RESOLUCIÓN DE ECUACIONES

EJERCICIO 1 : Resuelve las siguientes ecuaciones:

1) $\frac{4x^2-4x}{3}-x=x^2-\frac{3x+4}{3}$ 2) $x^4-11x^2+28=0$ 3) $x^2+\frac{15}{4}=\frac{3x^2-x+3}{4}+3$

4) $x^4-21x^2-100=0$ 5) $x(x+4)-5=\frac{x(x-1)}{3}$ 6) $x^4-48x^2-49=0$

7) $\sqrt{3x+16}=2x-1$ 8) $\sqrt{x+5}-x=3$ 9) $\frac{4x}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{14}{3}$

10) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x+4}=\frac{11}{6}$ 11) $\frac{2}{x-1}+\frac{x-2}{x+1}=\frac{5}{4}$ 12) $x+4=\sqrt{4x+12}$

13) $\frac{2x-1}{x}+\frac{4}{x-1}=\frac{11}{2}$ 14) $x^4+x^3-9x^2-9x=0$ 15) $x^3-2x^2-11x+12=0$

16) $x^4+x^3-4x^2-4x=0$ 17) $x^3-2x^2-5x+6=0$ 18) $x^3+4x^2-x-4=0$

19) $2^{x-1}+2^x+\frac{1}{2^x}=\frac{7}{2}$ 20) $\log(x-3)^2+\log 4=\log x$ 21) $x^4-37x^2+36=0$

22) $2\ln(x+1)-\ln(2x)=\ln 2$ 23) $\sqrt{5x+4}=2x+1$ 24) $3^{2x}-3^{x+1}+\frac{8}{9}=0$

25) $\frac{5}{4x^2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6x^2}$ 26) $\log(x+1)-\log(3x-2)=1$ 27) $3\sqrt{x-1}+11=2x$

28) $2^{x-1}+2^{x+1}-3\cdot 2^x+4=0$ 29) $\frac{x}{x+1}-\frac{16}{6}=\frac{x+1}{x}$ 30) $\frac{3^{x^2-x+1}}{3^{x+1}}=\frac{1}{3}$

31) $2^{1-x}+2^x-3=0$ 32) $1-x=\sqrt{7-3x}$ 33) $2^{x+2}+2^x-5=0$

Solución:

1) $\frac{4x^2-4x}{3}-x=x^2-\frac{3x+4}{3}$; $\frac{4x^2-4x}{3}-\frac{3x}{3}=\frac{3x^2}{3}-\frac{3x+4}{3}$; $4x^2-4x-3x=3x^2-3x-4$

$x^2-4x+4=0$; $x=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4}{2}=2$; Solución: x = 2

2) $x^4-11x^2+28=0$ Cambio : $x^2=z \rightarrow x^4=z^2$ $z^2-11z+28=0$

$z=\frac{11\pm\sqrt{121-112}}{2}=\frac{11\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{11\pm 3}{2} \rightarrow \begin{cases} z=7 \rightarrow x=\pm\sqrt{7} \\ z=4 \rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$

Cuatro soluciones : $x_1=-\sqrt{7},\ x_2=\sqrt{7},\ x_3=-2,\ x_4=2$

3) $x^2+\frac{15}{4}=\frac{3x^2-x+3}{4}+3$; $\frac{4x^2}{4}+\frac{15}{4}=\frac{3x^2-x+3}{4}+\frac{12}{4}$; $4x^2+15=3x^2-x+3+12$

$x^2+x=0$; $x(x+1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \end{cases}$

4) $x^4-21x^2-100=0$ Cambio: $x^2=z \rightarrow x^4=z^2$ $z^2-21z-100=0$

$z=\frac{21\pm\sqrt{441+400}}{2}=\frac{21\pm\sqrt{841}}{2}=\frac{21\pm 29}{2} \rightarrow \begin{cases} z=25 \rightarrow x=\pm 5 \\ z=-4 \text{ (no vale)} \end{cases}$ Dos soluciones: $x_1=-5,\ x_2=5$

5) $x(x+4)-5=\frac{x(x-1)}{3}$; $x^2+4x-5=\frac{x^2-x}{3}$; $3x^2+12x-15=x^2-x$

$2x^2+13x-15=0$; $x=\frac{-13\pm\sqrt{169+120}}{4}=\frac{-13\pm\sqrt{289}}{4}=\frac{-13\pm 17}{4} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-30}{4}=\frac{-15}{2} \end{cases}$

6) $x^4-48x^2-49=0$ Cambio: $x^2=z \rightarrow x^4=z^2$ $z^2-48z-49=0$

$z=\frac{48\pm\sqrt{2304+196}}{2}=\frac{48\pm\sqrt{2500}}{2}=\frac{48\pm 50}{2} \rightarrow \begin{cases} z=49 \rightarrow x=\pm 7 \\ z=-1 \text{ (no vale)} \end{cases}$ Dos soluciones: $x_1=-7,\ x_2=7$

7) $\sqrt{3x+16}=2x-1$; $3x+16=(2x-1)^2$; $3x+16=4x^2+1-4x$; $0=4x^2-7x-15$

$x=\frac{7\pm\sqrt{49+240}}{8}=\frac{7\pm\sqrt{289}}{8}=\frac{7\pm17}{8}\rightarrow\begin{cases}x=3\\x=\frac{-10}{8}=\frac{-5}{4}\end{cases}$

Comprobación:

$x=3\rightarrow\sqrt{25}=5\rightarrow x=3$ sí vale.

$x=\frac{-5}{4}\rightarrow\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}\neq\frac{-7}{2}\rightarrow x=\frac{-5}{4}$ no vale.

Hay una solución: $x=3$

8) $\sqrt{x+5}-x=3$; $\sqrt{x+5}=3+x$; $x+5=9+x^2+6x$; $0=x^2+5x+4$

$x=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{-5\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-5\pm3}{2}\rightarrow\begin{cases}x=-1\\x=-4\end{cases}$

Comprobación:

$x=-1\rightarrow\sqrt{4}+1=2+1=3\rightarrow x=-1$ sí vale

$x=-4\rightarrow\sqrt{1}+4=1+4=5\neq3\rightarrow x=-4$ no vale

Hay una solución: $x=-1$

9) $\frac{4x}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{14}{3}$; $\frac{12x(x-2)}{3(x+2)(x-2)}+\frac{3x(x+2)}{3(x+2)(x-2)}=\frac{14(x+2)(x-2)}{3(x+2)(x-2)}$

$12x^2-24x+3x^2+6x=14(x^2-4)$; $15x^2-18x=14x^2-56$; $x^2-18x+56=0$

$x=\frac{18\pm\sqrt{324-224}}{2}=\frac{18\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{18\pm10}{2}\rightarrow\begin{cases}x=14\\x=4\end{cases}$

10) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x+4}=\frac{11}{6}$; $\frac{18(x+4)}{6x(x+4)}+\frac{12x}{6x(x+4)}=\frac{11x(x+4)}{6x(x+4)}$; $18x+72+12x=11x^2+44x$; $0=11x^2+14x-72$

$x=\frac{-14\pm\sqrt{196+3168}}{22}=\frac{-14\pm\sqrt{3364}}{22}=\frac{-14\pm58}{22}\rightarrow\begin{cases}x=2\\x=\frac{-72}{22}=\frac{-36}{11}\end{cases}$

11) $\frac{2}{x-1}+\frac{x-2}{x+1}=\frac{5}{4}$; $\frac{8(x+1)}{4(x-1)(x+1)}+\frac{4(x-1)(x-2)}{4(x-1)(x+1)}=\frac{5(x-1)(x+1)}{4(x-1)(x+1)}$; $8x+8+4(x^2-3x+2)=5(x^2-1)$

$8x+8+4x^2-12x+8=5x^2-5$; $0=x^2+4x-21$;

$x=\frac{-4\pm\sqrt{16+84}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{-4\pm10}{2}\rightarrow\begin{cases}x=3\\x=-7\end{cases}$

12) $x+4=\sqrt{4x+12}$; $(x+4)^2=4x+12$; $x^2+16+8x=4x+12$; $x^2+4x+4=0$;

$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

Comprobación: $x=-2\rightarrow 2=\sqrt{4}\rightarrow$ sí es válida

13) $\frac{2x-1}{x}+\frac{4}{x-1}=\frac{11}{2}$; $\frac{2(2x-1)(x-1)}{2x(x-1)}+\frac{8x}{2x(x-1)}=\frac{11x(x-1)}{2x(x-1)}$; $2(2x^2-3x+1)+8x=11x^2-11x$

$4x^2-6x+2+8x=11x^2-11x$; $0=7x^2-13x-2$;

$x=\frac{13\pm\sqrt{169+56}}{14}=\frac{13\pm\sqrt{225}}{14}=\frac{13\pm15}{14}\rightarrow\begin{cases}x=2\\x=\frac{-2}{14}=\frac{-1}{7}\end{cases}$

14) Sacamos factor común: $x^4+x^3-9x^2-9x=x(x^3+x^2-9x-9)=0$

Factorizamos x^3+x^2-9x-9:

	1	1	−9	−9
−1		−1	0	9
	1	0	−9	0

$x^2-9=0\Rightarrow x=\pm3$

$$x^4+x^3-9x^2-9x=x(x+1)(x-3)(x+3)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 & \rightarrow\quad x=-1 \\ x-3=0 & \rightarrow\quad x=3 \\ x+3=0 & \rightarrow\quad x=-3 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son: $x_1=0,\quad x_2=-1,\quad x_3=3,\quad x_4=-3$

15) Factorizamos:

	1	−2	−11	12
1		1	−1	−12
	1	−1	−12	0
4		4	12	
	1	3	0	

$$x^3-2x^2-11x+12=(x-1)(x-4)(x+3)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x-1=0 & \rightarrow\quad x=1 \\ x-4=0 & \rightarrow\quad x=4 \\ x+3=0 & \rightarrow\quad x=-3 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son: $x_1=1,\quad x_2=4,\quad x_3=-3$

16) Sacamos factor común: $x^4+x^3-4x^2-4x=x\left(x^3+x^2-4x-4\right)=0$

Factorizamos x^3+x^2-4x-4 :

	1	1	−4	−4
−1		−1	0	4
	1	0	−4	0
2		2	4	
	1	2	0	

$$x^4+x^3-4x^2-4x=x(x+1)(x-2)(x+2)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 & \rightarrow\quad x=-1 \\ x-2=0 & \rightarrow\quad x=2 \\ x+2=0 & \rightarrow\quad x=-2 \end{cases}$$

Por tanto las soluciones de la ecuación son: $x_1=0,\quad x_2=-1,\quad x_3=2,\quad x_4=-2$

17) Factorizamos:

	1	−2	−5	6
1		1	−1	−6
	1	−1	−6	0
3		3	6	
	1	2	0	

$$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} x-1=0 & \rightarrow\quad x=1 \\ x-3=0 & \rightarrow\quad x=3 \\ x+2=0 & \rightarrow\quad x=-2 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son: $x_1=1,\quad x_2=3,\quad x_3=-2$

18) Factorizamos:

	1	4	−1	−4
1		1	5	4
	1	5	4	0
−1		−1	−4	
	1	4	0	

$$x^3+4x^2-x-4=(x-1)(x+1)(x+4)=0 \quad \to \quad \begin{cases} x-1=0 & \to \quad x=1 \\ x+1=0 & \to \quad x=-1 \\ x+4=0 & \to \quad x=-4 \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son: $x_1=1, \quad x_2=-1, \quad x_3=-4$

19) $2^{x-1}+2^x+\frac{1}{2^x}=\frac{7}{2}$; $\quad \frac{2^x}{2}+2^x+\frac{1}{2^x}=\frac{7}{2}$

Hacemos el cambio de variable: $2^x=y$: $\quad \frac{y}{2}+y+\frac{1}{y}=\frac{7}{2}$; $\quad y^2+2y^2+2=7y \quad \to \quad 3y^2-7y+2=0$

$$y=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{6}=\frac{7\pm 5}{6} \quad \to \quad \begin{cases} y=2 \\ y=\frac{2}{6}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

- $y=2 \quad \to \quad 2^x=2 \quad \to \quad x=1$
- $y=\frac{1}{3} \quad \to \quad 2^x=\frac{1}{3} \quad \to \quad x=log_2\frac{1}{3}=-log_2 3=-\frac{log\ 3}{log\ 2}=-1{,}58$

Hay dos soluciones: $x=1$; $x_2=-1{,}58$

20) $log\ (x-3)^2+log\ 4=log\ x$; $\quad log\ [4(x-3)^2]=log\ x$; $4(x-3)^2=x \quad \to \quad 4(x^2-6x+9)=x$

$4x^2 - 24x + 36 = x \quad \to \quad 4x^2 - 25\ x\ 6 + 36 = 0$;

$$x=\frac{25\pm\sqrt{625-576}}{8}=\frac{25\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{25\pm 7}{8} \quad \to \quad \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{18}{8}=\frac{9}{4} \end{cases}$$

Hay dos soluciones: $x_1=4; x_2=\frac{9}{4}$

21) $x^4-37x^2+36=0$; Cambio: $x^2=z \quad \to \quad x^4=z^2 \Rightarrow z^2-37z+36=0$

$$z=\frac{37\pm\sqrt{1369-144}}{2}=\frac{37\pm\sqrt{1225}}{2}=\frac{37\pm 35}{2} \quad \to \quad \begin{cases} z=36 \\ z=1 \end{cases}$$

$z=36 \quad \to \quad x^2=36 \quad \to \quad x=\pm\sqrt{36} \quad \to \quad x=\pm 6$

$z=1 \quad \to \quad x^2=1 \quad \to \quad x=\pm\sqrt{1} \quad \to \quad x=\pm 1$

Hay cuatro soluciones: $x_1=-6$, $x_2=-1$, $x_3=1$, $x_4=6$

22) $2\ln(x+1)-\ln(2x)=\ln 2$; $ln(x+1)^2-ln(2x)=ln\ 2$; $ln\frac{(x+1)^2}{2x}=ln\ 2 \quad \to \quad \frac{(x+1)^2}{2x}=2$

$(x+1)^2=4x \quad \to \quad x^2+2x+1=4x \quad \to \quad x^2-2x+1=0$; $x=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{2}{2}=1$; Hay una única sol: $x=1$

23) $\sqrt{5x+4}=2x+1 \Rightarrow 5x+4=(2x+1)^2 \Rightarrow 5x+4=4x^2+4x+1 \Rightarrow \quad 0=4x^2-x-3$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{8}=\frac{1\pm 7}{8} \quad \to \quad \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{-6}{8}=\frac{-3}{4} \end{cases}$$

Comprobación:

$x=1 \quad \to \quad \sqrt{9}=3=2+1 \quad \to$ Es válida

$x=\frac{-3}{4} \quad \to \quad \sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\neq\frac{-3}{2}+1=\frac{-1}{2} \quad \to$ No es válida

Hay una solución: $x=1$

24) $3^{2x}-3^{x+1}+\frac{8}{9}=0$; $\quad (3^x)^2-3^x\cdot 3+\frac{8}{9}=0$

Hacemos el cambio $3^x=y$: $y^2-3y+\frac{8}{9}=0 \quad \to \quad 9y^2-27y+8=0$

$$y=\frac{27\pm\sqrt{729-288}}{18}=\frac{27\pm\sqrt{441}}{18}=\frac{27\pm 21}{18} \quad \to \quad \begin{cases} y=\frac{48}{18}=\frac{8}{3} \\ y=\frac{6}{18}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

- $y=\frac{8}{3} \quad \to \quad 3^x=\frac{8}{3} \quad \to \quad x=\log_3\frac{8}{3}=\log_3 8-1=\frac{\log 8}{\log 3}-1=0{,}89$

$\bullet\, y=\frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad 3^x=\frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad x=-1$

Hay dos soluciones: $x_1=-1;\ x_2=0{,}89$

25) $\frac{5}{4x^2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6x^2} \Rightarrow \frac{15}{12x^2}-\frac{4x^2}{12x^2}=\frac{6}{12x^2} \Rightarrow 15-4x^2=6 \Rightarrow 15-6=4x^2 \Rightarrow 9=4x^2$

$x^2=\frac{9}{4} \quad \rightarrow \quad x=\pm\sqrt{\frac{9}{4}} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=\frac{-3}{2} \end{cases}$ Hay dos soluciones : $x_1=\frac{-3}{2};\quad x_2=\frac{3}{2}$

26) $\log(x+1)-\log(3x-2)=1;\quad log\frac{x+1}{3x-2}=1 \quad \rightarrow \quad \frac{x+1}{3x-2}=10 \quad \rightarrow x+1=10(3x-2)$

$x+1=30x-20 \quad \rightarrow \quad 21=29x \quad \rightarrow \quad x=\frac{21}{29}$

27) $3\sqrt{x-1}+11=2x \Rightarrow 3\sqrt{x-1}=2x-11 \quad 3\sqrt{x-1}=2x-11 \Rightarrow \left(3\sqrt{x-1}\right)^2=(2x-11)^2 \Rightarrow 9(x-1)=4x^2-44x+121$

$9x-9=4x^2-44x+121 \Rightarrow 0=4x^2-53x+130$

$x=\frac{53\pm\sqrt{2\,809-2\,080}}{8}=\frac{53\pm\sqrt{729}}{8}=\frac{53\pm 27}{8} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=10 \\ x=\frac{26}{8}=\frac{13}{4} \end{cases}$

Comprobación:

$x=10 \quad \rightarrow \quad 3\sqrt{9}+11=9+11=20=2\cdot 10 \quad \rightarrow$ Es válida

$x=\frac{13}{4} \quad \rightarrow \quad 3\sqrt{\frac{9}{4}}+11=\frac{9}{2}+11=\frac{31}{2}\neq 2\cdot\frac{13}{4}=\frac{13}{2} \quad \rightarrow$ No es válida

Hay una solución: $x=10$

28) $2^{x-1}+2^{x+1}-3\cdot 2^x+4=0;\quad \frac{2^x}{2}+2^x\cdot 2-3\cdot 2^x+4=0;$ Hacemos el cambio: $2^x=y$

$\frac{y}{2}+2y-3y+4=0;\quad y+4y-6y+8=0 \quad \rightarrow \quad -y+8=0 \quad \rightarrow \quad y=8;\quad 2^x=8 \quad \rightarrow \quad x=3$

29) $\frac{x}{x+1}-\frac{16}{6}=\frac{x+1}{x} \Rightarrow \frac{6x^2}{6x(x+1)}-\frac{16x(x+1)}{6x(x+1)}=\frac{6(x+1)^2}{6x(x+1)} \Rightarrow 6x^2-16x^2-16x=6\left(x^2+2x+1\right)$

$6x^2-16x^2-16x=6x^2+12x+6 \Rightarrow -16x^2-28x-6=0 \Rightarrow 16x^2+28x+6=0 \quad \rightarrow \quad 8x^2+14x+3=0$

$x=\frac{-14\pm\sqrt{196-96}}{16}=\frac{-14\pm\sqrt{100}}{16}=\frac{-14\pm 10}{16} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=\frac{-4}{16}=\frac{-1}{4} \\ x=\frac{-24}{16}=\frac{-3}{2} \end{cases}$

Hay dos soluciones: $x_1=\frac{-1}{4};\quad x_2=\frac{-3}{2}$

30) $\frac{3^{x^2-x+1}}{3^{x+1}}=\frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad 3^{x^2-x+1-(x+1)}=3^{-1};\ x^2-x+1-x-1=-1 \rightarrow \quad x^2-2x+1=0:\ x=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{2}{2}=1$

Hay una única solución: $x=1$

31) $\frac{2^1}{2^x}+2^x-3=0 \Rightarrow$ Cambio $2^x=z.$ Así, $\frac{2}{z}+z-3=0 \qquad 2+z^2-3z=0 \qquad z^2-3z+2=0$

$z=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\begin{cases} z=2 \quad \rightarrow \quad 2^x=2 \quad \rightarrow \quad x=1 \\ z=1 \quad \rightarrow \quad 2^x=1 \quad \rightarrow \quad x=0 \end{cases}$

32) $(1-x)^2=7-3x \quad \rightarrow \quad 1+x^2-2x=7-3x \quad \rightarrow \quad x^2+x-6=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}\begin{cases} x=2 \text{ (no vale)} \\ x=-3 \end{cases}$

33) $2^x\cdot 2^2+2^x-5=0 \Rightarrow 4\cdot 2^x+2^x-5=0 \Rightarrow 5\cdot 2^x-5=0 \Rightarrow 2^x=1 \quad \Rightarrow \quad x=0$