I.E.S LA ARBOLEDA (LEPE) **DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

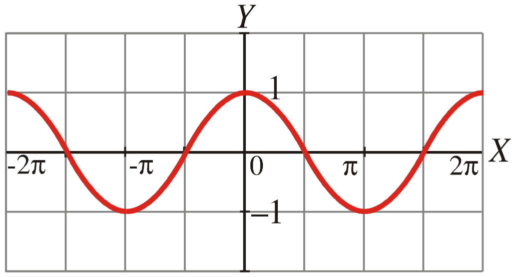
SOLUCIONES

Examen de Matemáticas I (1º Bachillerato)

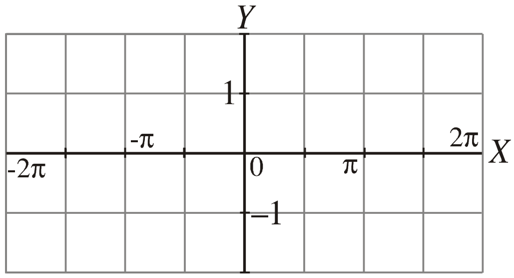
UNIDAD 5: FUNCIONES Y FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Notas:
1) El examen ha de hacerse limpio, ordenado y sin faltas de ortografía.
2) El examen ha de realizarse en bolígrafo, evitando tachones en la medida de lo posible.
3) Debe aparecer todas las operaciones, no vale con indicar el resultado.
4) Los problemas deben contener: Datos, Planteamiento y Resolución, respondiendo a lo que se pregunte, no vale con indicar un número como solución del problema.

1.
a) Escribe la expresión analítica de la función cuya gráfica es la siguiente: (0.5p)



b) Representa en estos ejes la siguiente función: $y = \text{sen}\,(x - \pi)$ (1p)

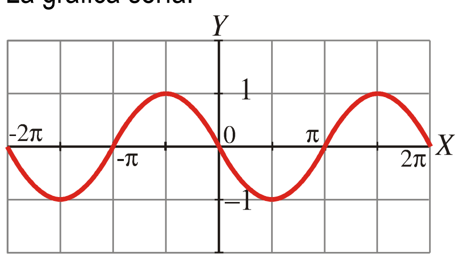


Solución:
a) La gráfica corresponde a la función $y = \cos x$.

b) Elaboramos una tabla de valores:

x	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$x-\pi$	-3π	$-5\pi/2$	-2π	$-3\pi/2$	$-\pi$	$-\pi/2$	0	$\pi/2$	π
$y=\text{sen}(x-\pi)$	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0

La gráfica sería:



2. Demuestra que: tg (45º + α) - tg (45º - α) = 2 tg 2α (1p)

Solución:

Desarrollamos el primer miembro:

$$\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$$
$$\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}45^\circ-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$$

Realizamos la resta, reduciendo previamente a común denominador. Posteriormente, simplificamos y queda:

$$\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=2\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=2\operatorname{tg}2\alpha$$

Que es igual al segundo miembro.

3. Simplifica la siguiente expresión y, posteriormente, calcula su valor para x= π/4 (1p)

$$\frac{\operatorname{sen}5x+\operatorname{sen}3x}{\cos 5x+\cos 3x}$$

Solución:

Desarrollamos numerador y denominador, transformando sumas en productos. Así queda,

$$\frac{2\operatorname{sen}\frac{5x+3x}{2}\cdot\cos\frac{5x-3x}{2}}{2\cos\frac{5x+3x}{2}\cdot\cos\frac{5x-3x}{2}}=2\frac{\operatorname{sen}4x}{\cos 4x}=2\operatorname{tg}4x$$

Si $x=\pi/4 \longrightarrow 2\cdot\operatorname{tg}(4\cdot\pi/4) = 2\operatorname{tg}\pi = 2\cdot 0 = 0$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas: (2.5p)

a)

$$\operatorname{sen}2x+\cos 2x-1=\cos x-2\operatorname{sen}^2 x$$

b)

$$\cos^3 x-3\cos x=3\cos x\operatorname{sen}x$$

Solución:

a)

$$\operatorname{sen}2x+\cos 2x-1=\cos x-2\operatorname{sen}^2 x$$
$$2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x-1=\cos x-2\operatorname{sen}^2 x$$
$$2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x-1-\cos x+2\operatorname{sen}^2 x=0$$
$$2\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x-1-\cos x=0$$
$$2\operatorname{sen}x\cos x+1-1-\cos x=0$$

$$2\,sen\,x\cos x - \cos x = 0$$
$$\cos x(2\,sen\,x - 1) = 0$$
$$\begin{cases} \cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ \\ 2\,sen\,x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad sen\,x = \dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 30^\circ + 360^\circ k \\ x = 150^\circ + 360^\circ k \end{cases} \end{cases} \qquad \text{siendo } k \in \mathbf{Z}$$

b)

$$\cos^3 x - 3\cos x = 3\cos x\,sen\,x$$
$$\cos^3 x - 3\cos x - 3\cos x\,sen\,x = 0$$
$$\cos x\left(\cos^2 x - 3 - 3\,sen\,x\right) = 0$$
$$\cos x\left(1 - sen^2 x - 3 - 3\,sen\,x\right) = 0$$
$$\cos x\left(-sen^2 x - 3\,sen\,x - 2\right) = 0$$
$$-\cos x\left(sen^2 x + 3\,sen\,x + 2\right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \\ sen^2 x + 3\,sen\,x + 2 = 0 \end{cases}$$

$$sen\,x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -1 \\ \\ -2 \ \text{(no vale)} \end{cases}$$

$$sen\,x = -1 \quad \rightarrow \quad x = 270^\circ + 360^\circ k$$

Por tanto las soluciones son:

$$\begin{cases} x = 90^\circ + 360^\circ k \\ \\ x = 270^\circ + 360^\circ k \end{cases} \qquad \text{siendo } k \in \mathbf{Z}$$

5. Establece una relación entre las razones trigonométricas de los ángulos que miden 8π/9 y 17π/9. Justifica tu respuesta, basándote en la posición que ocupa cada uno de los ángulos sobre la circunferencia goniométrica. (1p)

Solución:

$$\frac{17\pi}{9} - \frac{8\pi}{9} = \frac{9\pi}{9} = \pi \quad \rightarrow \quad \text{son ángulos que difieren en } \pi$$
$$sen\,\frac{17\pi}{9} = sen\left(\pi + \frac{8\pi}{9}\right) = -sen\,\frac{8\pi}{9}$$
$$\cos\frac{17\pi}{9} = -\cos\frac{8\pi}{9}$$
$$tg\,\frac{17\pi}{9} = tg\,\frac{8\pi}{9}$$

6. Expresa A(x) en función de sen x y cos x: (1p)

$$A(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Solución:

$$sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = sen\,x \cdot \overbrace{cos\frac{\pi}{2}}^{0} - cos\,x\,\overbrace{sen\frac{\pi}{2}}^{1} = -cos\,x$$

$$cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = cos\,x \cdot \underbrace{cos\frac{3\pi}{2}}_{0} - sen\,x\,\underbrace{sen\frac{3\pi}{2}}_{-1} = sen\,x$$

$$sen\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = -cos\,x + sen\,x$$

7. Resuelve el siguiente sistema dando las soluciones correspondientes al primer cuadrante, en radianes. (2p)

$$\begin{cases} x + y = 120^{o} \\ sen\,x - sen\,y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Solución:

De la segunda ecuación obtenemos que:

$$2 \cdot \cos\frac{x+y}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}$$

Como:

$$x + y = 120^\circ \rightarrow 2\cos 60^\circ \operatorname{sen}\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen}\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow$$
$$\frac{x-y}{2} = 30^\circ \rightarrow x - y = 60^\circ$$

De este modo, obtenemos que:

$$\begin{cases} x + y = 120^\circ \\ x - y = 60^\circ \end{cases}$$

Aplicando el método de reducción, obtenemos que:

Sumando ambas ecuaciones: 2x = 180º y por tanto, x = 90º e y = 30º

La solución buscada a la ecuación, en el primer cuadrante es: (90º,30º)