5. EXPRESIONES ALGEBRÁICAS.

5.1. Operaciones con polinomios.

5.1.1. SUMA:

Para obtener la suma de dos polinomios P(x) y Q(x) se suman coeficientes a coeficientes de la misma potencia.

Por ejemplo, consideremos los polinomios:

$P(x)= 5x^4+3x^3-3x^2+7x-1$ y $Q(x)=2x^3-5x+10$	➔ $P(x)+Q(x) = 5x^4+5x^3-3x^2+2x+9$

5.1.2. PRODUCTO:

Dados dos polinomios P(x) y Q(x), para multiplicar P(x).Q(x), se multiplica cada monomio de P(x) con cada uno de los monomios de Q(x) y después sumar los de igual grado.

Por ejmplo, consideremos los polinomios :

$P(x)= 5x^4+3x^2+7x-2$ y $Q(x)= 2x^3+3x^2-1$

➔ $P(x).Q(x)= 10x^7+15x^6-5x^4+6x^5+9x^4-3x^2+14x^4+21x^3-7x-4x^3-6x^2+2 =$

$= 10x^7+15x^6+18x^4+6x^5+17x^3-9x^2+7x+2$

5.1.3. DIVISIÓN:

Dados dos polinomios P(x) y Q(x), para poder dividir P(x) entre Q(x), el grado de P(x) ha de ser mayor o igual que el de Q(x).

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} & C(x) \\ R(x) & \end{array} \quad ➔ \; P(x) = Q(x).C(x)+R(x)$$

Consideremos los polinomios:

$P(x) = 4x^4-12x^3+7x-5$ y $Q(x)= 3x^2-6x$

Realicemos la división P(x):Q(x) ➔

$$➔ \begin{array}{l|l} 4x^4 - 12x^3 \qquad + 7x - 5 & 3x^2 - 6x \\ \cline{2-2} -4x^4 + 8x^3 & \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{8}{3} \\ \hline \qquad - 4x^3 & \\ \qquad 4x^3 - 8x^2 & \\ \hline \qquad\qquad - 8x^2 + 7x & \end{array}$$

$$8x^2 - 16x$$

$$-9x - 5 \Rightarrow C(x) = \tfrac{4}{3}x^2 - \tfrac{4}{3}x - \tfrac{8}{3} \quad \text{y el resto es } R(x) = -9x-5$$

División por un monomio de la forma (x-a):

Para realizar esta división aplicamos la Regla de Ruffini

Por ejemplo, realicemos la división $(x^3-2x^2+3x-5):(x+2)$

➔

	1	-2	3	-5
-2		-2	8	-22
	1	-4	11	-27

➔ $C(x) = x^2-4x+11$ y $R(x)=-27$

5.2. Descomposición Factorial.

Por ejemplo, factorizar el polinomio $P(x)= 3x^3-6x^2-3x+6$

➔ **Aplicamos Ruffini con los divisores de +6 que son :** $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ **, y nos quedamos con los que den de resto 0.**

	3	-6	-3	6
1		3	-3	-6
	3	-3	-6	0
-1		-3	6	
	3	-6	0	
2		6		
	3	0		

➔ **$P(x) = (x-1).(x+1).(x-2).3$ siendo las raíces de $P(x)$ $x=1$, $x=-1$, $x=2$**

5.3. FRACCIONES ALGEBRAICAS.

DEF: Denominamos Fracción Algebraica al cociente de polinomios:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{con } Q(x) \neq 0$$

Por ejemplo: $\dfrac{3x-5}{2x^2+x-1}$; $\dfrac{5}{7x^3-2x+3}$

5.3.1. SIMPLIFICAR FRACCIONES ALGEBRAICAS:

Para simplificar una fracción algebraica, hay que descomponer factorialmente los polinomios del numerador y del denominador, y después, eliminar los factores comunes de ambos.

Por ejemplo, simplificar la fracción:

$$\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+3x^2+2x}=\frac{x.(x^2+5x+6)}{x.(x^2+3x+2)}=\frac{\cancel{x}.\cancel{(x+2)}.(x+3)}{\cancel{x}.\cancel{(x+2)}.(x+1)}=\frac{x+3}{x+1}$$

5.3.2. OPERACIONES:

Para sumar o restar fracciones algebraicas, procedemos como en la suma de fracciones numérica, reducimos a común denominador.

Por ejemplo, realizar la siguiente diferencia : $\dfrac{3x-1}{x^2+2x+1}-\dfrac{4x^2-1}{x^2-2x-3}$

Obtenemos la descomposición factorial de cada denominador:

$x^2+2x+1=(x+1).(x+1)=(x+1)^2$

$x^2-2x-3=(x+1).(x-3)$

➔ **el mínimo común múltiplo es** $(x+1)^2.(x-3)$

➔ $\dfrac{3x-1}{x^2+2x+1}-\dfrac{4x^2-1}{x^2-2x-3}=\dfrac{(x-3).(3x-1)-(x+1).(4x^2-1)}{(x+1)^2.(x-3)}=$

$=\dfrac{-4x^3-x^2-9x+4}{(x+1)^2.(x-3)}$