I.E.S LA ARBOLEDA (LEPE) DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

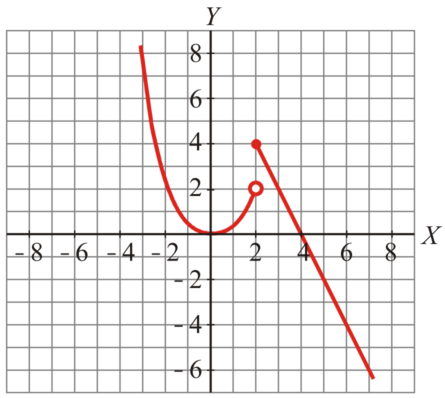
SOLUCIONES

Examen de Matemáticas I (1º Bachillerato)

UNIDAD 9: LÍMITES DE FUNCIONES. CONTINUIDAD Y RAMAS INFINITAS.

Notas:
1) El examen ha de hacerse limpio, ordenado y sin faltas de ortografía.
2) El examen ha de realizarse en bolígrafo, evitando tachones en la medida de lo posible.
3) Debe aparecer todas las operaciones, no vale con indicar el resultado.
4) Los problemas deben contener: Datos, Planteamiento y Resolución, respondiendo a lo que se pregunte, no vale con indicar un número como solución del problema.

1. Dada la siguiente gráfica de f(x), calcula los límites que se indican: (1p)



a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Solución:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2$

d) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4$

e) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

2. Calcula el siguiente límite y estudia el comportamiento de la función por la izquierda y por la derecha de x = 0: (1p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{x^2+2x}$$

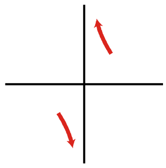
¿Qué significado tiene el límite anterior? Justifica tu respuesta.

Solución:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{x^2+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{x(x+2)}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x+1}{x^2+2x} = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{2x+1}{x^2+2x} = +\infty$$

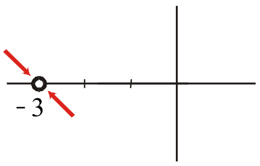


3. Resuelve el siguiente límite e interprétalo gráficamente. (1.25p)

$$\lim_{x\to -3} \frac{2x^2+12x+18}{x^2+x-6}$$

Solución:

$$\lim_{x\to -3} \frac{2x^2+12x+18}{x^2+x-6} = \lim_{x\to -3} \frac{2(x+3)^2}{(x+3)(x-2)} = \lim_{x\to -3} \frac{2(x+3)}{(x-2)} = 0$$



4. Halla las asíntotas verticales de la siguiente función y sitúa la curva respecto a ellas: (1p)

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-1}$$

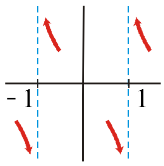
Solución:

- $x^2-1=0 \Rightarrow x=-1\ ;\ x=1.$
  Las asíntotas verticales son $x=-1$ y $x=1$.

- Posición de la curva respecto a ellas:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x+1}{(x-1)(x+1)} = -\infty \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x+1}{x^2-1} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{2x+1}{x^2-1} = +\infty$$



5. (1p)

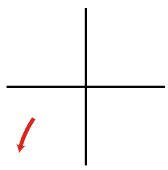
Halla las ramas infinitas, cuando $x \to -\infty$, de las siguientes funciones y representa los resultados que obtengas:

a) $f(x) = (x-1)^3$

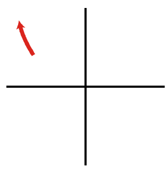
b) $f(x) = x^2 - x$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)^3 = -\infty$

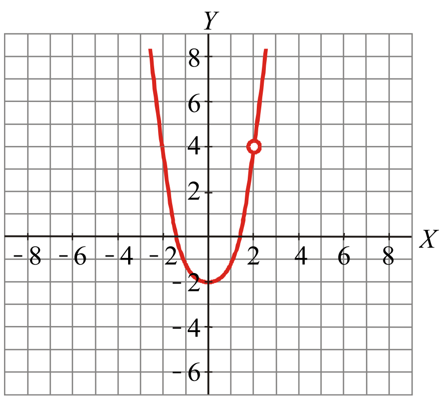


b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 - x) = +\infty$



6. (1p)

Dada la gráfica de $f(x)$:



a) ¿Es continua en $x = 1$? ¿Por qué?
b) ¿Y en $x = 2$? ¿Por qué?
Si no es continua en alguno de los puntos, indica cuál es la razón de la discontinuidad e indica su nombre. Justifica tu respuesta.
Solución:

a) Sí es continua en $x = 1$.

b) No, en $x = 2$ es discontinua porque no está definida en ese punto. Como sí tiene límite en ese punto, es una discontinuidad evitable.

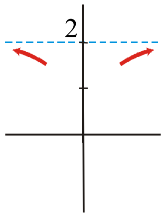
7. (1p)

Halla las ramas infinitas, cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$, de la siguiente función y representa los resultados que obtengas. ¿Qué puedes afirmar acerca de las asíntotas según los resultados obtenidos?

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2+1}$$

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+1} = 2$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+1}{x^2+1} = 2$$



Con calculadora podemos comprobar que:

- Dando valores muy grandes y positivos $(x \to +\infty)$, la curva va por debajo de la asíntota $y = 2$.
- Dando valores muy grandes y negativos $(x \to -\infty)$, la curva va por debajo de la asíntota $y = 2$.

8. Indica razonadamente si existe algún valor a para el cual la función (1.25p)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

sea continua en $x = 1$.

Solución:

$f(x)$ será continua en $x = 1$ si se cumple lo siguiente:

1. Existe $f(1) = a$
2. Existe $\lim f(x) = \lim\limits_{x\to1} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \dfrac{1}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to1} f(x) = f(1) = a$

En este caso, no existe $\lim\limits_{x\to1} f(x)$. Por tanto, no existe ningún valor a que haga que $f(x)$ sea continua.

9. Los gastos mensuales de una familia en alimentación y ropa dependen de sus ingresos x. Así: (1.5p)

$$f(x) = \begin{cases} 0,5x + k & \text{si } 0 \le x \le 1200 \\ \dfrac{1000x}{x + 300} & \text{si } x > 1200 \end{cases}$$

con x y f(x) dados en euros.

a) Calcula el valor de k para que los gastos sean continuos.

b) Calcula el límite de f(x) cuando x $\rightarrow +\infty$ y explica su significado.

Solución:

a) Para que los gastos sean continuos, $f(x)$ ha de ser continua en $x = 1200$, puesto que para el resto de valores tenemos asegurada la continuidad:

$y = 0,5x + k$ es una función lineal $\rightarrow$ continua en el dominio dado $0 \le x = 1200$.

$y = \dfrac{1000x}{x + 300}$ es una función de proporcionalidad inversa, continua en el dominio dado $x > 1200$.

Imponemos la continuidad en $x = 1200$ para calcular k:

$$\left.\begin{array}{l} f(1200) = 0,5 + 1200 + k = 600 + k \\ \lim\limits_{x \to 1200^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1200} f\,(0,5x + k) = 600 + k \\ \lim\limits_{x \to 1200^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1200} \dfrac{1000x}{x + 300} = 800 \end{array}\right\} \rightarrow \lim\limits_{x \to 1200^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1200^+} f(x) \rightarrow 600 + k = 800 \rightarrow k = 200$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1000x}{x + 300} = 1000$

Los gastos mensuales de una familia, por muchos ingresos que tenga, son como máximo: 1 000 euros.