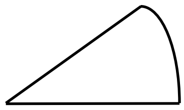
TEMAS 5 – FUNCIONES Y FÓRMULAS TRIGONOMETRÍAS

5.1 – UNIDAD PARA MEDIR ÁNGULOS: EL RADIÁN

DEFINICIÓN DE RADIAN

Se llama **radian** a un ángulo tal que el arco que abarca tiene la misma longitud que el radio con el que se ha trazado.



$$\text{Ángulo completo} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Nota: Si una circunferencia fuera el doble de grande, el radio también sería el doble, por lo que el ángulo correspondiente a un arco que mida como el radio sería el mismo.

RELACIÓN ENTRE LAS UNIDADES DE MEDIDA DE ÁNGULOS

$360º \longleftrightarrow 2\Pi$ rad ó $180º \longleftrightarrow \Pi$ rad

UTILIDAD DE LOS RADIANES

Para los problemas de trigonometría, astronomía, navegación y resolución de triángulos en general, se usan las medidas de los ángulos en grados. Pero para representar y estudiar funciones trigonométricas se utilizan los radianes.

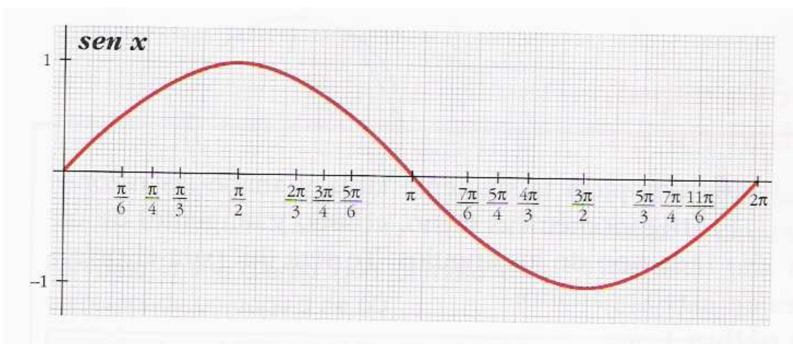
CALCULADORA

Para hallar las razones trigonométricas de un ángulo dado en radianes, hay que empezar poniendo la calculadora en modo correspondiente (MODE RAD). El resto es igual que en grados.

5.2 – FUNCIONES CIRCULARES

FUNCIÓN SENO

Grados	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
Radianes	0	Π/6	Π/4	Π/3	Π/2	2Π/3	3Π/4	5Π/6	Π	7Π/6	5Π/4	4Π/3	3Π/2	5Π/3	7Π/4	11Π/6	2Π
seno	0	1/2	2/2	3/2	1	3/2	2/2	1/2	0	-1/2	-2/2	-3/2	-1	-3/2	-2/2	-1/2	0

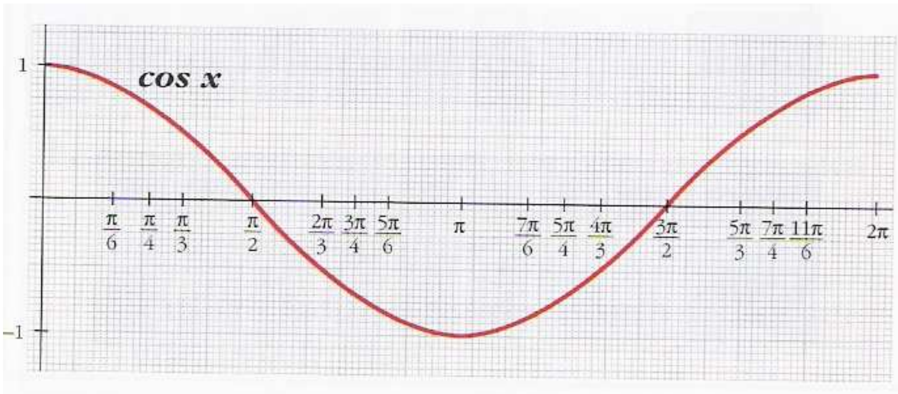


CARACTERÍSTICAS

- Dominio : R
- Recorrido : [-1,1]
- Periodicidad : 2π
- Continua
- Creciente (0º+360ºk,90º+360ºk) ∪ (270º+360ºk,360º+360ºk)
- Decreciente (90º+360ºk,270º+360ºk)
- Máximo x = 90º+360ºk   y = 1
- Mínimo x = 270º+360ºk y = -1
- Concava: (0º+360ºk,180º+360ºk)
- Convexa: (180º+360ºk,360º+360ºk)
- Puntos de inflexión x = 0º+180ºk y = 0

FUNCIÓN COSENO

Grados	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
Radianes	0	Π/6	Π/4	Π/3	Π/2	2Π/3	3Π/4	5Π/6	Π	7Π/6	5Π/4	4Π/3	3Π/2	5Π/3	7Π/4	11Π/6	2Π
cos	1	3/2	2/2	1/2	0	-1/2	-2/2	-3/2	-1	-3/2	-2/2	-1/2	0	-1/2	-2/2	-3/2	1

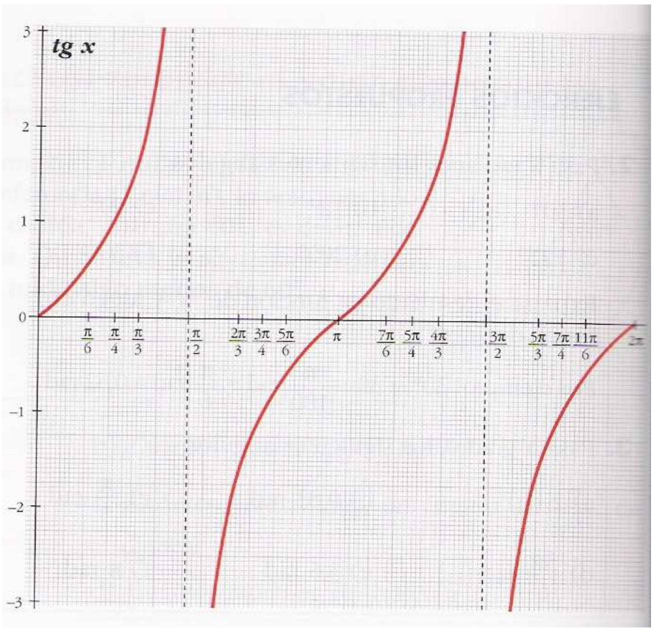


CARACTERÍSTICAS

- Dominio : R
- Recorrido : [-1,1]
- Periodicidad : 2π
- Continua
- Creciente (180º+360ºk,360º+360ºk)
- Decreciente (0º+360ºk,180º+360ºk)
- Máximo x = 0º+360ºk y = 1
- Mínimo x = 180º+360ºk y = -1
- Concava: (0º+360ºk,90º+360ºk) ∪ (270º+360ºk,360º+360ºk)
- Convexa: (90º+360ºk,270º+360ºk)
- Puntos de inflexión x = 90º+180ºk y = 0

FUNCIÓN TANGENTE

Grados	0º	30º	45º	60º	90º	120º	135º	150º	180º	210º	225º	240º	270º	300º	315º	330º	360º
Radianes	0	Π/6	Π/4	Π/3	Π/2	2Π/3	3Π/4	5Π/6	Π	7Π/6	5Π/4	4Π/3	3Π/2	5Π/3	7Π/4	11Π/6	2Π
Tag	0	3/3	1	3		-3	-1	-3/3	0	3/3	1	3		-3	-1	-3/3	0



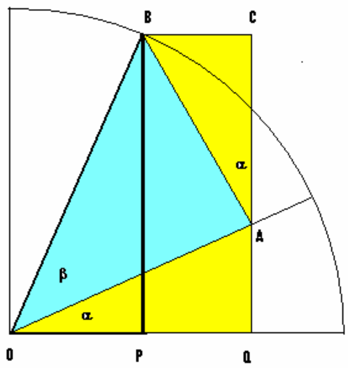
<u>CARACTERÍSTICAS</u>

- Dominio : R – {90º+180ºk}
- Recorrido : R
- Periodicidad : π
- Continua: R – {90º+180ºk}
- Creciente R – {90º+180ºk}
- Concava: (0º+180ºk,90º+180ºk)
- Convexa: (90º+180ºk,180º+180ºk)
- Puntos de inflexión x = 90º+180ºk y = 0

5.3 – FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA SUMA DE DOS ÁNGULOS

Seno de la suma: sen (α + β) = sen α.cos β + cos α.sen β



Sen (α + β) = BP = CA + AQ

CA : cos α = CA/BA ⇒ CA = BA.cosα

AQ : sen α = AQ/OA ⇒ AQ = OA.sen α

BA = sen B

OA = cos B

Por tanto: sen (α + β) = sen β.cos α + cos β.sen α

Coseno de la suma : cos (α + B) = cosα.cosα - senα.senβ

Cos (α + B) = sen [90º+(α+β)] = sen [(90º+α)+β] = sen(90º+α).cosβ + cos(90º+α).senB = cosα.cosB + (– sen α).sen β = cosα.cosβ - senα .senβ

Tangente de la suma : $\mathbf{tag(\alpha+\beta) = \dfrac{tag\alpha + tag\beta}{1 - tag\alpha.tag\beta}}$

Tag(α+β) = $\dfrac{sen(\alpha+\beta)}{cos(\alpha-\beta)} = \dfrac{sen\,\alpha.cos\,\beta + cos\,\alpha.sen\,\beta}{cos\,\alpha..cos\,\beta - sen\,\alpha.sen\,\beta} = \dfrac{\dfrac{sen\,\alpha.cos\,\beta}{cos\,\alpha.cos\,\beta} + \dfrac{cos\,\alpha\,sen\,\beta}{cos\,\alpha.cos\,\beta}}{\dfrac{cos\,\alpha.cos\,\beta}{cos\,\alpha.cos\,\beta} - \dfrac{sen\,\alpha.sen\,\beta}{cos\,\alpha.cos\,\beta}} =$

$= \dfrac{tag\alpha + tag\beta}{1 - tag\alpha.tag\beta}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS

Seno de la resta: sen (α - β) = senα.cosβ - cosα.senβ

Sen (α - β) = sen (α + (-β)) = sen α.cos (-β) + cos α.sen (-β) = sen α.cosβ + cosα.(-senβ) = senα.cosβ - cosα.senβ

Coseno de la resta: cos (α - B) = cosα.cosβ + senα.senβ

Cos (α - β) = cos (α + (-β)) = cosα.cos(-β) - senα.sen(-β) = cosα.cosB - senα.(-senβ) = cosα.cosβ + senα.senβ

Tangente de la resta: tag (α - β) = $\mathbf{\dfrac{tag\alpha - tag\beta}{1 + tag\alpha.tag\beta}}$

Tag (α - β) = $tag(\alpha + (-\beta)) = \dfrac{tag\alpha + tag(-\beta)}{1 - tag\alpha.tag(-\beta)} = \dfrac{tag\alpha + (-tag\beta)}{1 - tag\alpha.(-tag\beta)} = \dfrac{tag\alpha - tag\beta}{1 + tag\alpha.tag\beta}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

Seno del ángulo doble: sen(2α) = 2.senα.cosα

Sen (2α) = sen (α + α) = senα.cosα + cosα.senα = 2.senα.cosα

Coseno del ángulo doble: cos(2α) = $\mathbf{cos^2\alpha - sen^2\alpha}$

Cos (2α) = cos(α + α) = cosα.cosα - senα.senα = $cos^2\alpha - sen^2\alpha$

Tangente del ángulo doble : tag (2α) = $\mathbf{\dfrac{2tag\alpha}{1 - tag^2\alpha}}$

Tag (2α) = tag (α + α) = $\dfrac{tag\alpha + tag\alpha}{1 - tag\alpha.tag\alpha} = \dfrac{2tag\alpha}{1 - tag^2\alpha}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO MITAD

Cos α = cos $(2.\frac{\alpha}{2}) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$

Seno del ángulo mitad : sen $\mathbf{\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}$

Cos $\alpha = (1 - \text{sen}^2\frac{\alpha}{2})\text{-sen}^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos\alpha = 1 + 2\text{sen}^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \text{sen}\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Coseno del ángulo mitad: cos $\mathbf{\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}$

Cos $\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2}$ - $(1\text{-}\cos^2\frac{\alpha}{2}) \Rightarrow \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \Rightarrow \cos\ \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

Tangente del ángulo mitad: tag $\mathbf{\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}}$

Dividiendo sen $\frac{\alpha}{2}$ entre cos $\frac{\alpha}{2}$

Nota: En cada caso, el signo será + ó -, según el cuadrante en el que se encuentre el ángulo $\frac{\alpha}{2}$

SUMAS Y DIFERENCIAS DE SENOS Y DE COSENOS

Sen A + sen B = 2.sen $\mathbf{\frac{A+B}{2}}$ **.cos** $\mathbf{\frac{A-B}{2}}$

Sen A - sen B = 2.cos $\mathbf{\frac{A+B}{2}}$ **.sen** $\mathbf{\frac{A-B}{2}}$

Cos A + cos B = 2.cos $\mathbf{\frac{A+B}{2}}$ **.cos** $\mathbf{\frac{A-B}{2}}$

Cos A - cos B = -2.sen $\mathbf{\frac{A+B}{2}}$ **.sen** $\mathbf{\frac{A-B}{2}}$

Sen (α + B) = sen α.cosβ + cosα.sen β
Sen (α - β) = sen α.cosβ - cosα.senβ

Sumando: sen (α + β) + sen (α - β) = 2senα.cosβ
Restando: sen (α - β) – sen (α - β) = 2cosα.senβ

Cos (α + β) = cosα.cosβ - senα.senβ
Cos (α - β) = cosα.cosβ + senα.senβ

Sumando : cos (α + β) + cos (α - β) = 2.cosα.cosβ
Restando: cos (α - β) – cos (α - β) = - 2.senα.senβ

Llamando $\alpha + \beta = A$
$\alpha - \beta = B$

Y resolviendo el sistema, se tiene: $\alpha = \frac{A+B}{2}$ **;** $\beta = \frac{A-B}{2}$ y las identidades.

5.4 – ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ecuaciones trigonométricas son aquellas en las que aparecen funciones trigonométricas actuando sobre un ángulo incógnita que, como en todas las ecuaciones, hay que despejar:

Salvo que se pida expresamente, el valor de la incógnita puede darse indistintamente en grados o en radianes.

La soluciones que se obtengan deben ser comprobadas sobre la ecuación inicial si hemos elevado al cuadrado.

Pasos:
- Expresar todo con el mismo ángulo
- Expresar todo con la misma razón trigonométrica.