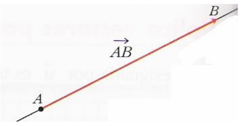
TEMA 7 – VECTORES

7.1 – LOS VECTORES Y SUS OPERACIONES

DEFINICIÓN

Un vector es un segmento orientado. Un vector $\vec{AB}$ queda determinado por dos puntos, **origen** A y **extremo** B.



Elementos de un vector:

- **Módulo** de un vector es la distancia entre A y B y se designa por el vector entre barras : $|\vec{AB}|$
- **Dirección** del vector es la dirección de la recta en la que se encuentra el vector y la de todas sus paralelas.
- **Sentido** si va de A a B o de B a A.

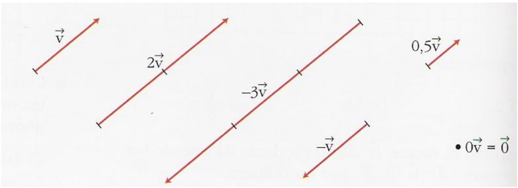
Igualdad de vectores: Dos vectores son iguales si tienen el mismo módulo, dirección y sentido. Todos ellos se llaman representantes de un único vector. Llamaremos representante canónico a aquel vector que tiene por origen el punto O.

Notación: Los vectores se representan por letras: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, ... o bien mediante uno de sus representantes, designando su origen y su extremo con una flecha encima $\vec{AB}$

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN NÚMERO

El producto de un número k por un vector $\vec{v}$ es otro vector $k\vec{v}$ que tiene:

- Módulo: igual al producto del módulo de $\vec{v}$ por el valor absoluto de k : $|k\vec{v}| = |k|.|\vec{v}|$
- Dirección: la misma que la de $\vec{v}$
- Sentido:
    - El de $\vec{v}$ si $k > 0$
    - El del opuesto de $\vec{v}$ si $k < 0$



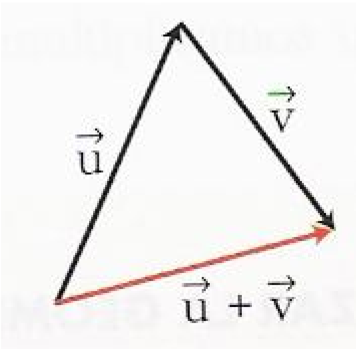
El producto 0. $\vec{v}$ es igual al **vector cero**: $\vec{0}$. Es un vector cuyo origen y extremo coinciden y, por tanto, su módulo es cero y carece de dirección y de sentido.

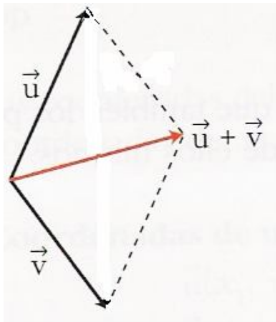
El vector –1. $\vec{v}$ se designa por $-\vec{v}$ y se llama **opuesto** de $\vec{v}$

SUMA DE DOS VECTORES

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para sumarlos gráficamente hay dos posibilidades:

- Se sitúa el origen del segundo vector sobre el extremo del primero y el vector suma es el vector que une el origen del primero con el extremo del segundo.
- Se sitúan los dos vectores con origen común. Se forma el paralelogramo que tiene por lados los dos vectores y la diagonal que parte del origen de los dos vectores es el vector suma.





RESTA DE DOS VECTORES

Restar dos vectores es lo mismo que sumar al primer vector el opuesto del segundo.

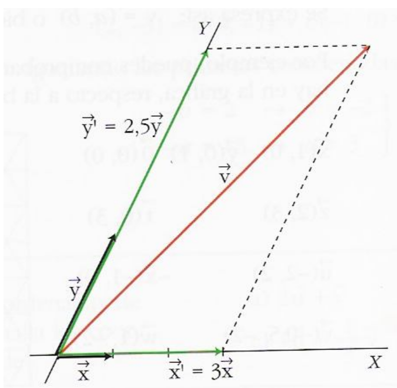
$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$$

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Dados dos vectores, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, y dos números a y b, el vector $a\vec{u} + b\vec{v}$ se dice que es una **combinación lineal** de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Notas:

- Cualquier vector se puede poner como combinación lineal de otros dos.
- Esta combinación lineal es única.



7.2 – COORDENADAS DE UN VECTOR. BASE

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con distintas dirección y no nulos forman una **base**, pues cualquier vector del plano se puede poner como combinación lineal de ellos.

Si los dos vectores de la base son perpendiculares entre si, se dice que forman una **base ortogonal**, y si además tienen módulo 1, se dice que forman una **base ortonormal**.

Coordenadas de un vector respecto de una base: Cualquier vector $\vec{w}$ se puede poner como combinación lineal de los elementos de una base B($\vec{x}$, $\vec{y}$) de forma única:

$$\vec{w} = a\,\vec{x} + b\,\vec{y}$$

A los números (a,b) se les llama coordenadas de $\vec{w}$ respecto de B.

Y se expresa así: $\vec{w} = (a,b)$ ó $\vec{w}\ (a,b)$

OPERACIONES CON COORDENADAS

SUMA DE DOS VECTORES

Las coordenadas del vector $\vec{u} + \vec{v}$ se obtienen sumando las coordenadas de µ con las de v: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1,u_2) + (v_1,v_2) = (u_1 + u_2,v_1 + v_2)$

RESTA DE DOS VECTORES

Las coordenadas del vector $\vec{u} - \vec{v}$ se obtienen restando las coordenadas de µ con las de $\vec{v}$: $\vec{u} - \vec{v} = (u_1,u_2) - (v_1,v_2) = (u_1 - u_2,v_1 - v_2)$

PRODUCTO DE UN VECTOR POR UN NÚMERO

Las coordenadas del vector $k\,\vec{u}$ se obtienen multiplicando por k las coordenadas de $\vec{u}$

$$k\,\vec{u} = k.(u_1,u_2) = (ku_1,ku_2)$$

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

$$a\,\vec{u} + b\,\vec{v} = a(u_1,u_2) + b(v_1,v_2) = (au_1 + bv_1,au_2 + bv_2)$$

7.3 – PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES

DEFINICIÓN

El producto es calar de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es un número que resulta de multiplicar el módulo de cada uno de los vectores por el coseno del ángulo que forman y se designa por $\vec{u}\cdot\vec{v}$: $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

PROPIEDADES

- El producto escalar del vector o por otro vector cualquiera es el número 0
  $$\text{Si } \vec{u} = \vec{0} \text{ o } \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$
- Si dos vectores son perpendiculares, entonces su producto escalar es cero:
  $$\text{Si } \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$$
- Si el producto escalar de dos vectores no nulos es cero, entonces son perpendiculares: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, con $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$
- El producto escalar de dos vectores es igual al producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él, con signo + o – según si forman ángulo agudo o obtuso. Por tanto, llamaremos proyección ortogonal de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$: $\vec{u}\,' = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}$
- Propiedad conmutativa: $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- Propiedad asociativa: $a.(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (a\,\vec{u}).\vec{v}$
- Propiedad distributiva: $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$
- Si $B(\vec{x},\vec{y})$ es una base ortogonal: $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x} = 0$
- Si $B(\vec{x}\cdot\vec{y})$ es una base ortonormal : $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x} = 0$, $\vec{x}\cdot\vec{x} = 1$, $\vec{y}\cdot\vec{y} = 1$

EXPRESIÓN ANALÍTICA (en una base ortonormal)

Si las coordenadas de los vectores u y v respecto a una base ortonormal son $\vec{u}\,(u_1,u_2)$ y $\vec{v}\,(v_1,v_2)$, entonces el producto escalar u.v adopta la siguiente expresión:
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1.v_1 + u_2.v_2$$

Dem : $\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1\vec{x} + u_2\vec{y}).(v_1\vec{x} + v_2\vec{y}) = u_1.v_1.\,\vec{x}\cdot\vec{x} + u_1.v_2.\,\vec{x}\cdot\vec{y} + u_2.v_1.\,\vec{y}\cdot\vec{x} + u_2.v_2.\,\vec{y}\cdot\vec{y} = u_1.v_1 + u_2.v_2$

MÓDULO DE UN VECTOR (en una base ortonormal)

Expresión vectorial : $\vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{v},\vec{v}) = |\vec{v}|^2.\cos 0 = |\vec{v}|^2 \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

Expresión cartesiana : $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$

ÁNGULO DE DOS VECTORES (en una base ortonormal)

Expresión vectorial : $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| . |\vec{v}| . \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| . |\vec{v}|}$

Expresión analítica : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{u_1 . v_1 + u_2 . v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} . \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$

VECTOR ORTOGONAL A OTRO

Un vector ortogonal a (a,b) es (-b,a) ó (b,-a) "Si cambian de orden y una de signo".

VECTOR UNITARIO

Para convertir un vector en unitario, se divide cada una de las coordenadas por el módulo del vector: $\vec{u}(a,b) \Rightarrow$ Vector unitario $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$

7.4 – ALGUNAS APLICACIONES DE LOS VECTORES

COORDENADAS DEL VECTOR QUE UNE DOS PUNTOS

Las coordenadas del vector $\vec{AB}$ se obtienen restándole a las coordenadas del extremo B las del origen A : $\vec{AB} = (x_2,y_2) – (x_1,y_1) = (x_2-x_1,y_2-y_1)$

CONDICIÓN PARA QUE TRES PUNTOS ESTÉN ALINEADOS

Los puntos $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$ están alineados siempre que los vectores AB y BC tengan la misma dirección. Esto ocurre cuando sus coordenadas son proporcionales:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_2}$$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

Las coordenadas del punto medio, M, de un segmento de extremos $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ son: $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2} \right)$

SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO DE OTRO

Para calcular el simétrico A' del punto A respecto del punto B, solo hay que tener en cuenta que el punto B es el punto medio entre A y A'.