

SOLUCIONES

Examen de Matemáticas I (1º Bachillerato)

UNIDAD 2: SUCESIONES

Fecha: 03-11-2009

Notas:

- 1) El examen ha de hacerse limpio, ordenado y sin faltas de ortografía.
- 2) El examen ha de realizarse en bolígrafo, evitando tachones en la medida de lo posible.
- 3) Debe aparecer todas las operaciones, no vale con indicar el resultado.
- 4) Los problemas deben contener: Datos, Planteamiento y Resolución, respondiendo a lo que se pregunte, no vale con indicar un número como solución del problema.

1. Obtén el término general de las sucesiones siguientes: (2p)

a) $2, -8, -18, -28, \dots$

b) $-3, 1, 5, 9, 13, \dots$

c) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

d) $-1, 2, -4, 8, -16, \dots$

Solución:

a) Es una progresión aritmética con $a_1 = 2$ y $d = -10$. Por tanto:

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot (-10) = 2 - 10n + 10 \rightarrow a_n = 12 - 10n$$

b) Es una progresión aritmética con $a_1 = -3$ y $d = 4$. Así:

$$a_n = -3 + (n - 1) \cdot 4 = -3 + 4n - 4 \rightarrow a_n = 4n - 7$$

c) Es una progresión geométrica con $a_1 = 2$ y $r = \frac{1}{2}$. Por tanto :

$$a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{2}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}} \rightarrow a_n = \frac{1}{2^{n-2}}$$

d) Es una progresión geométrica con $a_1 = -1$ y $r = -2$. Así:

$$a_n = (-1) \cdot (-2)^{n-1}$$

2. Averigua el término general de las siguientes sucesiones: (1p)

a) $3, 6, 11, 18, 27, \dots$

b) $\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{9}{16}, \frac{11}{32}, \dots$

Solución:

a) $a_n = n^2 + 2$

b) $b_n = \frac{2n+1}{2^n}$

3. Halla el criterio de formación de la siguiente sucesión recurrente: (0.75p)

3, 4, 12, 48, 576, 27 648, ...

Solución:

A partir del tercero, cada término se obtiene multiplicando los dos anteriores:

$$a_1 = 3 \quad , \quad a_2 = 4 \quad , \quad a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} \quad \text{para } n > 2$$

4. Halla la suma desde el término a_{20} hasta el a_{30} (ambos incluidos) en la progresión aritmética cuyo término general es $a_n = 2n + 3$. (1.5p)

Solución:

Calculamos a_{20} y a_{30} :

$$a_{20} = 2 \cdot 20 + 3 = 40 + 3 = 43 \quad , \quad a_{30} = 2 \cdot 30 + 3 = 60 + 3 = 63$$

El número de términos desde a_{20} hasta a_{30} (ambos incluidos) es 11. Por tanto, la suma pedida es:

$$S = \frac{(a_{20} + a_{30}) \cdot 11}{2} = \frac{(43 + 63) \cdot 11}{2} = \frac{106 \cdot 11}{2} = 583$$

5. Estudia si las siguientes sucesiones tienen límite. Si lo tienen, calcúlalo; si no, explica el porqué. Elabora una tabla de valores y realiza la representación gráfica en cada caso. (1.5p)

$$\text{a) } a_n = \frac{4n}{n+1} \qquad \text{b) } b_n = \frac{2n+1}{3}$$

Solución:

$$\text{a) } a_{10} = 3,6363... \quad a_{100} = 3,96039... \quad a_{1\,000} = 3,996... \\ a_{1\,000\,000} = 3,999996$$

$$\lim a_n = 4$$

$$\text{b) } b_{10} = 7... \quad b_{100} = 67... \quad b_{1\,000} = 667... \quad b_{1\,000\,000} = 666\,667$$

$$\lim b_n = +\infty$$

6. Invéntate dos sucesiones cuyo límite sea 0 y tales que, al dividir las, la sucesión que resulte tienda a infinito. (0.75p)

Solución:

Por ejemplo, $a_n = \frac{2}{n}$ y $b_n = \frac{1}{n^2}$. Comprobamos que su límite es 0.

$$a_{10} = 0,2 \quad a_{100} = 0,02 \quad a_{1000} = 0,002 \quad \rightarrow \quad \lim a_n = 0$$

$$b_{10} = 0,01 \quad b_{100} = 0,0001 \quad b_{1000} = 0,000001 \quad \rightarrow \quad \lim b_n = 0$$

Si hacemos $c_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{2}{n} : \frac{1}{n^2} = \frac{2n^2}{n} = 2n$, obtenemos una sucesión cuyo límite es infinito:

$$c_{10} = 20 \quad c_{100} = 200 \quad c_{1000} = 2\,000 \quad \rightarrow \quad \lim c_n = +\infty$$

7. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Si es falsa, indica un contra-ejemplo. (1p)

a) La sucesión $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ es un progresión geométrica.

b) La sucesión $a_n = \frac{-1}{n^2}$ no tiene límite.

c) Para que la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica no sea infinitamente grande, ha de ser $|r| < 1$.

d) La sucesión $a_n = (-1)^n \cdot 2n$ no tiene límite.

Solución:

a) Verdadero.

En una progresión geométrica se cumple:

$$\left. \begin{array}{l} a_2 = a_1 r \rightarrow r = \frac{a_2}{a_1} \\ a_3 = a_2 r \rightarrow r = \frac{a_3}{a_2} \\ a_{n+1} = a_n r \rightarrow r = \frac{a_{n+1}}{a_n} \end{array} \right\} \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

b) Falso.

$$a_{10} = -0,01 \quad a_{100} = -0,0001 \quad a_{1000} = -0,000001 \quad \rightarrow \quad \lim a_n \neq 0$$

c) Verdadero.

Si $|r| < 1$, la suma de los infinitos términos es $S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}$.

d) Verdadero.

$a_1 = -2$, $a_2 = 4$, $a_3 = -6$, $a_4 = 8$, ... Es decir, es una sucesión oscilante, luego no tiene límite.

8. En una progresión aritmética, la suma del quinto término con el décimo y el duodécimo es 54. Calcula el noveno término. (1.5p)

Solución:

$$\left. \begin{array}{l} a_5 = a_1 + 4d \\ a_{10} = a_1 + 9d \\ a_{12} = a_1 + 11d \end{array} \right\} \begin{array}{l} a_5 + a_{10} + a_{12} = 54 \\ a_1 + 4d + a_1 + 9d + a_1 + 11d = 54 \end{array}$$
$$3a_1 + 24d = 54 \rightarrow 3(\underbrace{a_1 + 8d}_{a_9}) = 54 \rightarrow a_9 = 18$$