

4. CONCEPTO DE LOGARITMO.

Sea a un número real positivo, no nulo y distinto de 1, y A otro número positivo no nulo. Se llama **logaritmo en base a del número A** , al exponente x a que debe elevarse la base a para obtener el número A .

Se representa por

$$\log_a A = x \rightarrow a^x = A$$

Ejemplos

1.- Hallar los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 16 = x \rightarrow 2^x = 16 \rightarrow 2^x = 2^4 \rightarrow x = 4 \rightarrow \log_2 16 = 4$

b) $\log_{1/3} 9 = x \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 9 \rightarrow 3^{-x} = 3^2 \rightarrow -x = 2 \rightarrow x = -2$

2.- Calcular: $\log_2 128$, $\log_3 \sqrt{243}$, $\log_5 \left(\frac{5}{\sqrt[3]{5}}\right)$

De la infinidad de bases que podemos elegir para un logaritmo, hay dos que son, en la práctica, los más utilizados, los de base $a = 10$ y base $a = e$.

Base 10: Los logaritmos de base $a = 10$, se llaman **Logaritmos decimales**, y se suele representar de la siguiente forma

4.1. Log A en la calculadora

Estos logaritmos decimales se pueden obtener directamente con la calculadora, usando la tecla $\boxed{\log}$. Por ejemplo, si deseamos calcular el valor de $\log 245$, procederíamos de la siguiente forma

$$245 \boxed{\log} \rightarrow \text{en la pantalla aparece } 2'389166084 \rightarrow \log 245 = 2'389166084$$

Base e: Se llaman **logaritmos neperianos** y se representan por

4.2. Ln A en la calculadora

Estos logaritmos también se obtienen directamente usando la calculadora y con la tecla $\boxed{\ln}$, por ejemplo, si deseamos obtener el valor de $\ln 245$, teclearíamos

$$245 \boxed{\ln} \rightarrow \text{en la pantalla aparece } 5'501258211$$

$$\rightarrow \ln 245 = 5'501258211$$

4.3. Propiedades de los logaritmos.

Las siguientes propiedades de los logaritmos son fundamentales para poder operar con los mismos.

Las propiedades de los logaritmos son las propiedades de las potencias.

$$1.- \log_a a = 1 \rightarrow a^1 = a$$

$$2.- \log_a 1 = 0 \rightarrow a^0 = 1$$

$$3.- \log_a a^x = x \rightarrow a^x = a^x$$

$$4.- a^{\log_a x} = x \rightarrow \log_a x = \log_a x$$

$$5.- \text{Logaritmo de un producto} \rightarrow \log_a(A \cdot B) = \log_a A + \log_a B$$

$$6.- \text{Logaritmo de un cociente} \rightarrow \log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$$

$$7.- \text{Logaritmo de una potencia} \rightarrow \log_a A^n = n \cdot \log_a A$$

$$8.- \text{Logaritmo de una raíz} \rightarrow \log_a \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_a A$$

Dominar estas propiedades, equivale a poder resolver una gran cantidad de problemas.

Ejemplos:

1.- Hallar el valor de los siguientes logaritmos decimales sin usar la calculadora:

$$a) \log \sqrt{10} = \frac{1}{2} \log 10 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$b) \log 40 + \log 25 = \log(40 \cdot 25) = \log 1000 = \log 10^3 = 3$$

$$c) \log 80 - \log 8 = \log \frac{80}{8} = \log 10 = 1$$

2.- Descomponer los siguientes logaritmos en logaritmos simples:

$$a) \log(x \cdot y \cdot z) = \log x + \log y + \log z$$

$$b) \log\left(\frac{x^3 \cdot y}{z^2}\right) = \log(x^3 \cdot y) - \log z^2 = \log x^3 + \log y - \log z^2 = \\ = 3 \cdot \log x + \log y - 2 \log z$$

3.- Reducir a un solo logaritmo las siguientes expresiones

$$a) 3 \log A + 5 \log B - 2 \log Z = \log A^3 + \log B^5 - \log Z^2 = \log(A^3 \cdot B^5) - \log Z^2 = \log\left(\frac{A^3 \cdot B^5}{Z^2}\right)$$

$$b) \frac{3}{2} \log A + \log B + \frac{1}{2} \log Z = \log A^{\frac{3}{2}} + \log B + \log Z^{\frac{1}{2}} = \\ = \log(A^{\frac{3}{2}} \cdot B \cdot Z^{\frac{1}{2}}) = \log(\sqrt{A^3} \cdot B \cdot \sqrt{Z})$$

4.- Sabiendo que $\log 2 = 0'3010$, hallar el valor de los siguientes logaritmos

$$a) \log 8 = \log 2^3 = 3 \cdot \log 2 = 3 \cdot 0'3010 = 0'9030$$

$$b) \log 5 = \log(10/2) = \log 10 - \log 2 = 1 - 0'3010 = 0'699$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \log 0'125 &= \log\left(\frac{125}{1000}\right) = \log 125 - \log 1000 = & \text{=log} \\ & \left(\frac{1000}{8}\right) - \log 1000 = \log 1000 - \log 8 - \log 1000 = -\log 2^3 = \\ & = -3 \cdot \log 2 = -3 \cdot 0'3010 = -0'9030 \end{aligned}$$

4.4. Cambio de base.

Conocido el logaritmo de un número en una base, se puede hallar en cualquier otra base.

Supongamos que conocemos el logaritmo de cierto número A en dos bases distintas a y b, es decir, conocemos

$$\log_a A \text{ y } \log_b A$$

Nos planteamos conocer la relación que hay entre ambos. Esta relación viene dada por la fórmula

$$\log_b A = \frac{\log_a A}{\log_a b}$$

Como consecuencia de esta última propiedad, se deduce que solamente necesitamos conocer los logaritmos en una sola base, los demás se obtienen aplicando el proceso anterior.

Para hallar un logaritmo en cualquier base, haremos un cambio a base 10, que sabemos hallar.

Hallar los siguientes logaritmos:

$$\text{a) } \log_3 40 = \frac{\log 40}{\log 3} = \frac{1'6021}{0'4771} = 3'3580$$

$$\text{b) } \log_2 13'567 = \frac{\log 13'567}{\log 2} = \frac{1'1325}{0'3010} = 3'7625$$