 Dada la sucesión $a_n = \dfrac{6n}{3n + 1}$:

a) Halla su límite.

b) Calcula las distancias entre los términos a_{10}, a_{100} y a_{1000}, y el límite.

c) ¿A partir de qué término esta distancia es menor que una centésima?

d) ¿Y menor que una diezmilésima?

a) Calculamos algunos términos:

$a_{10} = 1{,}9354\ldots$ $a_{100} = 1{,}993355\ldots$ $a_{1000} = 1{,}999333\ldots$ Por tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{6n}{3n + 1} = 2$.

b) $|a_{10} - 2| = |1{,}9354 - 2| = 0{,}0646$; $|a_{100} - 2| = |1{,}993355 - 2| = 0{,}006645$; $|a_{1000} - 2| = |1{,}999333 - 2| = 0{,}000667$

c) $|a_n - 0| = \left|\dfrac{6n}{3n + 1} - 2\right| = \left|\dfrac{6n - 6n + 2}{3n + 1}\right| = \dfrac{2}{3n + 1} < \dfrac{1}{100} \Rightarrow 200 < 3n + 1 \Rightarrow \dfrac{200 - 1}{3} < n \Rightarrow 66{,}33 < n$

A partir del término 67, la diferencia entre los términos de la sucesión y su límite es menor que una centésima.

d) $|b_n - 0| = \dfrac{2}{3n + 1} < \dfrac{1}{10\,000} \Rightarrow 20\,000 < 3n + 1 \Rightarrow \dfrac{20\,000 - 1}{3} < n \Rightarrow 6666{,}33 < n$. A partir del término 6667, la diferencia entre los términos de la sucesión y su límite es menor que una diezmilésima.

9.4 **La sucesión de término general $b_n = \dfrac{3}{n+1}$ tiene por límite 0. Halla a partir de qué término se verifica que $|b_n - 0| < 0{,}00001$.**

$$\left|\frac{3}{n+1}\right| < \frac{1}{100\,000} \Rightarrow 300\,000 < n + 1 \Rightarrow n > 299\,999$$

Por tanto, a partir del término 299 999 se verifica que: $|b_n - 0| < \dfrac{1}{100\,000}$

9.5 **La sucesión de término general $c_n = \dfrac{n^2+2}{2n^2+1}$ tiene por límite $\dfrac{1}{2}$. Calcula a partir de qué término se verifica que $\left|c_n - \dfrac{1}{2}\right| < 0{,}0001$.**

$$\left|\frac{n^2+2}{2n^2+1} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{10\,000} \Rightarrow \left|\frac{2n^2+4-2n^2-1}{4n^2+2}\right| < \frac{1}{10\,000} \Rightarrow \left|\frac{3}{4n^2+2}\right| < \frac{1}{10\,000} \Rightarrow 30\,000 < 4n^2 + 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 29\,998 < 4n^2 \Rightarrow n > \sqrt{\dfrac{29\,998}{4}} = 86{,}6$. Por tanto, a partir del término 87 se verifica que: $\left|c_n - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{10\,000}$

9.6 **Comprueba que la sucesión de término general $a_n = -n - 7$ tiende a menos infinito.**

Calculamos algunos términos de la sucesión: $a_{10} = -17$; $a_{100} = -107$; $a_{1000} = -1007$; $a_{10\,000} = -10\,007$

Los términos se van haciendo cada vez menores, de forma que por muy pequeño que sea un valor, siempre encontramos términos inferiores a él.

Por tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$.

9.7 **Comprueba que $\lim\limits_{n \to \infty}(3n^2 - 5n) = +\infty$.**

Formamos algunos términos de la sucesión: $a_{10} = 250$; $a_{100} = 29\,500$; $a_{10\,000} = 29\,950\,000$. Los términos se van haciendo cada vez mayores, de forma que por muy grande que sea un valor, siempre encontramos términos superiores a él.

Por tanto, $\lim\limits_{n \to \infty}(3n^2 - 5n) = +\infty$.

9.8 **Dados $k = 10\,000$ y la sucesión de término general $a_n = n^2 - 1$, averigua a partir de qué valor del índice n sus términos son mayores que k.**

$$|a_n| > 10\,000 \Rightarrow |n^2 - 1| > 10\,000 \Rightarrow n^2 > 9999 \Rightarrow n > \sqrt{9999} = 99{,}995$$

A partir del término 100, los términos siguientes son mayores que 10 000.

9.9 **Efectúa las siguientes operaciones cuando $n \to \infty$.**

a) $(n + 1)$

b) $\dfrac{1}{3n^2 + 1}$

a) $(n + 1) = (+\infty) + 1 = +\infty$

b) $\dfrac{1}{3n^2+1} = \dfrac{1}{(+\infty)+1} = \dfrac{1}{(+\infty)} = 0$

9.10 **Realiza las correspondientes operaciones cuando $n \to \infty$.**

a) $3n(-5)$

b) $\dfrac{254}{-n^2}$

a) $3n(-5) = -15n = -15 \cdot (+\infty) = -\infty$

b) $\dfrac{254}{-n^2} = \dfrac{254}{-\infty} = 0$

9.11 Dadas las sucesiones $a_n = \dfrac{2n}{n+5}$ y $b_n = \dfrac{n+3}{5n-9}$, calcula:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ **y** $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} 5a_n$ **y** $\lim\limits_{n\to\infty} 7b_n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$ **y** $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n}$

a) Formamos algunos términos de las sucesiones para hallar los límites.

$a_{10} = 1{,}33\ldots;\quad a_{100} = 1{,}9047\ldots;\quad a_{1000} = 1{,}9900\ldots$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+5} = 2$

$b_{10} = 0{,}31\ldots;\quad b_{100} = 0{,}2097\ldots;\quad b_{1000} = 0{,}2009\ldots$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{5n-1} = 0{,}2 = \dfrac{1}{5}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (5a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(5\dfrac{2n}{n+5}\right) = 5 \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+5} = 5 \cdot 2 = 10$

$\lim\limits_{n\to\infty} (7b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(7\dfrac{n+3}{5n-9}\right) = 7 \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{5n-9} = 7 \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{7}{5}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n}{n+5} \cdot \dfrac{n+3}{5n-9}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+5} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{5n-9} = 2 \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{2}{5}$

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = 2^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{2}$

9.12 Dadas las sucesiones $a_n = \dfrac{n^2}{n^2+5}$ y $b_n = \dfrac{7n}{n+1}$, halla:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ **y** $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ **y** $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n}$

a) Formamos algunos términos de las sucesiones para hallar los límites.

$a_{10} = 0{,}9523\ldots;\quad a_{100} = 0{,}9995\ldots;\quad a_{1000} = 0{,}99995\ldots$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+5} = 1$

$b_{10} = 6{,}3636\ldots;\quad b_{100} = 6{,}9306\ldots;\quad b_{1000} = 6{,}933\ldots$

Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n}{n+1} = 7$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2}{n^2+5} + \dfrac{7n}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+5} + \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n}{n+1} = 1 + 7 = 8$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{n^2}{n^2+5}}{\dfrac{7n}{n+1}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+5}}{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n}{n+1}} = \dfrac{1}{7}$

$\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = 1^7 = 1$

9.13 Halla $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3 + 7n^2 + 5n - 2}{3n^3 + 2n - 5}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3 + 7n^2 + 5n - 2}{3n^3 + 2n - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \dfrac{7}{n} + \dfrac{5}{n^2} - \dfrac{2}{n^3}}{3 + \dfrac{2}{n^2} - \dfrac{5}{n^3}} = \frac{4}{3}$$

9.14 Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{25}+2}{3n^{24}+n+2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{25}+2}{3n^{24}+n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\dfrac{2}{n^{25}}}{\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^{24}}+\dfrac{2}{n^{25}}} = +\infty$$

9.15 Dada la sucesión de término general: $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n+9}\right)^{n+9}$.

a) Halla los términos a_{100}, a_{1000} y $a_{10\,000}$.

b) ¿Está acortada la sucesión?¿Es creciente?

a) $a_{100} = \left(1+\dfrac{1}{100+9}\right)^{109} = 2{,}7059\ldots$; $a_{1000} = \left(1+\dfrac{1}{1000+9}\right)^{1009} = 2{,}7169\ldots$; $a_{10\,000} = \left(1+\dfrac{1}{10\,000+9}\right)^{10\,009} = 2{,}7181\ldots$

b) La sucesión está acotada superiormente y es creciente.

9.16 Dada la sucesión de término general: $a_n = \left(\dfrac{n+4}{n+3}\right)^{n+3}$.

a) Calcula los términos a_{100}, a_{1000} y $a_{10\,000}$.

b) ¿Está acortada la sucesión? ¿Es creciente?

a) $a_{100} = \left(\dfrac{100+4}{100+3}\right)^{103} = 2{,}7052\ldots$; $a_{1000} = \left(\dfrac{1000+4}{1000+3}\right)^{1003} = 2{,}71692\ldots$; $a_{10\,000} = \left(\dfrac{10\,000+4}{10\,000+3}\right)^{10\,003} = 2{,}71814\ldots$

b) La sucesión está acotada superiormente y es creciente

9.17 Calcula:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{5n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{5n+2}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{5n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{5}\right]^{n} = e^5$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{5n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{5n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{5n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2} = e^5\cdot 1 = e^5$

9.18 Calcula:

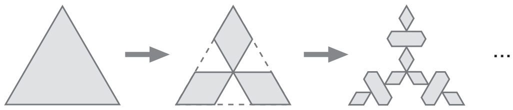
a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n+1}\right)^{n+1}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+2}-\dfrac{1}{n+2}\right)^{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+2}\right)^{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{-(n+2)}\right)^{-(n+2)}\right]^{-1} = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n+1}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+1}+\dfrac{4}{n+1}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{n+1}{4}}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{n+1}{4}}\right)^{\frac{n+1}{4}}\right]^{4} = e^4$

9.19 De forma muy parecida se obtiene el *anticopo de nieve*. Observa la secuencia siguiente.



¿Cuáles serán los perímetros sucesivos de las figuras *anticopo de nieve*? Forma la sucesión de los perímetros.

Sea L la medida del lado del triángulo equilátero.

Los parámetros sucesivos de las figuras anticopo de nieve son:

$p_1 = 3L$

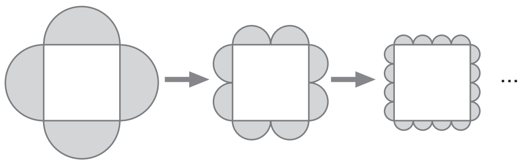
$p_2 = 4\frac{L}{3}3 = 4\ L$

$p_3 = 4\frac{L}{9}6 + 8\frac{L}{9}3 = \frac{8L}{3} + \frac{8L}{3} = \frac{16L}{3}$

Para pasar del perímetro de una figura al de la siguiente, basta con multiplicar por $\frac{4}{3}$. La sucesión de los perímetros es una progresión geométrica de razón $\frac{4}{3}$; por tanto, los términos de esta sucesión son los siguientes:

$3L;\quad \frac{4}{3}(3L);\quad \left(\frac{4}{3}\right)^2(3L);\quad \dots\quad \left(\frac{4}{3}\right)^n(3L)\quad \dots$

9.20 Observa las siguientes figuras.



A partir de un recuadro, lo vamos bordeando con semicircunferencias y aparecen dos sucesiones: las áreas rayadas en verde y los perímetros de las semicircunferencias. Estudia ambas sucesiones.

Sea L la medida del lado del cuadrado.

Sucesión de las áreas rayadas en verde:

$A_1 = 2\pi\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{\pi L^2}{2}$

$A_2 = 4\pi\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{\pi L^2}{4}$

$A_3 = 8\pi\left(\frac{L}{8}\right)^2 = \frac{\pi L^2}{8}$

Por tanto, $\frac{\pi L^2}{2};\ \frac{\pi L^2}{2^2};\ \frac{\pi L^2}{2^3};\ \frac{\pi L^2}{2^4}\quad \dots\quad \frac{\pi L^2}{2^n},\ \dots$

Sucesión de los perímetros de las semicircunferencias:

$p_1 = 2 \cdot 2\pi\frac{L}{2} = 2\pi L$

$p_2 = 4 \cdot 2\pi\frac{L}{4} = 2\pi L$

$p_3 = 8 \cdot 2\pi\frac{L}{8} = 2\pi L$

Se trata de una sucesión constante. $2\pi L,\ 2\pi L,\ 2\pi L\dots$

EJERCICIOS PARA ENTRENARSE

Sucesiones. Hacia la idea de límite

9.21 Calcula algunos términos de estas sucesiones y halla el valor al que tienden.

a) $a_n = \dfrac{5n^2 - 2}{n^2}$

b) $b_n = \dfrac{3}{n + 1}$

c) $c_n = \dfrac{6n}{3 - 2n}$

d) $d_n = \dfrac{n + 1}{2n}$

a)

n	10	100	1000	$\to \infty$
a_n	4,98	4,9998	4,999998	$\to 5$

b)

n	10	100	1000	$\to \infty$
b_n	0,2727	0,0297	0,002997	$\to 0$

c)

n	10	100	1000	$\to \infty$
c_n	−3,529	−3,046	−3,004	$\to -3$

d)

n	10	100	1000	$\to \infty$
d_n	0,55	0,505	0,5005	$\to 0,5$

9.22 Comprueba si la sucesión $a_n = \dfrac{1 - n}{n}$ tiene límite.

$a_{10} = -0,9$; $a_{100} = -0,99$; $a_{100} = -0,999 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 - n}{n} = -1$

9.23 ¿Cuáles de las siguientes sucesiones no tienden a un valor real?

a) $a_n = 1 - n$

b) $b_n = \dfrac{4n - 1}{4n}$

c) $c_n = \dfrac{n^2 - 1}{2n}$

d) $d_n = 3n^2 + 7n + 2$

a) $a_{10} = -9$; $a_{100} = -99$; $a_{1000} = -9999$

b) $b_{10} = 0,975$; $b_{100} = 0,9975$; $b_{1000} = 0,99975$

c) $c_{10} = 4,95$; $c_{100} = 49,995$; $c_{1000} = 499,9995$

d) $d_{10} = 372$; $d_{100} = 30\,702$; $d_{1000} = 3\,007\,002$

Las sucesiones a_n, c_n y d_n no tienden a un número real.

9.24 Escribe el término general de una sucesión cuyo límite sea 1.

$a_n = \dfrac{2n + 1}{2n + 3}$

Límite de una sucesión

9.25 El límite de la sucesión $a_n = \dfrac{n}{n + 9}$ es 1. Halla el término a partir del cual la distancia al límite es menor que 0,01.

$$\left|\frac{n}{n + 9} - 1\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{-9}{n + 9}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{9}{n + 9} < \frac{1}{100} \Rightarrow 900 < n + 9 \Rightarrow n > 891$$

A partir de a_{891}

9.26 Dada la sucesión $a_n = \dfrac{8n}{1-2n}$:

a) Calcula su límite.

b) Halla la distancia entre el término a_{100} y el límite. ¿Es menor que una milésima?

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8n}{1-2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{8n}{n}}{\frac{1}{n} - \frac{2n}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8}{\frac{1}{n} - 2} = -\dfrac{8}{2} = -4$

b) $\left|\dfrac{8 \cdot 100}{1 - 2 \cdot 100} + 4\right| = |-4{,}020 + 4| = 0{,}020$. No es menor que una milésima.

9.27 Halla el límite de la sucesión $b_n = \dfrac{2n}{n+1}$ calculando algunos términos.

¿A partir de cuál de ellos la diferencia entre estos y el límite es menor que 0,0001?

$b_{10} = 1{,}81\ldots;\quad b_{100} = 1{,}98\ldots;\quad b_{1000} = 1{,}998\ldots\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$

$$\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \frac{1}{10\,000} \Rightarrow \left|\frac{-2}{n+1}\right| < \frac{1}{10\,000} \Rightarrow \frac{2}{n+1} < \frac{1}{10\,000} \Rightarrow 2000 < n + 1 \Rightarrow n > 1999$$

A partir de a_{1999}.

9.28 Considera las sucesiones $a_n = \dfrac{1}{n}$ y $b_n = -\dfrac{1}{n}$.

a) Calcula sus límites.

b) Encuentra en cada una de ellas el término a partir del cual la diferencia entre los términos y el límite es menor que una millonésima.

c) Compara los resultados obtenidos.

a) $a_{10} = 0{,}1;\quad a_{100} = 0{,}01;\quad a_{1000} = 0{,}001;\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$b_{10} = -0{,}1;\quad b_{100} = -0{,}01;\quad b_{1000} = -0{,}001;\quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

b) $\left|\dfrac{1}{n} - 0\right| < \dfrac{1}{1\,000\,000} \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{1\,000\,000} \Rightarrow n > 1\,000\,000$

$\left|\dfrac{-1}{n} - 0\right| < \dfrac{1}{1\,000\,000} \Rightarrow \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{1\,000\,000} \Rightarrow n > 1\,000\,000$

En los dos casos es a partir del término $a_{1\,000\,000}$.

c) Los límites son iguales, y el término a partir del cual la diferencia entre los términos y el límite es menor que una determinada cantidad es también el mismo.

9.29 Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-n}{2-4n} = \dfrac{1}{4}$.

$$\left|\frac{1-n}{2-4n} - \frac{1}{4}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{2-2n-1+2n}{2-4n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{2-4n}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{-1}{2-4n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{-2+4n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{2\varepsilon + 1}{4\varepsilon}$$

Por tanto, para cualquier valor de ε se puede encontrar un valor de n de tal modo que a partir del término a_n, la distancia entre estos y el límite es menor que ε.

Sucesiones divergentes

9.30 Indica a qué tienden estas sucesiones.

a) $6n^2 + 10$

b) $2n - n^2$

c) $5 - 3n$

d) $10n - 4$

a) $a_{10} = 610$; $a_{100} = 60\,010$; $a_{1000} = 6\,000\,010$

Por tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} (6n^2 + 10) = \infty$

b) $b_{10} = 80$; $b_{100} = 9800$; $b_{1000} = 998\,000$

Por tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} (2n - n^2) = -\infty$

c) $c_{10} = -25$; $c_{100} = -295$; $c_{1000} = -2995$

Por tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} (5 - 3n) = -\infty$

d) $d_{10} = 96$; $d_{100} = 996$; $d_{1000} = 9996$

Por tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} (10n - 4) = \infty$

9.31 Calcula el término de la sucesión $a_n = 4 + 2n$ a partir del cual todos son mayores que 10 000.

$4 + 2n > 10\,000 \Rightarrow 2n > 9996 \Rightarrow n > 4998$

A partir de a_{4998}.

9.32 Halla el término de la sucesión $a_n = 3 - n$ a partir del cual todos son menores que -1000.

$3 - n < -1000 \Rightarrow -n < -1003 \Rightarrow n > 1003$

A partir de a_{1003}.

9.33 Comprueba que a partir del término b_{23}, todos los términos de la sucesión $b_n = 12 - 2n^2$ son menores que -1000. ¿Cuál es su límite?

$12 - 2n^2 < -1000 \Rightarrow -2n^2 < -1012 \Rightarrow n^2 > 506 \Rightarrow n > 22{,}49 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (12 - 2n^2) = -\infty$

9.34 Demuestra que $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{6 - 2n}{3} = -\infty$.

Dado $k < 0$, $\dfrac{6 - 2n}{3} < k \Rightarrow 6 - 2n < 3k \Rightarrow -2n < 3k - 6 \Rightarrow n > \dfrac{6 - 3k}{2}$

Entonces, para cada valor $k < 0$ se puede encontrar un valor de n de modo que todos los términos a partir de a_n sean menores que ese valor de k.

9.35 Dada la sucesión $a_n = \dfrac{n^2}{n + 2}$:

a) Calcula su límite.

b) Demuestra que se puede encontrar un término a partir del cual todos son mayores que 100.

a) $a_{10} = 8{,}3\ldots$; $a_{100} = 98{,}03\ldots$; $a_{1000} = 998{,}00\ldots$ Por tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2}{n + 2} = \infty$

b) $\dfrac{n^2}{n + 2} > 100 \Rightarrow n^2 - 100n - 200 > 0$

Resolvemos la inecuación obteniendo las raíces de $n^2 - 100n - 200$.

$n = \dfrac{100 \pm \sqrt{10\,000 + 800}}{2}$; $n_1 = 101{,}96$, y $n_2 = -1{,}96$

Como lo que buscamos es el término de la sucesión a_n a partir del cual todos los términos son mayores que él, consideramos solo la raíz positiva. El término buscado es 102.

Límites de operaciones con sucesiones

9.36 **Si $\lim_{n \to \infty} a_n = -4$ y $\lim_{n \to \infty} b_n = 3$, calcula:**

a) $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n)$

b) $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n)$

c) $\lim_{n \to \infty} \frac{3a_n}{b_n}$

d) $\lim_{n \to \infty} (a_n)^{b_n}$

a) $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n = -4 + 3 = -1$

b) $\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n = -4 \cdot 3 = -12$

c) $\lim_{n \to \infty} \frac{3a_n}{b_n} = \frac{3 \cdot \lim_{n \to \infty} a_n}{\lim_{n \to \infty} b_n} = \frac{-12}{3} = -4$

d) $\lim_{n \to \infty} (a_n)^{b_n} = \lim_{n \to \infty} (a_n)^{\lim_{n \to \infty} b_n} = (-4)^3 = -64$

9.37 **Halla el resultado de estas operaciones cuando $n \to \infty$.**

a) $7n^2 + 2n$

b) $\frac{n^3 - 2}{-9}$

c) $\frac{4}{1 - n}$

d) $(n + 3) \cdot (5 - n^2)$

a) $(7n^2 + 2n) = \infty + \infty = \infty$

b) $\frac{n^3 - 2}{-9} = \frac{\infty - 2}{-9} = -\infty$

c) $\frac{4}{1 - n} = \frac{4}{-\infty} = 0$

d) $(n + 3) \cdot (5 - n^2) = \infty \cdot (-\infty) = -\infty$

9.38 **Calcula:**

a) $\lim_{n \to \infty} \left(3 \cdot \frac{2}{n - 5}\right)$

b) $\lim_{n \to \infty} \left(6 + \frac{4}{n}\right)^2$

c) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sqrt{n + 1}}{4}\right)$

d) $\lim_{n \to \infty} 4^{\frac{-5}{2n}}$

e) $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{8}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{3n}\right)$

f) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{5}{\sqrt{n}}\right)$

a) $\lim_{n \to \infty} \left(3 \cdot \frac{2}{n - 5}\right) = 3 \cdot 0 = 0$

b) $\lim_{n \to \infty} \left(6 + \frac{4}{n}\right)^2 = 6^2 = 36$

c) $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sqrt{n + 1}}{4}\right) = \infty$

d) $\lim_{n \to \infty} 4^{\frac{-5}{2n}} = 4^0 = 1$

e) $\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{8}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{3n}\right) = 1 \cdot 2 = 2$

f) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{5}{\sqrt{n}}\right) = 1$

Indeterminaciones

9.39 **Calcula:**

a) $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 5n + 2}{3n - 6}$

b) $\lim_{n \to \infty} \frac{2n^3 + 4n}{n^3 - 1}$

c) $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + n - 2}{3n^4 + n^2}$

d) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{3n - 1}\right)^{3n - 1}$

e) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2 + n}\right)^{2 + n}$

a) $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 5n + 2}{3n - 6} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{\frac{3}{n} - \frac{6}{n^2}}$

b) $\lim_{n \to \infty} \frac{2n^3 + 4n}{n^3 - 1} = \frac{2 + \frac{4}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^3}} = 2$

c) $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + n - 2}{3n^4 + n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} - \frac{2}{n^4}}{3 + \frac{1}{n^2}} = 0$

d) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{3n - 1}\right)^{3n - 1} = e$

e) $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2 + n}\right)^{2 + n} = e$

9.40 **Halla:**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5+n+n^4}{3n^4+2n^2}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^6-4n^3+2}{4n^4+3n-9}$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^2+n}{4n^2+1}}$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+2}{\sqrt{4n^3+n}}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5+n+n^4}{3n^4+2n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{5}{n^4}+\dfrac{1}{n^3}+1}{3+\dfrac{2}{n^2}} = \dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n^2+n}{4n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{4+\dfrac{1}{n^2}}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^6-4n^3+2}{4n^4+3n-9} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-\dfrac{4}{n^3}+\dfrac{2}{n^6}}{\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{3}{n^5}-\dfrac{9}{n^6}} = \infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+2}{\sqrt{4n^3+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{5}{n^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{2}{n^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}} = 0$

9.41 **Encuentra los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n+1}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{2n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right]^2 \cdot 1 = e^2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{4}{n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{n}{4}}\right)^{\frac{n}{4}}\right]^8 = e^8$

9.42 **Halla:**

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{7}{n+1}\right)^{n}$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-3}{n+5}\right)^{n+1}$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^2-1}{4n^2+1}\right)^{n^2}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{7}{n+1}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{n+1}{-7}}\right)^{\frac{n+1}{-7}}\right]^{\frac{-7n}{n+1}} = e^{-7}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-3}{n+5}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+5-5-3}{n+5}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{-8}{n+5}\right)^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{n+5}{-8}}\right)^{\frac{n+5}{-8}}\right]^{\frac{-8n-8}{n+5}} = e^{-8}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1-1+1}{n+2}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+2}-\dfrac{1}{n+2}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{-n-2}\right)^{-n-2}\right]^{\frac{n}{-n-2}} = e^{-1}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^2-1}{4n^2+1}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^2+1-1-1}{4n^2+1}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{-2}{4n^2+1}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{4n^2+1}{-2}}\right)^{\frac{4n^2+1}{-2}}\right]^{\frac{-2n^2}{4n^2+1}} = e^{\frac{-1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$

9.43 **Si una sucesión tiende a 0, ¿se puede afirmar que tiene límite? Razona tu respuesta.**

Sí, puesto que 0 es un número real.

9.44 **A partir del término a_{50} de una sucesión, todos los términos son mayores que 1000. ¿A qué tiende esa sucesión?**

La sucesión tiende a $+\infty$.

9.45 **Si a partir de un término, todos los de una sucesión están a una distancia de 3 menor que 0,00001, ¿es 3 el límite de esa sucesión?**

Sí

9.46 **Si la diferencia entre los diez primeros términos de una sucesión y 5 es menor que 0,0001, ¿es 5 el límite de la sucesión?**

No necesariamente, puesto que la distancia entre los primeros términos de la sucesión y el límite no es importante en el concepto de límite.

9.47 **Razona si es posible encontrar una sucesión de términos negativos que tienda a $+\infty$. ¿Y una de términos positivos que tienda a $-\infty$?**

En el primer caso, si los términos son negativos y la sucesión es decreciente, tenderá a $-\infty$, y si son negativos y la sucesión creciente, no tenderá a un número.

Del mismo modo, si los términos son positivos y la sucesión creciente, tenderá a $+\infty$, y si son positivos y la sucesión decreciente, tenderá a un número.

9.48 **Escribe una sucesión que tienda a:**

a) $+\infty$

b) 2

c) $-\infty$

d) -1

a) 2, 8, 24, 96, 480, 2880…

b) 1; 1,5; 1,8; 1,9; 1,99…

c) -2, -8, -24, -96, -480, -2880…

d) -2; $-1,5$; $-1,1$; $-1,01$; $-1,001$…

9.49 **Explica si una sucesión puede tener dos límites diferentes.**

No es posible. Como a partir de un término de la sucesión la diferencia entre los términos y el límite es tan pequeña como queramos, si existieran dos límites, no se podría cumplir esa condición para los dos valores, puesto que si sucede para uno, es imposible que suceda lo mismo para el otro.

9.50 **Razona si son verdaderas o falsas estas afirmaciones:**

a) El límite de una sucesión cuyos términos son todos negativos es $-\infty$.

b) Una sucesión con todos sus términos iguales no tiene límite.

c) Si a partir de un término, todos los de la sucesión son mayores que un valor positivo cualquiera, la sucesión es divergente.

d) Una sucesión de términos decimales no puede tener por límite un número entero.

a) Falsa. La sucesión $a_n = -\frac{1}{n}$ tiende a 0 y todos sus términos son negativos.

b) Falsa. Su límite sería el valor de todos los términos de la sucesión.

c) Verdadera. Tienden a $+\infty$.

d) Falsa. La sucesión del apartado a es un ejemplo de ello.

9.51 Cuando al calcular el límite de una sucesión surge una indeterminación, significa que:

a) El límite no se puede calcular.

b) Tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.

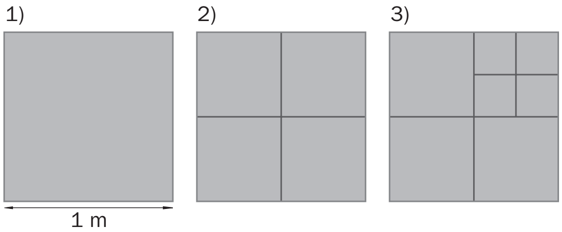
c) Es necesario utilizar otro método para obtener el límite.

Señala la respuesta correcta.

La respuesta correcta es la c.

PROBLEMAS PARA APLICAR

9.52 Partiendo de un cuadrado de 1 metro de lado, se construyen otros trazando paralelas a los lados por sus puntos medios.



a) Copia en tu cuaderno y completa esta tabla.

Pasos	1	2	3	4	5
N.º de cuadrados	1	4	7	10	13
Longitud del lado del cuadrado más pequeño (m)	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

b) ¿Cuántos cuadrados hay en el décimo paso? ¿Cuánto mide el lado de los cuadrados más pequeños en este paso?

c) Estudia a qué tienden la sucesión del número de cuadrados y la de la longitud del cuadrado más pequeño.

b) La sucesión del número de cuadrados en cada paso es una progresión aritmética de primer término 1 y diferencia 3; por tanto, en el décimo paso habrá 28 cuadrados.

La sucesión de la longitud del cuadrado más pequeño es una progresión geométrica de primer término 1 y razón $\frac{1}{2}$; por tanto, en el décimo paso la longitud del cuadrado más pequeño será $\frac{1}{2^9} = \frac{1}{512}$.

c) La sucesión del número de cuadrados tiende a $+\infty$, y la del lado del cuadrado más pequeño, a 0.

9.53 Javier y Laura se encuentran a una distancia de 10 metros. Javier avanza la mitad de esa distancia y Laura retrocede la cuarta parte. Después, Javier avanza de nuevo la mitad de la distancia que lo separa de Laura y esta retrocede la cuarta parte.

a) Halla los términos de la sucesión que indica en cada movimiento la distancia que los separa.

b) ¿Llegarán a juntarse en algún momento?

a) $a_1 = 10 + \frac{1}{4} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 10 = \frac{3}{4} \cdot 10 = 7{,}5$

$$a_2 = \frac{3}{4} \cdot 10 + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot 10 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot 10 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 10 = 5{,}625$$

$$a_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 10 + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 10 = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 10 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot 10 = 4{,}21875$$

$$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 10$$

b) Se trata de encontrar un término, o lo que es lo mismo, un valor de n de modo que $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 10 = 0$.

Pero eso no es posible puesto que $\left(\frac{3}{4}\right)^n \neq 0$ para cualquier valor de n.

Sin embargo, $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot 10 = 0$. Por tanto, solo se juntarían en el ∞.

9.54 Los padres de Juan abrieron una cartilla con 60 euros a un 2 % anual cuando nació.

a) Si no volvieron a ingresar dinero, calcula qué cantidad había al finalizar el primer año, el segundo y el tercero.

b) Escribe el término general que permite obtener el dinero que tiene la cartilla al final de cada año.

c) Halla el límite de la sucesión.

d) Si no se saca dinero, ¿a partir de qué año tendrá una cantidad superior a 10 000 euros?

a) Al finalizar el primer año: $a_1 = 60 + 60 \cdot 0{,}02 = 60 \cdot 1{,}02 = 61{,}12$

Al finalizar el segundo año: $a_2 = 60 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02 = 60 \cdot 1{,}02^2 = 62{,}424$

Al finalizar el tercer año: $a_3 = 60 \cdot 1{,}02^2 \cdot 1{,}02 = 60 \cdot 1{,}02^3 = 63{,}67248$

b) $a_n = 60 \cdot 1{,}02^n$

c) $\lim_{n \to \infty} (60 \cdot 1{,}02^n) = \infty$

d) $60 \cdot 1{,}02^n > 10\,000 \Rightarrow 1{,}02^n > \dfrac{10\,000}{60} \Rightarrow \log 1{,}02^n > \log\left(\dfrac{1000}{6}\right) \Rightarrow n \log 1{,}02 > \log\left(\dfrac{1000}{6}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow n > \dfrac{\log\left(\dfrac{1000}{6}\right)}{\log 1{,}02} \Rightarrow n > 258{,}3$

A partir del año 259.

9.55 El crecimiento de ciertas plantas es de aproximadamente 0,1 milímetros al día.

a) Calcula el término general de la sucesión que muestra su crecimiento diario.

b) Si se dejan crecer indefinidamente, ¿a partir de qué día su altura será superior a 1 metro?

a) Si l es la longitud de la planta, $a_n = l + 0{,}1n$

b) 1 m = 1000 mm

$l + 0{,}1n > 1000 \Rightarrow 0{,}1n > 1000 - l \Rightarrow n > 10\,000 - 10\, l$

Según la longitud inicial de la planta, el valor de n varía.

9.56 De un material radiactivo se sabe que 1 kilogramo se reduce a la mitad cada año.

a) ¿Cuál es el término general de la sucesión que expresa la pérdida de material con el tiempo?

b) ¿A qué tiende esta sucesión?

c) Encuentra el año a partir del cual la cantidad de material que queda es inferior a 1 gramo.

a) $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

b) $\lim_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

c) $\left|\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right| < 0{,}001 \Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^n < 0{,}001 \Rightarrow -\log 2 \cdot n < \log 0{,}001 \Rightarrow n > \dfrac{\log 0{,}001}{-\log 2} \Rightarrow n > 9{,}97$

A partir del décimo año.

9.57 Cada persona produce al año unos 300 kilogramos de basura, de la que un 90% se puede reciclar. Calcula a partir de qué año la cantidad de basura reciclable es superior a 10 000 toneladas.

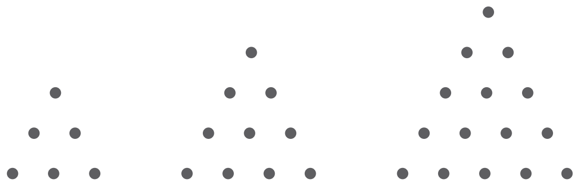
Cantidad anual de basura reciclada por persona: $300 \cdot 0{,}9 = 270$ kilos.

Al cabo de n años se obtendrán $270n$ kilos de basura reciclada.

$270n > 10\,000\,000 \Rightarrow n > \dfrac{10\,000\,000}{270} \Rightarrow n > 37\,037{,}037$

A partir del año 37 038.

9.58 La cantidad de puntos en estas figuras determina los llamados números triangulares.



a) Determina los primeros términos de la sucesión de los números triangulares.

b) Calcula su término general.

c) ¿Qué término es igual a 231?

d) ¿Es una sucesión convergente o divergente? Demuéstralo.

a) $a_1 = 6;\quad a_2 = 10;\quad a_3 = 15;\quad a_4 = 21;\quad a_5 = 28$

b) $a_n = 6 + 4 + 5 + 6 + 7 + \ldots + (n + 2) = 6 + (4 + 5 + \ldots + n + 2) = 6 + \dfrac{4 + n + 2}{2}(n - 1) = \dfrac{n^2 + 5n + 6}{2}$

c) $\dfrac{n^2 + 5n + 6}{2} = 231 \Rightarrow n^2 + 5n + 6 = 462 \Rightarrow n^2 + 5n - 456 = 0$

$$n = \frac{-5 \pm \sqrt{425 + 1824}}{2} = \frac{-5 \pm 43}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = \dfrac{-5 + 43}{2} = 19 \\ n = \dfrac{-5 - 43}{2} = -24 \end{cases}$$

$a_{19} = 231$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2 + 5n + 6}{2} = \infty$

Es divergente.

REFUERZO

Sucesiones. Hacia la idea de límite

9.59 ¿Cuál es el límite, si lo tienen, de estas sucesiones?

a) 1, 3, 5, 7, 9, 11…

b) 0,1; 0,3; 0,7; 0,8; 0,9; 0,99…

c) −1,7; −1,8; −1,9; −1,99; −1,999…

a) No tiene límite; es divergente.

b) 1

c) −2

9.60 Indica, obteniendo algunos términos, si tienen límite estas sucesiones.

a) $a_n = \dfrac{5}{n^2}$

b) $b_n = \dfrac{2n}{n - 1}$

c) $c_n = 4n^{6n}$

d) $d_n = \dfrac{3n + 2}{n}$

a)

n	10	100	1000	$\to \infty$
a_n	0,05	0,0005	0,000005	$\to 0$

b)

n	10	100	1000	$\to \infty$
b_n	2,22	2,02	2,002	$\to 2$

c)

n	10	100	$\to \infty$
c_n	$1{,}32 \cdot 10^{36}$	$1{,}723 \cdot 10^{361}$	$\to \infty$

d)

n	10	100	1000	$\to \infty$
d_n	3,2	3,02	3,002	$\to 3$

9.61 **Comprueba que existe un término de la sucesión $a_n = \frac{2 + 3n}{n}$ a partir del cual la diferencia entre los términos y 3 es menor que 0,000001.**

$$\left|\frac{2 + 3n}{n} - 3\right| < \frac{1}{1\,000\,000} \Rightarrow \left|\frac{2 + 3n - 3n}{n}\right| < \frac{1}{1\,000\,000} \Rightarrow \left|\frac{2}{n}\right| < \frac{1}{1\,000\,000} \Rightarrow \frac{2}{n} < \frac{1}{1\,000\,000} \Rightarrow n > 2\,000\,000$$

A partir del término $a_{2\,000\,000}$.

9.62 **Halla el límite de la sucesión $a_n = \frac{1}{3 + n}$ y comprueba que, a partir del término a_{998}, todos distan del límite menos de 0,001.**

$a_{10} = 0{,}076\ldots;\quad a_{100} = 0{,}0097\ldots;\quad a_{1000} = 0{,}00099\ldots$ Por tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{3 + n} = 0$

$$\left|\frac{1}{3 + n}\right| < \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{1}{3 + n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow 1000 < 3 + n \Rightarrow n > 997$$

A partir del término a_{997}, todos distan del límite menos de 0,001.

9.63 **Dada la sucesión $a_n = 4 + \frac{1}{n}$.**

a) Calcula su límite.

b) Halla el término a partir del cual la diferencia entre los términos de la sucesión y el límite es menor que 0,001.

a) $a_{10} = 4{,}1;\quad a_{100} = 4{,}01;\quad a_{1000} = 4{,}001$. Por tanto, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(4 + \frac{1}{n}\right) = 4$.

b) $\left|4 + \frac{1}{n} - 4\right| < \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow n > 1000$. A partir de a_{1000}.

Sucesiones divergentes

9.64 **Encuentra el término de la sucesión $a_n = 4n^2$ a partir del cual todos son mayores que 10 000.**

$4n^2 > 10000 \Rightarrow n^2 > 2500 \Rightarrow n > 50$

A partir de a_{50}.

9.65 **Comprueba que existe un término de la sucesión $a_n = 2 - 3n$ a partir del cual todos son menores que -1000.**

$2 - 3n < -1000 \Rightarrow 3n > 1002 \Rightarrow n > 334$

A partir de a_{334}.

9.66 **Copia en tu cuaderno y completa.**

$\frac{4}{2n^3}$ $\qquad \frac{6n + 1}{2}$ $\qquad -5n^2$ $\qquad \frac{3}{n - 1}$ $\qquad \frac{8n}{4n + 3}$

Convergentes	Divergentes
$\frac{4}{n^3}$	$\frac{6n + 1}{2}$
$\frac{3}{n - 1}$	$-5n^2$
$\frac{8n^3}{4n + 3}$	

Cálculo de límites

9.67 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(3 - n^2)$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(6 + \frac{5}{n}\right)$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7 + 8n}{4}$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(3 - n^2) = -\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(6 + \frac{5}{n}\right) = 6$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7 + 8n}{4} = +\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = +\infty$

9.68 **Calcula:**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n - 1}{2n + 4}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3 + 2n}{1 + n^2}$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^2 - n}{5n^2 + 3}$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{4n + 1}\right)^{4n+1}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n - 1}{2n + 4} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{4}{n}} = \frac{3}{2}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3 + 2n}{1 + n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n^2} + \frac{2}{n}}{\frac{1}{n^2} + 1} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^2 - n}{5n^2 + 3} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{10 - \frac{1}{n}}{5 + \frac{3}{n^2}} = 2$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{4n + 1}\right)^{4n+1} = e$

AMPLIACIÓN

9.69 **Halla los siguientes límites.**

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1 + 2n}{2n}\right)^{2n}$ **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3 + n}{n}\right)^{n}$ **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{2n - 1}\right)^{n}$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1 + 2n}{2n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n} + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n}{2n - 1}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^{\infty} = \infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3 + n}{4n}\right)^{n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\infty} = 0$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{4}{n}\right)^{\frac{n}{4}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{n}{4}} = e$

9.70 **Demuestra que la sucesión $a_n = n^2 - 2n$ es divergente. ¿A qué tiende?**

$a_{10} = 80$; $a_{100} = 9800$; $a_{1000} = 998\,000$. Por tanto, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - 2n) = \infty$

9.71 **Escribe el término general de dos sucesiones cuyo límite sea 3. ¿El término a partir del cual la distancia entre los términos y el límite es menor que una milésima es el mismo en ambas?**

$a_n = \frac{3n - 1}{n}$; $\left|\frac{3n - 1}{n} - 3\right| < \frac{1}{1000} \Rightarrow \left|\frac{3n - 1 - 3n}{n}\right| < \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow n > 1000$

A partir de a_{1000}.

$b_n = \frac{3n^2 - 1}{n^2}$; $\left|\frac{3n^2 - 1}{n^2} - 3\right| < \frac{1}{1000} \Rightarrow \left|\frac{3n^2 - 1 - 3n^2}{n^2}\right| < \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1000} \Rightarrow n^2 > 1000 \Rightarrow n > 31{,}62$

A partir de b_{32}.

9.72 **Encuentra el valor de *k* para que el límite sea el que se indica.**

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{kn - 3}{2n + 1} \right) = 2$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{kn^2 - 1}{3n^2 + 2} \right) = -1$

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{kn - 3}{2n + 1} \right) = 2 \quad \Rightarrow \left(\dfrac{kn - 3}{2n + 1} \right) = \dfrac{k}{2} \;\Rightarrow\; \dfrac{k}{2} = 2 \quad \Rightarrow k = 4$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{kn^2 - 1}{3n^2 + 2} \right) = -1 \;\Rightarrow \left(\dfrac{kn^2 - 1}{3n^2 + 2} \right) = \dfrac{k}{3} \;\Rightarrow\; \dfrac{k}{3} = -1 \;\Rightarrow k = -3$

9.73 **Halla el valor de *a* para que se cumpla:**

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n^3 - 1}{4n^a + n - 3} \right) = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{3n^a - n}{n + 2} \right) = +\infty$

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n^3 - 1}{4n^a + n - 3} \right) = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = 3$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{3n^a - n}{n + 2} \right) = +\infty \Rightarrow a > 1$

9.74 **Calcula los límites y comprueba que no se cumplen las igualdades de las operaciones con límites. ¿A qué crees que es debido?**

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{3 + n}{2} - \dfrac{n^2 + 1}{n} \right)$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{7 + n^2}{n} : \dfrac{2 + n^3}{n^2} \right)$

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{3 + n}{2} - \dfrac{n^2 + 1}{n} \right) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{3n + n^2 - 2n^2 - 2n}{2n} \right) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{-n^2 + n}{2n} \right) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{-1 + \dfrac{1}{n}}{\dfrac{2}{n}} = -\infty$

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3 + n}{2} - \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n^2 + 1}{n} = \infty - \infty$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{7 + n^2}{n} : \dfrac{2 + n^3}{n^2} \right) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{7n^2 + n^4}{2n + n^4} \right) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\dfrac{7}{n^2} + 1}{\dfrac{2}{n^3} + 1} = 1$

$\left(\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{7 + n^2}{n} \right) : \left(\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2 + n^3}{n^2} \right) = \infty : \infty$

No se cumplen las igualdades porque en el caso de aplicar las operaciones con límites salen indeterminaciones.

9.75 **Calcula el término de la sucesión $a_n = 3^n$ a partir del cual todos los términos son mayores que 1000.**

$3^n > 1000 \Rightarrow n \log 3 > \log 1000 \Rightarrow n > 6{,}29$

A partir de a_7.

9.76 Dada la sucesión $a_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$:

a) Calcula su límite.

b) Halla el término de la sucesión a partir del cual la diferencia entre los términos y el límite es menor que una centésima.

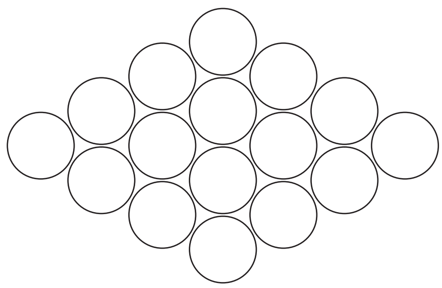
a) $a_{10} = 0{,}000104\ldots;\ a_{100} = 1{,}60 \cdot 10^{-40};$ $\qquad \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

b) $\left|\left(\frac{2}{5}\right)^n\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^n < \frac{1}{100} \Rightarrow n \log\left(\frac{2}{5}\right) < \log\frac{1}{100} \Rightarrow -0{,}39 \cdot n < -2 \Rightarrow n > 5{,}02$. A partir de a_6.

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

9.77 Rombo de naranjas

Un conjunto de naranjas se agrupan en una especie de rombo con cuatro naranjas por cada lado.



a) Indica el número de naranjas necesarias para construir una figura semejante a la dada, pero suponiendo que el lado del rombo tuviera dos, tres y cinco unidades en cada caso.

b) ¿Cuál de los siguientes términos generales representa el número de naranjas necesarias para construir una figura con n unidades por lado?

$a_n = 6(n - 1)$ $b_n = n^2 + n$ $c_n = 6 \cdot 2^{n-2}$

a) Para la figura de lado dos se necesitarán $2(1 + 2) = 6$ naranjas; para la de lado tres se necesitarán $2(1 + 2 + 3) = 12$ naranjas, y para la figura de lado cinco se necesitarán $2(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 30$ naranjas.

b) Para una figura con n unidades por lado se necesitan $2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n + 1) = n^2 + n$.

9.78 Autoalimentación

Cierta especie de insectos parecidos a las abejas se organiza de la siguiente forma:

- **150 animales se dedican al mantenimiento de la colmena y a proporcionarle calor, y el resto de los insectos liba el néctar necesario de las flores para fabricar la miel que alimenta a toda la población.**
- **Cada 100 recolectores elaboran 5 gramos de miel diarios, y la miel producida se reparte entre todos los miembros de la colmena.**

a) Suponiendo que haya 500 individuos, ¿de cuánta miel puede disponer cada insecto al día?

b) ¿Y considerando que sean 1000 individuos? ¿Y si son 10 000?

c) Generaliza los resultados calculando los gramos de miel con los que puede contar cada insecto suponiendo que la colmena está formada por n individuos. Después, estima dichos gramos suponiendo que la población de la colmena es inmensa.

a) Hay $500 - 150 = 350$ recolectores, que obtienen $350 \cdot 0{,}05 = 17{,}5$ gramos de miel. Por tanto, cada individuo recibirá $17{,}5 : 500 = 0{,}035$ gramos diarios de miel.

b) En una población de 1000 insectos hay $1000 - 150 = 850$ recolectores, que obtienen $850 \cdot 0{,}05 = 42{,}5$ gramos. Por tanto, cada insecto dispondrá de 0,0425 gramos de miel.

En una población de 10 000 insectos hay $10\,000 - 150 = 9850$ recolectores, que obtienen $9850 \cdot 0{,}05 = 492{,}5$ gramos. Cada individuo tendrá 0,04925 gramos de miel.

c) Generalizando los resultados anteriores, la cantidad de miel diaria de que dispone cada insecto en una población de n individuos viene dada por $\frac{(n - 150) \cdot 0{,}05}{n}$. El límite de la sucesión anterior es 0,05 y, por tanto, en una población inmensa de insectos, cada uno de ellos dispone de 0,05 gramos de miel al día.

9.A1 **Halla los términos que sean necesarios para obtener el valor al que tienden estas sucesiones y calcula dicho valor.**

a) $a_n = \dfrac{4 - n}{3 + 2n}$ **b)** $b_n = \dfrac{2n + 5}{n^2 - 1}$

a)

n	10	100	1000	10 000	$\to \infty$
a_n	−0,260	−0,47	−0,497	−0,4997	$\to -0{,}5$

b)

n	10	100	1000	10 000	$\to \infty$
b_n	0,25	0,0205	0,002	0,0002	$\to 0$

9.A2 **Calcula el límite de estas sucesiones y halla el valor del término a partir del cual todos los demás difieren del límite menos de 0,001.**

a) $a_n = \dfrac{2n}{n + 1}$

b) $b_n = \dfrac{3n - 1}{n + 2}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 2$

$\left|\dfrac{2n}{n+1} - 2\right| < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow \left|\dfrac{2n - 2n - 2}{n+1}\right| < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow \dfrac{2}{n+1} < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow 2000 < n + 1 \Rightarrow n > 1999$

A partir de a_{1999}.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{n+2} = \dfrac{3 - \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 3$

$\left|\dfrac{3n-1}{n+2} - 3\right| < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow \left|\dfrac{3n - 1 - 3n - 6}{n+2}\right| < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow \dfrac{7}{n+2} < \dfrac{1}{1000} \Rightarrow 7000 < n + 2 \Rightarrow n > 6998$

A partir de a_{6998}.

9.A3 **Calcula, si es posible, el término de las sucesiones a partir del cual todos los siguientes son menores que −10 000.**

a) $a_n = 5 - n$ **b)** $b_n = 2n^2 + 8$

a) $5 - n < -10\,000 \Rightarrow n > 10\,005 \Rightarrow$ A partir de $a_{10\,005}$.

b) $2n^2 + 8 < -10\,000 \Rightarrow n^2 < 5004 \Rightarrow n < 70{,}73$

No existe un término a partir del cual todos los demás sean menores que −10 000, ya que el valor de n que se obtiene indica que cumplen esa condición los términos menores que a_{70}.

9.A4 **Indica si estas sucesiones son divergentes. ¿A qué tienden?**

a) $a_n = \dfrac{2 + n^2}{1 - n^2}$ **b)** $b_n = \dfrac{1 + n^2}{3n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 + n^2}{1 - n^2} = \dfrac{\frac{2}{n^2} + 1}{\frac{1}{n^2} - 1} = -1$. No es divergente.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + n^2}{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n^2} + 1}{\frac{3}{n}} = \infty$. Sí es divergente.

9.A5 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n \to \infty} (2n^3 + 5)$ **b)** $\lim\limits_{n \to \infty} 2^{n-8}$ **c)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n^2 - 3}{7}\right)$ **d)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(4 + \dfrac{9}{n^2}\right)$

a) $\lim\limits_{n \to \infty} (2n^3 + 5) = \infty$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} 2^{n-8} = \infty$ c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n^2 - 3}{7}\right) = \infty$ d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(4 + \dfrac{9}{n^2}\right) = 4$

9.A6 Halla los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{n^4 + 1}\right)$ **b)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{6n^3 - 3n}{2n^3 + 7}\right)$ **c)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n - 5}{3n^2 + 2}\right)$ **d)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{5n^2}{n - 1}\right)$

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{n^4 + 1}\right) = 0$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n - 5}{3n^2 + 2}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\dfrac{2}{n} - \dfrac{5}{n^2}}{3 + \dfrac{2}{n^2}} = 0$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{6n^3 - 3n}{2n^3 + 7}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{6 - \dfrac{3}{n^2}}{2 + \dfrac{7}{n^3}} = 3$

d) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{5n^2}{n - 1}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5}{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}} = \infty$

9.A7 Calcula:

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$ **b)** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n - 5}\right)^{3n}$

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}}$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{n - 5}\right)^{3n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{n - 5}\right)^{n-5}\right]^{\frac{3n}{n-5}} = e^3$

MURAL DE MATEMÁTICAS

MATETIEMPOS

Sumas y más sumas

Fíjate en las siguientes sumas.

$$1 + \frac{1}{1} = 2 \qquad 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} = 2{,}5 \qquad 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 2{,}67$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} + \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2{,}71$$

Calcula las tres sumas que continúan la serie. ¿Cuál crees que es el resultado si se suman infinitos términos?

Construiremos la siguiente tabla.

Término	a_1	a_2	3	4	5	6	7
Valor	$1 + 1$	$a_1 + \frac{1}{2}$	$a_2 + \frac{1}{6}$	$a_3 + \frac{1}{24}$	$a_4 + \frac{1}{120}$	$a_5 + \frac{1}{720}$	$a_6 + \frac{1}{5040}$
Suma	2	2,5	2,67	2,7083	2,7167	2,7181	2,7183

El resultado de la suma de infinitos términos es el número e.