TEMA 18 Sucesiones*

Concepto de sucesión.

Llamaremos **sucesión de números reales** a toda aplicación o función del conjunto de los números naturales en los números reales.

En lugar de utilizar la notación habitual para las funciones, que sería:

$$f : \underset{x}{N} \underset{\to}{\to} \underset{f(x)}{R}$$

utilizaremos a en lugar de f, n como variable en lugar de x y a_n como imagen de n en lugar de $f(x)$ y que leeremos $a\ sub\ n$.

Es decir una sucesión es una aplicación definida de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ll} a:\mathbb{N}\to\mathbb{R} & \\ n\to a_n & \mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\} \\ 1\to a_1 & a(n)=a_n \\ 2\to a_2 & \\ \vdots & \end{array}$$

$n \to a_n \to$término n-ésimo o general.

Puesto que los números naturales están ordenados: 1, 2 ,3 , 4, 5, ..., *n*, ... para dar la sucesión basta dar las imágenes de los números naturales, ordenadas del mismo modo, por lo que es común representar una sucesión de la forma siguiente:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_n, \ldots$$

de ahí el nombre de **sucesión de números reales**.

Ej. 1:Veamos tres ejemplos:

a)

$$\begin{array}{l} 1\to 1 \\ 2\to 4 \\ 3\to 9 \\ 4\to 16 \\ \vdots \\ n\to a_n=n^2 \end{array}$$

Podemos escribirla como: $1,4,9,16,\ldots,n^2,\ldots$

b)

$$
\begin{aligned}
&1 \to 1 \\
&2 \to \frac{1}{2} \\
&3 \to \frac{1}{3} \\
&4 \to \frac{1}{4} \\
&\vdots \\
&n \to a_n = \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Podemos escribirla como: $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$

c)

$$a_n = \begin{cases} 1\, si\, n\, es\, impar \\ -1\, si\, n\, es\, par \end{cases} \qquad 1,-1,\,1,\,-1,\,1,\,\ldots$$

Esta sucesión se conoce como sucesión alternada puesto que va cambiando el signo alternativamente. Su término general es $(-1)^{n+1}$

Ej. 2: Si se establece una aplicación que a todo número natural le hace corresponder el mismo número real k, se obtiene una **sucesión** llamada **constante.**
Es decir:

$$a_n = K \quad \forall n \in N \;\; K \in \mathbb{R}$$

$$Por\;\; ejemplo, si \quad K = 3,\; queda\;\; la\;\; sucesión\;\; constante:$$

$$3,3,3,3,\ldots,3,\ldots$$

<u>En general, para denotar a una sucesión utilizaremos la notación</u> $\{a_n\}$

Llamaremos **subsucesión** de una sucesión dada, a otra sucesión cuyos términos están contenidos en el mismo orden en la sucesión dada.

Ej.: La sucesión $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ es una subsucesión de la $\left\{\frac{1}{n}\right\}$

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$$

$$1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\ldots,\frac{1}{n^2},\ldots$$

Igualmente la sucesión $\{2n\}$ es claramente una subsucesión de la $\{n\}$

Operaciones con sucesiones

Suma y diferencia:

$$\{a_n\} \pm \{b_n\} = \{a_n \pm b_n\}$$

Ej.:

$$\{a_n\}=\{2n\} \quad \{b_n\}=\{3n\}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 2, & 4, & 6, & 8, & ..., & 2n \\ + & 3, & 6, & 9, & 12, & ..., & 3n \\ \hline & 5, & 10, & 15, & 20, & ..., & 5n \end{array} \qquad \{a_n\}+\{b_n\}=\{2n\}+\{3n\}=\{5n\}$$

$$\begin{array}{rrrrrr} & 2, & 4, & 6, & 8, & ..., & 2n \\ - & 3, & 6, & 9, & 12, & ..., & 3n \\ \hline & -1, & -2, & -3, & -4, & ..., & -n \end{array} \qquad \{a_n\}-\{b_n\}=\{2n\}-\{3n\}=\{-n\}$$

Producto:

$$\{a_n\}\cdot\{b_n\}=\{a_n\cdot b_n\}$$

Ej.:

$$\{a_n\}\cdot\{b_n\}=\{2n\}\cdot\{3n\}=\{6n^2\}$$

División:

$$\{a_n\}\div\{b_n\}=\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \quad b_n\neq 0\rightarrow\forall n$$

Ej.:

$$\{a_n\}\div\{b_n\}=\left\{\frac{2n}{3n}\right\}=\left\{\frac{2}{3}\right\}\rightarrow \text{es constante.}$$

Tipos de sucesiones.

Diremos que una sucesión $\{a_n\}$ es **positiva** cuando $a_n \geq 0$ para todo n.

Por ejemplo: 0, 1, 2, 3, ..., n-1

Estrictamente positiva cuando $a_n > 0\ \forall n$

Por ejemplo: 1, 2, 3, 4, ..., n

Negativa cuando $a_n \leq 0$ para todo n.

Estrictamente negativa cuando $a_n < 0$ para todo n

Por ejemplo: 0, 0, 0, 0, ... → es negativa y a su vez positiva.

1, -1, 1, -1, ... →no es negativa ni positiva.

Una sucesión es **monótona creciente** cuando $a_n \leq a_{n+1}\ \forall n$ (es decir, cada término es menor o igual que el siguiente)

Ej.: 1,1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, ...

Se dice que es **estrictamente creciente** cuando $a_n < a_{n+1}\ \forall n$

Ej.: 1, 2, 3, 4, 5, ...,n,...

Una sucesión es **monótona decreciente** cuando $a_n \geq a_{n+1}\ \forall n$ (es decir, cuando cada término es mayor que el siguiente)

Ej.: $1,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{4},...,\frac{1}{n},...$

Se dice que es **estrictamente decreciente** cuando $a_n > a_{n+1}\ \forall n$

Ej.: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

Se llaman **sucesiones alternadas** aquellas que van cambiando de signo alternativamente.

Ej.:
$$1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$$
$$-1, 2, -3, 4, -5, \ldots, (-1)^n \cdot n, \ldots$$

Nota: Es conveniente fijarse que el cambio alternativo de signo, se consigue poniendo en el término general el factor $(-1)^n$ ó $(-1)^{n+1}$

Una sucesión $\{a_n\}$, se dice que está **acotada superiormente**, cuando existe un número real **M**, llamado **cota superior** de la sucesión, tal que $a_n \le M$ para todo **n**∈ℕ.
(Es decir, existe un número real, tal que todos los términos son menores o iguales que él)

Ej.: $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ está acotada superiormente, pues todos sus término $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ cumplen que $a_n \le 1\ \forall n$

En este caso M=1 es una cota superior de la sucesión. También son cotas superiores, todos los números reales mayores que 1.
$\{n^2\}$ no está acotada superiormente, puesto que cualquier número real que tomemos, es superado siempre por algún término de la sucesión.

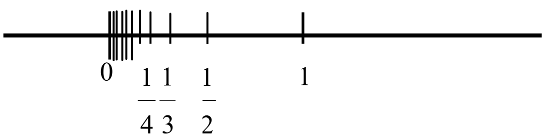
Una sucesión $\{a_n\}$, se dice que está **acotada inferiormente**, cuando existe un número real **m**, llamado **cota inferior** de la sucesión, tal que $m \le a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(Es decir, existe un número real, tal que todos los términos son mayores o iguales que él)

Ej.: $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ está acotada inferiormente, pues todos su términos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ cumplen que $0 \le a_n$
En este caso $m = 0$ es una cota inferior de la sucesión y también lo será cualquier número menor que 0.

Una sucesión que a la vez está acotada superior e inferiormente, se dice **acotada**.

Ej.: $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ → acotada superiormente, → acotada inferiormente } se dice que está acotada.

Gráficamente:



Vemos que todos los términos están entre $m = 0$, cota inferior y $M = 1$, cota superior.

Ej.: La sucesión alternada $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$ está obviamente acotada.

Ej.: Sin embargo la sucesión $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots, (-1)^n \cdot n, \ldots$ no está acotada ni superior ni inferiormente.

Límite de una sucesión.

Definición intuitiva: Una sucesión $\{a_n\}$ se dice que tiene por límite $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}$, cuando a medida que tomamos términos más avanzados (de mayor subíndice), estos se acercan todo lo que queramos a $\boldsymbol{a}$.

Lo indicaremos de la forma siguiente:

Si $n \to \infty$ **entonces** $\{a_n\} \to a$ y se lee **"si** n **tiende a infinito entonces** $\{a_n\}$ **tiende a** a**"**

Aunque la notación más usada es: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, que se lee, límite de la sucesión a_n cuando n tiende a ∞ es a

Ej.: Supongamos la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, veamos intuitivamente, que tiene por límite 0.

En efecto, si hallamos una serie de términos, cada vez más avanzados, nos encontramos lo siguiente:

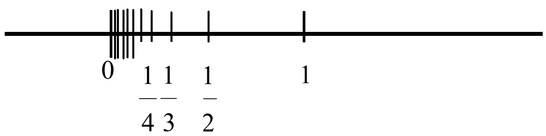
n	$a_n = \frac{1}{n}$
1	1
10	0,1
100	0,01
1000	0,001
$\vdots$	$\vdots$
∞	0

donde claramente se ve que si $(n \to \infty)$ entonces $\left(\frac{1}{n} \to 0\right)$

Por lo tanto podemos escribir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Gráficamente, representando unos cuantos términos sobre la recta real, vemos que los términos se van acercando a 0, sin dejar de hacerlo.



Definición rigurosa de límite de una sucesión:

Se dice que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}$ existe un $n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0$ se cumple $|a_n - a| < \varepsilon$

donde $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$

El símbolo $\forall$, significa "para todo" o "para cualquier"

Nota: Puesto que $|a_n - a| < \varepsilon$ equivale[1] a que $-\varepsilon < a_n - a < +\varepsilon$, o lo que es lo mismo $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, es decir $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ (ver nota)[2], en la definición rigurosa estamos afirmando que por pequeño que sea ε, hay un termino (a_{n_o}) a partir del cual, todos los demás (que son infinitos) están en el intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, luego estarán tan próximos a a como queramos, puesto que ε se puede tomar tan pequeño como queramos. Esto coincide con la idea intuitiva de que a medida que tomamos términos cada vez más avanzados, estos se acercan a a todo lo que queramos.

Ej.: Veamos como se concreta en el ejemplo anterior, el cálculo del término a partir del cual, todos los términos cumplen la definición ($|a_n - a| < \varepsilon$), una vez dado el ε

Veamos que en el caso del $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, la definición se cumple, tomando por ejemplo un $\varepsilon = 0,3$

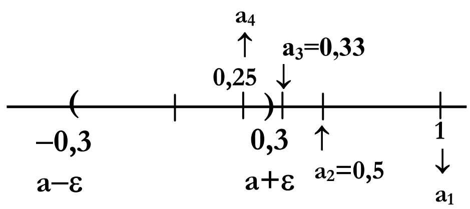
Hallemos el n_0, a partir del cual se cumple que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 0,3$

Operando la desigualdad anterior queda: $\frac{1}{n} < 0,3 \Rightarrow n > \frac{1}{0,3} \cong 3,33$

Por tanto tomando $n_0 = 4$, tendremos que $\forall n \geq 4 \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < 0,3$

o lo que es lo mismo $a_n = \frac{1}{n} \in (-0,3\ ,\ 0,3)$

Esta afirmación se ve clara en el gráfico siguiente:



Si en lugar de dar un valor particular a ε, trabajamos con él como una variable, tendríamos:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Esto significa que tomando $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (la notación $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ significa parte entera de $\frac{1}{\varepsilon}$), se cumplirá que $|a_n - a| < \varepsilon$, con lo que queda demostrado que el límite realmente es 0, puesto que se cumple la definición rigurosa de límite.

Lo visto en este ejemplo es algo que excede al nivel que ponen en los exámenes del C.A.D., no obstante se explica para aquellos alumnos que quieran profundizar en el concepto de límite, concepto fácil intuitivamente, pero que se complica cuando se quiere demostrar rigurosamente las cosas)

Ej.: Otro ejemplo intuitivo, es el siguiente:

[1] Recordemos del tema de los números reales que $|x| < r \Leftrightarrow -r < x < +r$

[2] Recordemos que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ es lo que llamamos, entorno del punto a, de radio ε, que no es más que un intervalo abierto de centro a

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}$ *ya que*

n	$a_n=\frac{n-1}{2n}$
1	0
5	0,4
50	0,49
500	0,499
$\vdots$	$\vdots$
∞	$0,4999\ldots\cong 0,5$

(Para profundizar) Si queremos demostrar rigurosamente que el límite de esta sucesión es $\frac{1}{2}$, tendremos que tomar un ε arbitrario y exigir que $\left|\frac{n-1}{2n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$.

Operando se llega a $\left|\frac{n-1-n}{2n}\right|<\varepsilon$ luego $\left|\frac{-1}{2n}\right|<\varepsilon\Rightarrow\left|-\frac{1}{2n}\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{2n}<\varepsilon$

Despejando n, queda: $n>\frac{1}{2\varepsilon}$, por lo que tomando $n_0=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1$, tendremos que para cualquier término posterior a a_{n_0}, se cumplirá la definición ($\left|\frac{n-1}{2n}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$) y por tanto habremos demostrado que el límite es $\frac{1}{2}$.

Así por ejemplo, si $\varepsilon=0{,}1$, tendremos que $n_0=\left[\frac{1}{2.0{,}1}\right]+1=\left[\frac{1}{0{,}2}\right]+1=[5]+1=5+1=6$. Esto significa que a partir del 6º término en adelante, todos los términos de la sucesión están en el intervalo $(\frac{1}{2}-0{,}1\ ,\ \frac{1}{2}+0{,}1)=(0{,}4\ ,\ 0{,}6)$, como así es en efecto ya que $a_6=\frac{6-1}{2.6}=\frac{5}{12}\cong 0{,}42$ y todos los siguientes se acercan más a 0,5 que es el límite, luego también están en dicho intervalo, como se puede comprobar dando valores.

(Insisto que todo esto está fuera del programa del C.A.D. pero se enmarca en el concepto de límite, muy importante en matemáticas)

Ej.: La sucesión constante, la que todos sus términos son iguales a una constante c, tiene por límite la propia constante c.

En efecto, la sucesión $c,\ c,\ c,\ldots,c,\ldots$ no sólo se acerca c a medida que avanzamos en los términos de la sucesión, sino que es exactamente c

Por tanto podemos escribir: $\lim\limits_{n\to\infty}c=c$

Ej.: La sucesión alternada $1,-1,1,-1,\ldots,(-1)^{n+1},\ldots$ evidentemente no puede tener límite, ya que si suponemos que es 1, tomando un $\varepsilon=0{,}5$ dejaríamos infinitos términos (todos los que ocupan lugar par) fuera del intervalo (1 – 0,5 , 1 + 0,5). Lo mismo ocurriría si suponemos que el límite es –1 o cualquier otro valor (siempre podríamos encontrar un ε que dejaría infinitos términos fuera del intervalo correspondiente, en contra de la definición rigurosa de límite)

Un razonamiento similar puede demostrar que **si el límite existe** (ya hemos visto que no siempre existe), **éste es único**

Las sucesiones que tienen límite real se denominan **sucesiones convergentes**. Por el contrario las sucesiones que no tienen como límite un número real, se dicen **divergentes**.

Propiedades de las sucesiones
Se pueden demostrar las siguientes propiedades de las sucesiones:
1. **Toda sucesión convergente está acotada**(es decir si no esta acotada no puede ser convergente).
Fijaros que la propiedad recíproca no es cierta, puesto que hemos visto la sucesión $1,-1,1,-1,\ldots,(-1)^{n+1},\ldots$ que evidentemente está acotada, pero que no tiene límite.
Sin embargo si le exigimos alguna condición más, como se pone de manifiesto en las dos propiedades siguientes, si que se cumple.
2. **Toda sucesión creciente y acotada superiormente, tiene límite.**
Por ejemplo, la sucesión $0.3, 0.33, 0.333, \ldots$. es una sucesión claramente creciente y acotada superiormente por el 1 (también por 0,34) , por lo que tendrá límite. Este no es otro, como se ve intuitivamente que $0.\widehat{3}$, es decir $\frac{1}{3}$
3. **Toda sucesión decreciente y acotada inferiormente, tiene límite.**

El número *e*
La propiedad número 2, nos permite definir el número e, puesto que teniendo en cuenta que la sucesión $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ es creciente como se puede comprobar fácilmente de una forma intuitiva dando valores y que además está acotada por el número 3 (todos los términos son menores que 3), esto permite afirmar que dicha sucesión tiene límite.
Pues bien:

Se define el número ***e*** como el límite de la sucesión:
$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \simeq 2'718281\ldots$$

Este número, como sabemos es la base de los logaritmos neperianos y juega un papel muy importante en matemáticas superiores (además de ser la base de los logaritmos citados, juega un papel importante en la naturaleza, pues aparece en las funciones que definen procesos de crecimiento, el periodo de semidesintegración de un elemento radiactivo o la ecuación de la catenaria, que es la curva que forma un cable cuando queda suspendido por sus extremos).

Vemos a continuación un tipo de sucesiones con unas características muy particulares, como son las sucesiones o progresiones aritméticas y las geométricas. (No ha salido nunca nada relacionado con ellas, pero es útil conocer lo que aquí se expresa, sobre todo la fórmula para hallar el término general a_n de una sucesión)

Progresión aritmética
Las **progresiones aritméticas** son sucesiones en las que cada término se obtiene sumándole al anterior una cantidad constante **d** llamada **diferencia** (el texto le llama **razón** de la progresión)

$$a_{n+1} = a_n + d \qquad d \in \mathbb{R} \text{ (diferencia o razón de la progresión).}$$
$$a_{n+1} - a_n = d$$
Se puede demostrar que:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$$ $$\boxed{a_p = a_q + (p-q)d \text{ siendo } p > q}$$

Ej.: Halla la diferencia, el término a_6 y el término a_{14} de la siguiente progresión aritmética, hallando previamente el término general.

$$5, 7, 9, 11, 13, \ldots$$
$$d = a_{n+1} - a_n = a_3 - a_2 = 9 - 7 = 2$$
$$a_n = 5 + (n-1)2 = 5 + 2n - 2 = 2n + 3$$

Para hallar el 6º término basta dar a n el valor 6, en la expresión que nos da el término general de la sucesión o progresión:

$$a_6 = 2 \cdot 6 + 3 = 12 + 3 = 15$$

El término 14º puede hallarse a través del 6º, utilizando la segunda fórmula dada:

$$a_{14} = a_6 + (14-6)2 = 15 + 28 - 12 = 31$$

o bien utilizando también el término general:

$$a_{14} = 2 \cdot 14 + 3 = 28 + 3 = 31$$

Ej.: Halla el término general de las sucesiones aritméticas siguientes:
La de los números pares: 2, 4, 6, 8,....
y la de los impares: 1, 3, 5, 7, ...
Ambas tienen como diferencia 2, por lo que sus términos generales son:

$$a_n = 2 + (n-1).2 = 2 + 2n - 2 = 2n$$

y

$$a_n = 1 + (n-1).2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$$

expresiones que ya conocíamos y que ahora hemos justificado.

Se puede demostrar que la **suma de los primer n términos de una progresión aritmética, viene** dada por la fórmula siguiente:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

Ej.: Calcula la suma de los 14 primeros términos, de la sucesión anterior: 5, 7, 9, 11,...

$$S_{14} = \frac{5+31}{2} \cdot 14 = \frac{36}{2} \cdot 14 = 18 \cdot 14 = 252$$

Progresión geométrica.

Las **progresiones geométricas** son sucesiones en las que cada término se obtiene multiplicando el anterior por una cantidad constante **r** llamada **razón de la progresión**.

$$a_{n+1} = a_n \cdot r \quad r \in \mathbb{R} \text{ (razón de la progresión)}$$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

El término general de la progresión geométrica se obtiene a través de la fórmula siguiente:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

También existe como en las progresiones aritméticas una fórmula que relaciona dos términos cualesquiera:

$$\boxed{a_p = a_q \cdot r^{p-q} \text{ siendo } p > q}$$

Ej.: Halla la razón y el término n-ésimo de la siguiente progresión geométrica:

$$4, 8, 16, 32, 64, \ldots$$

$$r = \frac{16}{8} = 2$$

$$a_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

Ej.: Halla la razón y el término n-ésimo de la siguiente progresión geométrica:

$$12, 24, 48, 96, \ldots$$

$$r = \frac{24}{12} = 2$$

$$a_n = 12 \cdot 2^{n-1} = 3.2^2 \cdot 2^{n-1} = 3.2^{n+1}$$

Como en las aritméticas existe una fórmula para calcular la **suma de los n primeros términos de una progresión geométrica** y viene dada por:

$$S_n = \frac{a_n.r - a_1}{r-1} \; siendo \; r \neq 1$$

No han salido ejercicios de examen, específicos de los contenidos de este tema.

Ejercicios del libro. (Pág. 402)
E-1
E-2
E-3
Los ejercicios 4 y 5 ya se han dado argumentos que los resuelven.

---

[*] Este tema ha sido pasado a soporte informático por los alumnos **José Miguel Sánchez y Jesús Ramil**, basándose en el **libro Matemáticas Especiales, de E. Bujalance y otros**, editado por la **editorial Sanz y Torres** y en las explicaciones dadas en las tutorías presenciales del curso 2001-2002, por el profesor tutor del Centro de la Uned **Alzira-Valencia** "Francisco Tomás y Valiente", **José Luis Lombillo**, que los ha corregido, completado y ampliado.