TEMA 6 – LOS NÚMEROS COMPLEJOS

OPERAR CON COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

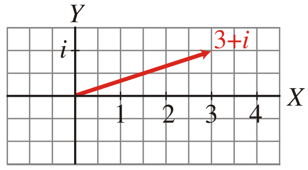
<u>EJERCICIO 1</u> : Calcula y representa gráficamente la solución que obtengas:

a) $\dfrac{(4-2i)i^5}{1+i}$ **b)** $\dfrac{5i^6(-2+i)}{-1+2i}$ c) $\dfrac{i^{30}(5-i)}{-1+i}$ d) $\dfrac{5i^9(2-3i)}{2-i}$

Solución:

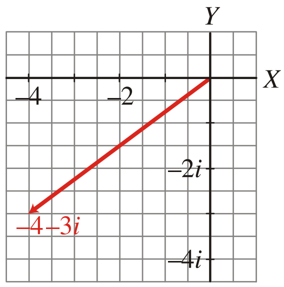
a) $\dfrac{(4-2i)i^5}{1+i}=\dfrac{(4-2i)i}{1+i}=\dfrac{4i-2i^2}{1+i}=\dfrac{4i+2}{1+i}=\dfrac{2+4i}{1+i}=\dfrac{(2+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2-2i+4i-4i^2}{1-i^2}=\dfrac{2-2i+4i+4}{1+1}=$

$=\dfrac{6+2i}{2}=\dfrac{6}{2}+\dfrac{2i}{2}=3+i$

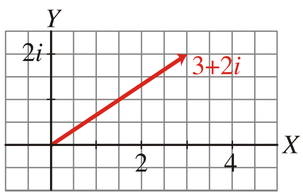


b) $\dfrac{5i^6(-2+i)}{-1+2i}=\dfrac{5(-1)(-2+i)}{-1+2i}=\dfrac{-5(-2+i)}{-1+2i}=\dfrac{-5(-2+i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=\dfrac{-5(2+4i-i-2i^2)}{1-4i^2}=$

$=\dfrac{-5(2+4i-i+2)}{1+4}=\dfrac{-5(4+3i)}{5}=-4-3i$

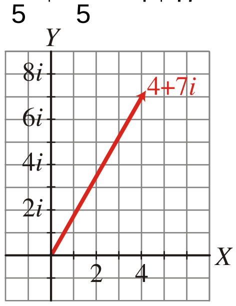


c) $\dfrac{i^{30}(5-i)}{-1+i}=\dfrac{-1(5-1)}{-1+i}=\dfrac{-5+i}{-1+i}=\dfrac{(-5+i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)}=\dfrac{5+5i-i-i^2}{1-i^2}=\dfrac{5+5i-i+1}{1+1}=\dfrac{6+4i}{2}=\dfrac{6}{2}+\dfrac{4i}{2}=3+2i$



d) $\dfrac{5i^9(2-3i)}{2-i}=\dfrac{5i(2-3i)}{2-i}=\dfrac{10i-15i^2}{2-i}=\dfrac{10i+15}{2-i}=\dfrac{15+10i}{2-i}=\dfrac{(15+10i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{30+15i+20i+10i^2}{4-i^2}=$

$=\dfrac{30+15i+20i-10}{4+1}=\dfrac{20+35i}{5}=\dfrac{20}{5}+\dfrac{35i}{5}=4+7i$



PASAR DE BINÓMICA A POLAR Y VICEVERSA. OPUESTO Y CONJUGADO

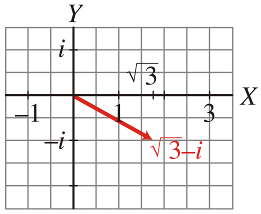
<u>EJERCICIO 2</u> : Dado el número complejo $z = \sqrt{3} - i$:
a) Represéntalo gráficamente y exprésalo en forma polar. b) Obtén su opuesto y su conjugado.

Solución:
a) Forma polar:

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$tg\,\alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad \alpha = 330^\circ \text{ (pues está en el 4.º cuadrante)}$$

Por tanto: $z = 2_{330^\circ}$

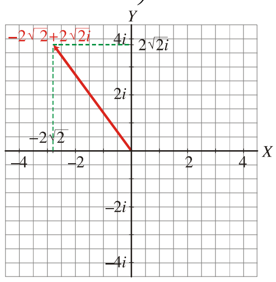


b) Opuesto $\rightarrow$ $-z = -\sqrt{3} + i$ Conjugado $\rightarrow$ $\bar{z} = \sqrt{3} + i$

<u>EJERCICIO 3</u>
a) Expresa en forma binómica el número complejo $z = 4_{135^\circ}$ y represéntalo gráficamente.
b) Obtén el opuesto y el conjugado de z.

Solución:

a) $z = 4_{135^\circ} = 4\left(\cos 135^\circ + i\, sen\, 135^\circ\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$



b) Opuesto $\rightarrow$ $-z = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ Conjugado $\rightarrow$ $\bar{z} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$

<u>EJERCICIO 4</u> : Halla el módulo y el argumento de $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4$

Solución:
Expresamos $1-i$ y $1+i$ en forma polar:

$$|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$tg\,\beta = \frac{-1}{1} = -1 \quad \rightarrow \quad \beta = 315^\circ \text{ (pues está en el 4º cuadrante)}$$

$$|1+i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{1} = 1 \quad \rightarrow \quad \alpha = 45^\circ \text{ (pues está en el 1}^{er}\text{ cuadrante)}$$

Por tanto: $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = \left(\frac{\sqrt{2}_{315^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}}\right)^4 = \left(1_{270^\circ}\right)^4 = 1_{1080^\circ} = 1_{0^\circ} = 1$ *Módulo* $= 1$ y *Argumento* $= 0°$.

OPERACIONES EN FORMA POLAR

EJERCICIO 5 : Una de las raíces octavas de un número complejo, z, es $-1+i$. Halla el valor de z.

Solución:

Si $-1+i$ es una raíz octava de z, entonces: $z=(-1+i)^8$

Expresamos $-1+i$ en forma polar:

$$|-1+i|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$tg\,\alpha=\frac{1}{-1}=-1 \quad\rightarrow\quad \alpha=135^\circ \text{ (pues está en el 2.º cuadrante)}$$

Por tanto: $z=(-1+i)^8=\left(\sqrt{2}_{135^\circ}\right)^8=16_{1080^\circ}=16_{0^\circ}=16$

EJERCICIO 6 : El producto de dos números complejos es $2\sqrt{2}_{75^\circ}$. Sabiendo que uno de los números es $z=1+i$, halla el otro número.

Solución:

Llamamos w al número buscado. Entonces, tenemos que: $\left.\begin{array}{l} z\cdot w=2\sqrt{2}_{75^\circ} \\ z=1+i \end{array}\right\}$

Expresamos z en forma polar:

$$|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$tg\,\alpha=\frac{1}{1}=1 \quad\rightarrow\quad \alpha=45^\circ \text{ (pues está en el primer cuadrante)}$$

Luego $z=\sqrt{2}_{45^\circ}$ y, por tanto:

$$w=\frac{2\sqrt{2}_{75^\circ}}{\sqrt{2}_{45^\circ}}=2_{30^\circ}=2(\cos 30^\circ+i\,sen\,30^\circ)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}+i \Rightarrow \text{Es decir: } w=2_{30^\circ}=\sqrt{3}+i$$

EJERCICIO 7 : Calcula e interpreta gráficamente las soluciones: $\sqrt[3]{-27i}$

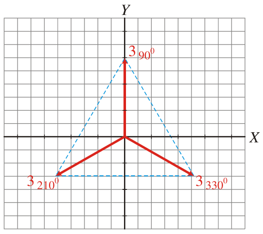
Solución:

Expresamos $-27i$ en forma polar: $-27i=27_{270^\circ}$

Así: $\sqrt[3]{-27i}=\sqrt[3]{27_{270^\circ}}=\sqrt[3]{27}_{\frac{270^\circ+360^\circ k}{3}}$ con $k=0,1,2$

$k=0 \rightarrow \sqrt[3]{27}_{90^\circ}=3_{90^\circ}$ $\qquad k=1 \rightarrow 3_{210^\circ}$ $\qquad k=2 \rightarrow 3_{330^\circ}$

Las tres raíces son: 3_{90°; 3_{210°; 3_{330°

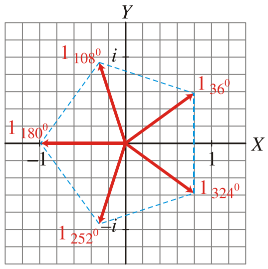


Los afijos de las tres raíces cúbicas ocupan los vértices de un triángulo equilátero.

EJERCICIO 8 : Halla $\sqrt[5]{-1}$ e interpreta gráficamente las soluciones.

Solución:

$\sqrt[5]{-1}=\sqrt[5]{1_{180^\circ}}=1_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{5}}=1_{36^\circ+72k}$; $k=0,1,2,3,4 \Rightarrow$ Las cinco raices son: 1_{36°; 1_{108°; 1_{180°; 1_{252°; 1_{324°



Los afijos de las raíces quintas ocupan los vértices de un pentágono regular.

<u>EJERCICIO 9</u> : Halla un número complejo, z, sabiendo que una de sus raíces quintas es $2-2i$.

Solución:

$z=(2-2i)^5 \Rightarrow$ Expresamos $2-2i$ en forma polar:

$|2-2i|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$

$tg\,\alpha=\dfrac{-2}{2}=-1 \quad\rightarrow\quad \alpha=315^\circ$ (pues está en el 4.º cuadrante)

Por tanto:

$$z=(2-2i)^5=\left(\sqrt{8}_{315^\circ}\right)^5=\left(\sqrt{2^3}_{315^\circ}\right)^5=\sqrt{2^{15}}_{1\,575^\circ}=2^7\sqrt{2}_{135^\circ}=128\sqrt{2}_{135^\circ}=128\sqrt{2}\left(\cos 135^\circ+i\,sen\,135^\circ\right)=$$

$$=128\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-128+128i \Rightarrow \text{Es decir: } z=128\sqrt{2}_{135^\circ}=-128+128i$$

<u>EJERCICIO 10</u> : Calcula: $\quad \sqrt[4]{-81}$

Solución:

$\sqrt[4]{-81}=\sqrt[4]{81_{180^\circ}}=3_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{4}}=3_{45^\circ+90^\circ k}$; $k=0,1,2,3 \Rightarrow$ Las cuatro raíces son: $\quad 3_{45^\circ};\quad 3_{135^\circ};\quad 3_{225^\circ};\quad 3_{315^\circ}$

RESOLUCIÓN DE ECUACIONES EN FORMA COMPLEJA

<u>EJERCICIO 11</u> : Resuelve las ecuaciones:

a) $z^2-4z+5=0$ b) $z^3+8=0$ c) $x^2-4i\,x-5=0$ d) $z^3+64=0$

Solución:

a) $z^2-4z+5=0 \Rightarrow z=\dfrac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{-4}}{2}=\dfrac{4\pm 2i}{2}=2\pm i \Rightarrow$ Hay dos soluciones: $z_1=2+i$; $\;z_2=2-i$

b) $z^3+8=0 \rightarrow z^3=-8 \Rightarrow z=\sqrt[3]{-8}=\sqrt[3]{8_{180^\circ}}=2_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{3}}=2_{60^\circ+120^\circ k}$; $k=0,1,2 \Rightarrow 2_{60^\circ};\quad 2_{180^\circ};\quad 2_{300^\circ}$

c) $x^2-4i\,x-5=0 \Rightarrow x=\dfrac{4i\pm\sqrt{16i^2+20}}{2}=\dfrac{4i\pm\sqrt{-16+20}}{2}=\dfrac{4i\pm\sqrt{4}}{2}=\dfrac{4i\pm 2}{2}=2i\pm 1 \rightarrow \begin{cases}2i+1=1+2i\\ 2i-1=-1+2i\end{cases}$

Hay dos soluciones: $z_1=1+2i$; $\;z_2=-1+2i$

d) $z^3+64=0 \rightarrow z^3=-64 \rightarrow z=\sqrt[3]{-64}=\sqrt[3]{64_{180^\circ}} \Rightarrow z=4_{\frac{180^\circ+360^\circ k}{3}}=4_{60^\circ+120^\circ k}$; $\quad k=0,1,2$

Las tres raíces son: $4_{60^\circ};\quad 4_{180^\circ};\quad 4_{300^\circ}$